

題目: 量子座標環 $\mathbb{C}[SL_n]_v$ の既約表現の素朴な構成について

アブストラクト: 量子座標環 $\mathbb{C}[SL_n]_v$ の unitarizable な既約表現を (作用の捻りを除いて) 網羅的に構成する新しい素朴な方法について紹介する. 連結単連結単純複素 Lie 群 G に対し, 量子座標環 $\mathbb{C}[G]_v$ の unitarizable な既約表現は Soibelman らによって分類が行われており, その同型類は表現の捻りを除くと Weyl 群の元でパラメトライズされることが知られている. さらに Soibelman はその既約表現らを基本的な表現のテンソル積の形で具体的に構成する方法も与えているが, ここでは $G = SL_n$ の場合に Soibelman の方法とは別の既約表現の構成法を与える. (このとき, 対応する Weyl 群は n 次対称群である.)

$\mathbb{C}[SL_n]_v$ は以下の生成元と関係式で定義される単位的結合 \mathbb{C} 代数である ($0 < v < 1$).

$$\begin{array}{ll} \text{生成元} & \{T_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n} \\ \text{関係式} & T_{ij}T_{iq} = vT_{iq}T_{ij} \quad \text{if } j < q, \\ & T_{ij}T_{pj} = vT_{pj}T_{ij} \quad \text{if } i < p, \\ & T_{ij}T_{pq} = T_{pq}T_{ij} \quad \text{if } i < p, j > q, \\ & T_{ij}T_{pq} - T_{pq}T_{ij} = (v - v^{-1})T_{iq}T_{pj} \quad \text{if } i < p, j < q, \\ & \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} (-v)^{l(\tau)} T_{1\tau(1)} T_{2\tau(2)} \cdots T_{n\tau(n)} = 1 \cdots (*). \quad (l(\tau) \text{ は } \tau \text{ の転倒数}) \end{array}$$

今回紹介する方法は本質的にはこの $\mathbb{C}[SL_n]_v$ の生成元と関係式のみに着目した素朴な方法である. $\mathbb{C}[Mat_n]_v$ を $\mathbb{C}[SL_n]_v$ の関係式のうち (*) のみ除いて定義した単位的結合 \mathbb{C} 代数とする. このとき, $\mathbb{C}[Mat_n]_v^* := \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[Mat_n]_v, \mathbb{C})$ 上に $\mathbb{C}[Mat_n]_v$ の作用を以下で定める (右正則表現):

$$(T.f)(X) := f(XT) \quad \text{for } f \in \mathbb{C}[Mat_n]_v^*, X, T \in \mathbb{C}[Mat_n]_v.$$

また, $\mathbb{C}[Mat_n]_v$ の基底として

$$\left\{ \prod_{i,j} T_{ij}^{a_{ij}} := T_{nn}^{a_{nn}} \cdots T_{n1}^{a_{n1}} T_{n-1n}^{a_{n-1n}} \cdots T_{n-11}^{a_{n-11}} T_{n-2n}^{a_{n-2n}} \cdots T_{1n}^{a_{1n}} \cdots T_{11}^{a_{11}} \mid a_{ij} \in \mathbb{N} (i, j = 1, \dots, n) \right\}$$

が取れ, さらに $\left| \prod_{i,j} T_{ij}^{a_{ij}} \right\rangle \in \mathbb{C}[Mat_n]_v^*$ を

$$\left| \prod_{i,j} T_{ij}^{a_{ij}} \right\rangle \left(\prod_{i,j} T_{ij}^{a'_{ij}} \right) := \delta_{(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} (a'_{ij})_{i,j=1,\dots,n}}$$

($\delta_{(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} (a'_{ij})_{i,j=1,\dots,n}}$ は Kronecker の delta) で定義する. この設定のもとで $\mathbb{C}[SL_n]_v$ の既約表現 (単純 $\mathbb{C}[SL_n]_v$ 加群) の素朴な構成法は以下のようにまとめられる.

1. $T_{kl} \cdot \left| \prod_{i,j} T_{ij}^{a_{ij}} \right\rangle$ を具体的に計算
2. 1 で計算した結果をもとに n 次対称群の各元に対応する $\mathbb{C}[Mat_n]_v^*$ のある $\mathbb{C}[Mat_n]_v$ 部分加群を選択
3. 2 で得た部分加群上の $\mathbb{C}[Mat_n]_v$ の作用を $\mathbb{C}[SL_n]_v$ の作用を誘導するように捻る

今回の講演では 2 の部分加群の選択方法および 3 の作用の捻りについて解説する. また, この構成で得られる単純 $\mathbb{C}[SL_n]_v$ 加群は自然な基底を持っており, これは加群の同型を介して, Soibelman による基本的な $\mathbb{C}[SL_n]_v$ 加群のテンソル積の空間おける自然な基底に (テンソル積の順を適切に定めれば) 対応する.