Immanant 不等式と Immanantal Polynomials

田端亮　(広島大学大学院理学研究科)*

Immanant とは, determinant (行列式) や permanent (determinant の符号を変化を取り除いたもの) を一般化するような, 正方行列に対して定まる関数であり, Schur ([3]) によって導入され, Littlewood-Richardson ([2]) によって名付けられたとされている.

定義. $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ とする. χ を n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の表現から定まる既約指標であるとする. このとき, (normalized) immanant $\overline{d}_\chi^{\mathfrak{S}_n}$ を次で定義する.

$$\overline{d}_\chi^{\mathfrak{S}_n}(A) := \frac{1}{\chi(\mathrm{id})}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\chi(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

既約指標 χ が交代指標, 自明指標のときの immanant はそれぞれ, determinant, permanent に一致することが確かめられる.

$\mathfrak{S}_n$ の既約表現は, n の分割と 1 対 1 に対応することが知られている. このことにより immanant はヤング図形でパラメータ付けすることができるので, 分割 λ に対応する immanant を単に $\overline{d}_\lambda$ と書くこともある.

行列 A を (半正値) エルミート行列に制限すると, 各 immanant は実数値をとる. その大小関係について最も知られているものに, 次の Schur の定理と Lieb の予想がある.

定理 (Schur [3])**.** A が半正値エルミート行列であるとき, 次が成り立つ.

$$\overline{d}_\lambda(A) \geq \det A.$$

予想 (Lieb [1], permanental dominance conjecture)**.** A が半正値エルミート行列であるとき, 次が成り立つ.

$$\overline{d}_\lambda(A) \leq \mathrm{per}\, A.$$

つまり, determinant とは最小の immanant であるのに対し, permanent が最大であろうという予想である.

本講演では, これらの不等式の一般化, 精密化へのアプローチと, immanantal polynomial $\overline{d}_\lambda(xI - L)$ を考えたとき, 各係数の間にも同様の大小関係が成り立つことを述べる. また, グラフ理論との関係や, $n\to\infty$ のときの immanant の極限値についても紹介したい.

参考文献

[1] E. H. Lieb, Proofs of Some Conjectures on Permanents, J. Math. and Mech. 16:127-134 (1966)

[2] D. E. Littlewood, A. R. Richardson, Group Characters and Algebra, Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A, Math. Phys. 233:99-141 (1934)

[3] I. Schur, Über endliche Gruppen und Hermitische Formen, Math. Z. 1:184-207 (1918)

*e-mail: `tabata-ryo@hiroshima-u.ac.jp`