代数閉体でない場合の代数的集合について

岡山大学　自然科学研究科　小野貴寛

k を体, R を n 変数多項式環 $k[x_1, \ldots, x_n]$ とする. このとき R から一つ多項式 f をとると次のような代入写像を考えることができる.

$$\begin{array}{ccc} k^n & \longrightarrow & k \\ \cup\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\shortmid \\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) & \longmapsto & f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \end{array}$$

このとき記号 $\mathrm{Var}(-)$ を次のように定義する. $f_1, \ldots, f_r \in R$ に対して,

$$\mathrm{Var}(f_1, \ldots, f_r) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in k^n \mid f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0 \text{ for } 1 \leq \forall i \leq r\}.$$

k^n の部分集合 V が代数的集合であることを定義する.

$$k^n \supseteq V \text{ が代数的集合} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists R \text{ のイデアル } \mathfrak{a} \text{ s.t. } V = \mathrm{Var}(\mathfrak{a}).$$

R のイデアル $\mathfrak{a}$ は有限生成であるから, その生成元を $f_1, \ldots, f_m \in R$ とすれば, $\mathrm{Var}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Var}(f_1, \ldots, f_m)$ となる. 故に, 任意の k^n の代数的集合は有限個の多項式の共通零点を考えることになる.

今回紹介したい内容は [1] の演習問題となっている次の事実です.

定理

k が代数閉体でないとき, 任意の k^n の代数的集合はただ一つの方程式で定義される.

本講演ではこの定理に関連した事柄を [2] を参考に Gröbner 基底の視点（消去定理, イデアル所属問題など）から調べた内容についてもご報告したいと思います。

参考文献

[1] Ernst Kunz, Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry, Birkhäuser 1985.

[2] D. Cox, J. Little and D. O'Shea. Ideals, Varieties, and Algorithms, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1997.