道代数上の前射影傾加群のなす半順序集合について

大阪大学 情報科学研究科　加瀬遼一

本稿は第 19 回代数学若手研究会での講演をまとめたものである.

導入

本稿で主に扱う傾加群は Brenner-Butler によって定式化された加群で, 導来圏における森田型の同値を誘導する非常に重要な加群である. したがって与えられた有限次元代数において, 傾加群を分類することは一つの大きな問題である. この問題への一つのアプローチが Riedtmann-Schofield によって導入された傾変異の理論である. 傾変異は与えられた傾加群から別の傾加群を作る操作であるが, Happel-Unger によって基本的な傾加群 (の同型類) 上に定まるある半順序が傾変異と密接に関わっていることが示された. 以来この半順序集合の研究が盛んになされている.

目的

本稿では前射影的な傾加群がなす部分半順序集合と分配束と呼ばれる半順序集合のクラスの関係について得られた結果を紹介する. 有限分配束について以下の定理がよく知られている:

Theorem 0.1. (*Birkhoff's representation Theorem [3], [4]*) L を有限分配束とする. この時, ある有限半順序集合 P が存在して次の半順序同型が成立する.

$$L \simeq \mathcal{I}(P).$$

ここで $\mathcal{I}(P)$ は I のイデアルがなす半順序集合 $(\{I \text{ のイデアル }\}, \subset)$ である.

本稿ではまず前射影傾加群のなす半順序集合が無限分配束になる為の必要十分条件を与え, その場合に上の定理の類似が成り立つ事を述べる.

設定

本稿の設定は以下の通り.

1. Q:有限連結な非輪状クイバー.
2. Q_0: Q の頂点集合, $Q_1 : Q$ の辺集合.
3. kQ:代数閉体 k 上の Q の道代数.
4. mod-kQ:有限次元右 kQ-加群のなす圏.
5. τ, τ^{-}:Auslander-Reiten 移動

1 準備

$M \in \text{mod-}kQ$ とする. この時, M は一意的な直既約分解

$$M \simeq M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_r$$

を持つことが知られている (Krull-Schmidt). そこで M の非同型な直既約因子の個数を $|M|$ で表し, 各直既約因子が互いに非同型な時, M を基本的と呼ぶ.

1.1 前射影加群

ここでは前射影加群の定義を述べる.

Proposition 1.1. 次の 4 つの集合の間には (自然な) 1 対 1 対応が存在する.

(a) Q の頂点集合 Q_0

(b) 既約 kQ-加群の同型類

(c) 直既約射影 kQ-加群の同型類

(d) 直既約入射 kQ-加群の同型類

以下では頂点 $a \in Q_0$ に対応する直既約射影 kQ-加群を $P(a)$ で表す. この時, 前射影加群が次で定義される.

Definition 1.2. $M \in \text{mod-}kQ$ が前射影加群であるとはある非負整数 r が存在して $\tau^r M = 0$ となる時に言う.

Remark 1.3. 定義より $M \in \text{mod-}kQ$ が前射影加群である事と M の任意の直既約因子が $\tau^{-r}P(a)$ の形をしている事は同値である事に注意する.

Theorem 1.4. Q が Dynkin-クイバーでないとする. この時, 写像 $(r, a) \mapsto \tau^{-r}P(a)$ は 1 対 1 対応

$$\mathbb{Z}_{\geq 0} \times Q_0 \overset{1:1}{\leftrightarrow} \{\text{直既約前射影加群の同型類}\}$$

を誘導する. さらにこの対応によって mod kQ の Auslander-Reiten クイバーの前射影成分は translation クイバー $\mathbb{Z}_{\leq 0}Q^{\mathrm{op}}$ と自然に同型である.

以下 mod kQ の Auslander-Reiten クイバーの前射影成分を $\Gamma_{\mathrm{p}}(Q)$ と書く.

1.2 傾加群上の半順序

ここでは傾加群上の半順序を導入する. 詳しくは [5],[6] 等を参照してください. まず道代数上の傾加群が次で定義される.

Definition 1.5. kQ-加群 T が次の条件 (1),(2) を満たす時, T を傾加群と呼ぶ.
(1) $\mathrm{Ext}^1_{kQ}(T, T) = 0$.
(2) $|T| = \#Q_0$.

ここで $\mathcal{T}(Q) := \{kQ$ 上の基本的傾加群 (の同型類)$\}$ とする.

Proposition 1.6. $\mathcal{T}(Q)$ 上の関係 $\geq$ を次で定める*:*

$$T \geq T' \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \mathrm{Ext}^1_{kQ}(T, T') = 0.$$

この時, 関係 $\geq$ は $\mathcal{T}(Q)$ 上の半順序となる.

Example 1.7. $Q = 1 \to 2 \to 3$ とする. この時, $\mathcal{T}_{\mathrm{p}}(Q)$ は以下で与えられる:

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\begin{array}{l} k \to k \to k \\ 0 \to k \to k \\ 0 \to 0 \to k \end{array}} \arrow[dl] \arrow[ddr] & \\
\boxed{\begin{array}{l} k \to k \to k \\ 0 \to k \to k \\ 0 \to k \to 0 \end{array}} \arrow[dd] & & \\
 & & \boxed{\begin{array}{l} k \to k \to k \\ k \to 0 \to 0 \\ 0 \to 0 \to k \end{array}} \arrow[ddl] \\
\boxed{\begin{array}{l} k \to k \to k \\ k \to k \to 0 \\ 0 \to k \to 0 \end{array}} \arrow[dr] & & \\
 & \boxed{\begin{array}{l} k \to k \to k \\ k \to k \to 0 \\ k \to 0 \to 0 \end{array}} &
\end{tikzcd}$$

1.3 分配束

Definition 1.8. P を半順序集合とする.
(1) P が束であるとは, 任意の 2 つの元 x, y に対して, それらの共通上界の最小元 $(x \vee y)$ 及び共通下界の最大元 $(x \wedge y)$ が存在する時に言う.
(2) P が分配束とは任意の 3 つの元 x, y, z に対して, 次が成り立つ時に言う.

$$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z).$$

半順序集合 P の部分集合 I が順序に関して下に閉じている時, I をイデアルと呼ぶ. 本稿では $\mathcal{I}(P)$ で P のイデアル全体が包含関係に関してなす半順序集合を表す事にする.

2 主結果

この節では本稿の主結果を述べる. $\mathcal{T}_{\mathrm{p}}(Q) := \{T \in \mathcal{T}(Q) \mid T :$ 前射影加群 $\}$ 上に $\mathcal{T}(Q)$ から定まる半順序を入れ, 以下では $\mathcal{T}_{\mathrm{p}}(Q)$ を半順序集合とみなす.

Theorem 2.1. $\mathcal{T}_{\mathrm{p}}(Q)$ が無限分配束になる事と, Q が次の条件 (C) を満たす事は同値.

(C)　任意の Q の頂点が少なくとも 2 本の辺と接する.

以下では Q は条件 (C) を満たすとする. 特に Q は Dynkin-クイバーではない事に注意する.

Definition 2.2. 半順序集合 $P(Q)$ を以下で定める:
- 集合として $P(Q) = \Gamma_{\mathrm{p}}(Q)_0$.
- $X > Y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} X$ から Y にパスが存在する.

この時, 無限分配束 $\mathcal{T}_{\mathrm{p}}(Q)$ に関して Birkhoff の表現定理の類似が次で得られる.

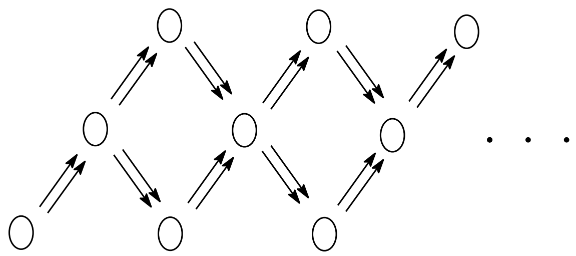
Theorem 2.3. Q は条件 (C) を満たすとする. この時, 次の半順序同型が成り立つ.

$$\mathcal{T}_{\mathrm{p}}(Q) \simeq \mathcal{I}(P(Q)) \setminus \{\emptyset\}$$

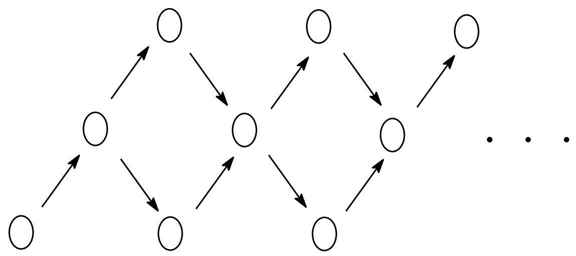
Example 2.4. Q を次のクイバーとする:

$$Q: \quad 0 \rightrightarrows 1 \rightrightarrows 2$$

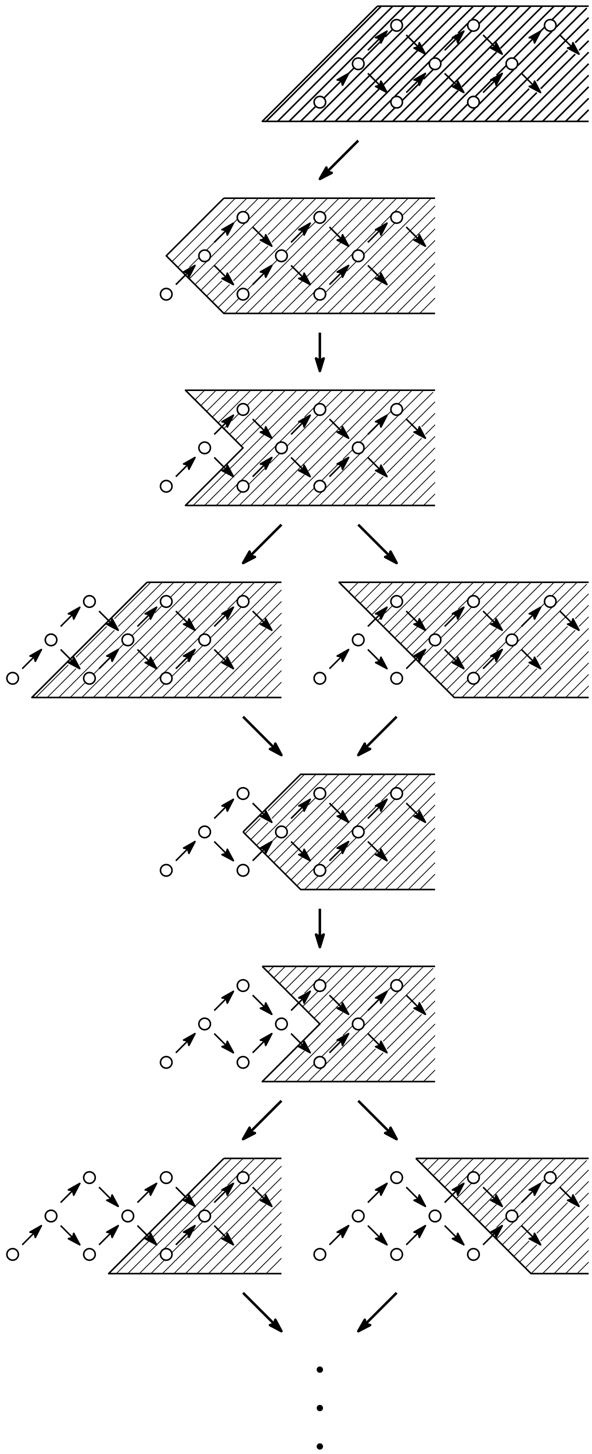
この時, $\Gamma_{\mathrm{p}}(Q)$ は次のようになる:



したがって $\mathcal{P}(Q)$ の Hasse-クイバーは次で与えられる:



以上より $\mathcal{T}_{\mathrm{p}}(Q) \simeq \mathcal{I}(P(Q)) \setminus \{\emptyset\}$ は以下で与えられることがわかる.



参考文献

[1] M. Auslander, I. Reiten and S. Smalø, Representation theory of artin algebras, Cambridge University Press, 1995.

[2] I. Assem, D. Simson and A. Skowroński, Elements of the representation theory of associative algebras Vol. **1**, London Mathematical Society Student Texts **65**, Cambridge University Press, 2006.

[3] G. Birkhoff, Lattice Theory, 3rd ed. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1967.

[4] G. Gratzer, Lattice Theory: First Concepts and Distributive Lattices, San Francisco, CA: W. H. Freeman, 1971.

[5] D. Happel and L. Unger, On a partial order of tilting modules, Algebr. Represent. Theory **8** (2005), no.2, 147-156.

[6] C. Riedtmann and A. Schofield, On a simplicial complex associated with tilting modules, Comment. Math. Helv **66** (1991), no.1, 70-78.