Cameron–Walker グラフのエッジイデアル

東谷　章弘[1] (大阪大学大学院・情報科学研究科)

本稿の内容は、日比孝之氏・木村杏子氏・Augustine O'Keefe 氏との共同研究に基づくものである。

1　導入

G を頂点集合 $V(G) = \{1, \ldots, n\}$ 上の有限単純グラフとする。$E(G)$ で G の辺集合を表す。$S = K[x_1, \ldots, x_n]$ を体 K 上の n 変数多項式環とする。グラフ G の**エッジイデアル** $I(G)$ は

$$I(G) = (\, x_i x_j \,:\, \{i, j\} \in E(G)\,) \,\subset\, S$$

で定義される S の単項式イデアルである。エッジイデアル $I(G)$ の研究において、$I(G)$ や $S/I(G)$ に関する可換環論的不変量や性質をグラフ G の言葉で記述することは非常に重要な問題である。特に重要な不変量の１つに Castelnuovo–Mumford regularity $\mathrm{reg}(S/I(G))$ が挙げられる。

$M \subset E(G)$ が G のマッチングであるとは、任意の相異なる $e, e' \in M$ に対し、$e \cap e' = \emptyset$ を満たすときにいう。$m(G)$ で G のマッチングの最大濃度を表す。また、G のマッチング $M \subset E(G)$ が G の誘導マッチングであるとは、任意の相異なる $e, e' \in M$ に対し、$e \cap f \neq \emptyset$ かつ $e' \cap f \neq \emptyset$ を満たす $f \in E(G)$ が存在しないときにいう。$im(G)$ で G の誘導マッチングの最大濃度を表す。

グラフ G について、Hà–VanTuyl [3, Theorem 6.7] 及び Katzman [6, Lemma 2.2] により、$\mathrm{reg}(S/I(G))$ に関する次の不等式が従う。

$$im(G) \leq \mathrm{reg}(S/I(G)) \leq m(G) \tag{1}$$

よって、$m(G) = im(G)$ を満たすグラフ G を考えるのは非常に自然なことである。

グラフにおいて、次数１の頂点を丁度１個持つ辺を leaf edge と呼ぶ。また、次数２の頂点を丁度２個持つ triangle を pendant triangle と呼ぶ。

Cameron–Walker [4] は、$m(G) = im(G)$ が成立するグラフ G を以下のように特徴付けた。

[1]E-mail : ahigashi@math.kyoto-u.ac.jp

定理 1 ([4, Theorem 1]) G を有限連結単純グラフとする。G が $im(G) = m(G)$ を満たすことと G が次のグラフのいずれかであることは同値である。

(a) $(1, n)$ 型完全二部グラフ

(b) いくつかの triangles を１点でくっつけたもの

(c) 頂点の分割 $U \sqcup V$ 上の連結二部グラフの U の各頂点に１つ以上の leaf edge を付け、V の各頂点にいくつかの pendant triangles を許したグラフ

定理 1 (c) のような有限連結単純グラフを **Cameron–Walker グラフ**と呼ぶことにする。例えば、図 1 のような２つのグラフは Cameron–Walker グラフである。

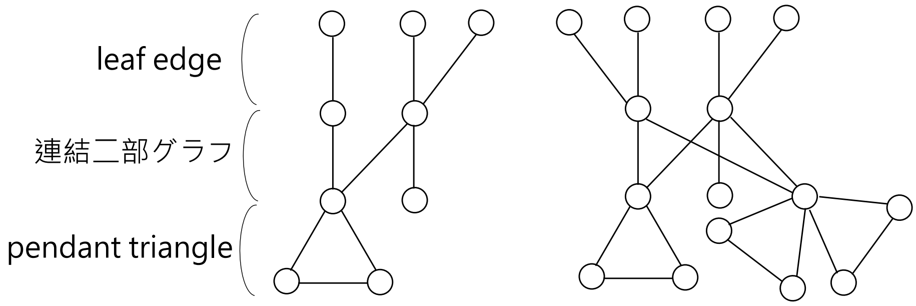

図 1: Cameron–Walker グラフ

不等式 (1) 及び定理 1 によって、Cameron–Walker グラフ G のエッジイデアルの regularity $\mathrm{reg}(S/I(G))$ はグラフ G の言葉で記述することができる。そこで本稿では、Cameron–Walker グラフ G のエッジイデアル $I(G)$ に関する他の可換環論的性質について議論する。具体的には、**Cohen–Macaulay 性**や **Gorenstein 性**、**射影次元**について議論する。

2 Cameron–Walker グラフの可換環論的性質

2.1 Cohen–Macaulay 性

まず、Cameron–Walker グラフの Cohen–Macaulay 性について議論する。

$T \subset V(G)$ が G の独立集合とは、任意の $i, j \in T$ に対し $\{i, j\} \notin E(G)$ となる集合のことである。$\Delta(G)$ を G の独立集合からなる単体的複体とする。このとき $S/I(G)$ は、単体的複体 $\Delta(G)$ に付随する Stanley–Reisner 環に一致する。よって、$S/I(G)$ の性質は $\Delta(G)$ の性質を大きく反映する。一般の単体的複体 Δ において、次が成立することが良く知られている。

- Δ は vertex decomposable $\Longrightarrow$ Δ は shellable $\Longrightarrow$ $K[\Delta]$ は sequentially Cohen–Macaulay

- Δ は pure shellable $\Longrightarrow$ $K[\Delta]$ は Cohen–Macaulay $\Longrightarrow$ $K[\Delta]$ は非混合的
- Δ は pure $\Longleftrightarrow$ $K[\Delta]$ は非混合的

ここで、次の定理を紹介する。

定理 2 G を頂点集合 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 上のグラフとし、$k_1, \ldots, k_n$ を２以上の整数とする。G' を G の各頂点 x_i に k_i 頂点完全グラフ K_{k_i} を付け加えたグラフとする。このとき、$\Delta(G')$ は pure かつ vertex decomposable である。

この定理は、[1, Theorem 3.3] を適用して証明することが出来る。

次の定理は、Cameron–Walker グラフの Cohen–Mavcaulay 性を与えるものである。

定理 3 G を Cameron–Walker グラフとする。このとき、次の５条件は同値である。

(i) $S/I(G)$ は非混合的

(ii) $S/I(G)$ は Cohen–Macaulay

(iii) $\Delta(G)$ は pure shellable

(iv) $\Delta(G)$ は pure vertex decomposable

(v) G は、$U \sqcup V$ 上の連結二部グラフに、U の各頂点に leaf edge を１つ付け、V の各頂点に pendant triangle を１つ付けたグラフである

定理 3 の証明の概要

一般のグラフにおいて、(iv) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (i) が成立する。さらに、(v) $\Longrightarrow$ (iv) は定理 2 から直接従う。ゆえに、(i) $\Longrightarrow$ (v) を示せばよい。

G が (v) を満たしていないとすると、極大な独立集合で濃度が違うものを構成することが出来る。これは、$\Delta(G)$ のファセットで次元が異なるものが存在することを示している。つまり、$\Delta(G)$ は pure でない。よって、$S/I(G)$ は非混合的でない。

2.2 Gorenstein 性

次に、Cameron–Walker グラフの Gorenstein 性について議論する。

定理 4 G を Cameron–Walker グラフとすると、$S/I(G)$ は Gorenstein **ではない**。

この定理 4 は、$S/I(G)$ が Cohen–Macaulay であるとき（つまり、G が定理 3 の (v) を満たしているとき）、$S/I(G)$ の Cohen–Macaulay type $\dim_K \operatorname{Ext}_S^n(K, S/I(G))$ が２以上であることを示せばよい。実際には、

$$\dim_K \operatorname{Ext}_S^n(K, S/I(G)) \geq 2^m$$

（ただし、m は G の pendant triangle の個数）を示すことが出来る。

2.3 sequentially Cohen–Macaulay 性

次に、Cameron–Walker グラフの sequentially Cohen–Macaulay 性について議論する。

定理 5 任意の Cameron–Walker グラフ G について、$\Delta(G)$ は vertex decomposable である。特に、$S/I(G)$ は sequentially Cohen–Macaulay である。

この定理の証明のために、次の定理を用いる。

定理 6 ([7, Theorem 1]) グラフ G が長さ 3 または長さ 5 の弦なしサイクルを持たないとする。このとき、$\Delta(G)$ は vertex decomposable である。

定理 5 の証明の概要

G を Cameron–Walker グラフとする。G を構成している二部グラフの頂点の分割を $U \sqcup V$ とし、U の各頂点に leaf edge があり、V の各頂点に pendant triangle を許すと仮定する。$|U|$ に関する帰納法で示す。

$|U| = 1$ のとき、G を構成している二部グラフはサイクルを含まない。よって、G には pendant triangle（長さ 3 のサイクル）以外のサイクルを含まないので、定理 6 より、$\Delta(G)$ は vertex decomposable である。

$|U| > 1$ のときも、vertex decomposable の定義および帰納法の仮定から、$\Delta(G)$ が vertex decomposable であることがわかる。

2.4 射影次元

最後に、Cameron–Walker グラフの射影次元 $\mathrm{pdim}(S/I(G))$ について紹介する。

グラフ G の頂点集合の部分集合 $A \subset V(G)$ に対し、$N_G(A) = \{v \in V(G) : \exists w \in A \text{ s.t. } \{v, w\} \in E(G)\}$ と定義する。さらに、$i(G) = \min\{|A| : A \subset V(G), A \cup N_G(A) = V(G)\}$ と定義する。

Cameron–Walker グラフ G について、定理 5 より、$S/I(G)$ は sequentially Cohen–Macaulay であるので、[2, Corollary 5.6, Remark 5.7] により、

$$\mathrm{pdim}(S/I(G)) = |V(G)| - i(G)$$

を得る。

最後に

ご覧の通り、本稿では、細かい定義や証明等の大部分を省いています。詳しくは、プレプリント [5] に書いてありますので、そちらをご覧ください。

参考文献

[1] D. Cook II and U. Nagel, Cohen–Macaulay graphs and face vectors of flag complexes, *SIAM J. Discrete Math.* **26** (2012), 89–101.

[2] H. Dao and J. Schweig, Projective dimension, graph domination parameters, and independence complex homology, *J. Combin. Theory Ser. A* **120** (2013), 453–469.

[3] H. T. Hà and A. Van Tuyl, Monomial ideals, edge ideals of hypergraphs, and their graded Betti numbers, *J. Algebraic Combin.* **27** (2008), 215–245.

[4] K. Cameron and T. Walker, The graphs with maximum induced matching and maximum matching the same size, *Discrete Math.* **299** (2005), 49–55.

[5] T. Hibi, A. Higashitani, K. Kimura and A. B. O'Keefe, Algebraic study on Cameron-Walker graphs, arXiv:1308.4765v2.

[6] M. Katzman, Characteristic-independence of Betti numbers of graph ideals, *J. Combin. Theory, Ser. A* **113** (2006), 435–454.

[7] R. Woodroofe, Vertex decomposable graphs and obstructions to shellability, *Proc. Amer. Math. Soc.* **137** (2009), 3235–3246.