擬スキーモイドとBaues–Wirschingコホモロジーについて

百瀬　康弘　(信州大学大学院 総合工学系研究科)*

1. 導入

本研究は沼田泰英氏 (信州大学) との共同研究に基づく結果である.

アソシエーションスキームはBose–Shimamoto [2] によって統計の実験計画法の中で導入された概念である. 現在では代数的組合せ論において重要な研究対象となっている. 一方, Kuribayashi–Matsuo [3] は, アソシエーションスキームを小圏の視点から一般化した (擬) スキーモイドという概念を与えた. 擬スキーモイドは, 小圏 $\mathcal{C}$ と射全体の集合の分割 S の組 $(\mathcal{C}, S)$ で与えられる. また, アソシエーションスキームから隣接代数と呼ばれる代数が得られるが, その対応物として擬スキーモイドに対してはスキーモイド代数と呼ばれる体 k 上の代数 $k(\mathcal{C}, S)$ が得られる. 我々は特に, 小圏のコホモロジー論を用いて $k(\mathcal{C}, S)$ 上の加群を調べることによりスキーモイドの構造を研究することに重点を置く. そのために我々は, Baues–Wirsching コホモロジーと呼ばれる小圏のコホモロジーを用いて $k(\mathcal{C}, S)$ 上の加群 M を評価する量となるスキーモイドコホモロジー $\mathrm{H}^n((\mathcal{C}, S); M)$ を与えた. Baues–Wirsching コホモロジーとは, ある関手 D を係数に持つ小圏のコホモロジー $\mathrm{H}^n_{BW}(\mathcal{C}, D)$ でありBaues–Wirsching [1] によって導入された. スキーモイドコホモロジーは, $k(\mathcal{C}, S)$ 上の加群の間の同値関係である "d-同値" に対する不変量となっている. この d-同値によりスキーモイド代数上の加群を分類するために $\mathrm{H}^n((\mathcal{C}, S); M)$ の計算は重要である.

スキーモイドコホモロジーを計算する為にはBaues–Wirsching コホモロジーを計算する必要があるが一般の小圏に対して Baues–Wirsching コホモロジーを計算することは難しい. そこで, 我々は計算で扱う小圏 $\mathcal{C}$ として B_2-自由な順序集合から得られるものを考える. ここで, B_2-自由な順序集合とは 2 次のブール束と同一視できる部分順序集合を持たない順序集合のことである. このとき Baues–Wirsching コホモロジーには次の事実がある.

- 関手 $F : \mathcal{C} \to k\text{-Mod}$ に対して, $\mathrm{H}^0_{BW}(\mathcal{C}, F \circ t) \cong \lim_{\mathcal{C}} F$ となる. 但し, t はターゲット関手と呼ばれる関手である.
- 任意の $n \geq 2$ と係数 D に対して, $\mathrm{H}^n_{BW}(\mathcal{C}, D) = 0$ となる.

よって, この $\mathcal{C}$ に対してはあと 1 次のコホモロジーを計算すれば良いことになる.

また, スキーモイドコホモロジーに適用するために圏代数 $k\mathcal{C}$ 上の加群 N に対して得られる関手 $\pi_{\mathcal{C}}(N) : \mathcal{C} \to k\text{-Mod}$ を用いた係数を考えた. ここで $\pi_{\mathcal{C}}$ とは, Mitchell 対応と呼ばれる $k\mathcal{C}$-加群の圏 $k\mathcal{C}$-Mod から関手圏 $k\text{-Mod}^{\mathcal{C}}$ への関手であり, $\mathcal{C}$ の対象が有限のとき $\pi_{\mathcal{C}}$ は圏の同値を与える. つまり, 左 $k\mathcal{C}$-加群を考えることと $\mathcal{C}$ から k-Mod への関手を考えることは等価であるといえる.

本稿では, 擬スキーモイドの構成法と $\mathrm{H}^1_{BW}(\mathcal{C}, \pi_{\mathcal{C}}(N) \circ t)$ の計算方法及びその応用について述べる.

* e-mail: momose@math.shinshu-u.ac.jp

2. 擬スキーモイド

ここでは, [3] に従って擬スキーモイドを定義し, 擬スキーモイドのある構成法を述べる. また, スキーモイドコホモロジー及び d-同値を導入する.

定義 1. 小圏 $\mathcal{C}$ と射全体の集合の分割 S との組 $(\mathcal{C}, S)$ が擬スキーモイドとは, S の元 σ, τ, μ と μ の元 f, g に対して集合として $P^f_{\sigma\tau} \cong P^g_{\sigma\tau}$ となるときをいう. 但し, S の元 σ, τ と $\mathcal{C}$ の射 f に対して $P^f_{\sigma\tau} = \{ (u, v) \in \sigma \times \tau \mid u \circ v = f \}$ である.

擬スキーモイドは以下のように構成出来る. G を群, $\mathcal{C}$ を小圏とする. 群 G は対象が 1 点 $*$ で, 射が G の元である小圏と同一視することが出来る. このとき, $\mathcal{C}$ が G-圏とは, $F(*) = \mathcal{C}$ となるような G から小圏の圏 Cat への関手 F が存在するときにいう. この F によって G の $\mathcal{C}$ への左作用が定まる. G-圏は軌道全体との組によって擬スキーモイドとなる.

命題 2. $\mathcal{C}$ の射 u に対して Gu を u の G-軌道, $\mathrm{mor}(\mathcal{C})/G = \{Gu \mid u \in \mathrm{mor}(\mathcal{C})\}$ とする. このとき, $(\mathcal{C},\ \mathrm{mor}(\mathcal{C})/G)$ は擬スキーモイドである.

以下では擬スキーモイドの構造を調べる為にスキーモイドコホモロジーを導入する. また, 小圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}$ 上の natural system D に対して, $\mathrm{H}^n_{BW}(\mathcal{C}, D)$ は n 次 Baues–Wirsching コホモロジーを表すものとする. Baues–Wirsching コホモロジーと natural system についての定義は [1] または第 18 回代数学若手研究会の私の報告書を参照して頂きたい.

k を体, $\mathcal{C}$ を小圏とする. k-ベクトル空間として $k\langle \mathrm{mor}(\mathcal{C}) \rangle$ であり積を次で定めたものを圏代数と呼び $k\mathcal{C}$ とかく.

$$f,\ g \in \mathrm{mor}(\mathcal{C}) \text{ に対して } f * g = \begin{cases} f \circ g & s(f) = t(g) \\ 0 & s(f) \neq t(g) \end{cases}.$$

$(\mathcal{C}, S)$ を擬スキーモイドとする. $\sigma \in S$ に対して, $\bar{\sigma} = \displaystyle\sum_{s \in \sigma} s$ と $k\mathcal{C}$ の元を定めたとき, $\{\bar{\sigma} | \sigma \in S\}$ によって生成される代数をスキーモイド代数と呼び $k(\mathcal{C}, S)$ とかく.

M を左 $k(\mathcal{C}, S)$-加群とする.

定義 3. D_M を関手 $\pi_{\mathcal{C}}(k\mathcal{C} \otimes_{k(\mathcal{C},S)} M) : \mathcal{C} \to k\text{-Mod}$ で定義する. 但し, $\pi_{\mathcal{C}}$ は Mitchell 対応と呼ばれる $k\mathcal{C}$-加群の圏 $k\mathcal{C}$-Mod から関手圏 $k\text{-Mod}^{\mathcal{C}}$ への関手である.

関手 D_M は M によるある種の $(\mathcal{C}, S)$ の表現を考えることに相当する.

定義 4. スキーモイドコホモロジー $\mathrm{H}^n((\mathcal{C}, S); M)$ を $\mathrm{H}^n((\mathcal{C}, S); M) = \mathrm{H}^n_{BW}(\mathcal{C}, D_M \circ t)$ と定義する. 但し, t はターゲット関手と呼ばれる関手である.

$(\mathcal{C}, S)$ と $(\mathcal{E}, H)$ を擬スキーモイド, M を左 $k(\mathcal{C}, S)$-加群, N を左 $k(\mathcal{E}, H)$-加群とする. スキーモイドコホモロジーは次で与えられる同値関係の不変量であることが命題 6 から従う.

定義 5. M と N が d-同値とは, $D_M \circ F$ と D_N が関手圏の導来圏 $\mathrm{D}(k\text{-}\mathrm{Mod}^{\mathcal{E}})$ で同型となるような同値 $F : (\mathcal{E}, H) \to (\mathcal{C}, S)$ が存在するときをいう.

命題 6. M と N が d-同値ならば任意の $n \geq 0$ に対して $\mathrm{H}^n((\mathcal{C}, S); M) \cong \mathrm{H}^n((\mathcal{E}, H); N)$.

この d-同値によりスキーモイド代数上の加群を分類するためにスキーモイドコホモロジーの計算, つまり Baues–Wirsching コホモロジーの計算は重要である.

3. 定義

ここでは, 主定理を述べるのに必要な定義をする. 以下, P を順序集合とする.

定義 7. $\mathcal{C}$ が P から誘導された小圏とは, $\mathrm{ob}(\mathcal{C}) = P$ かつ, $\mathrm{mor}(\mathcal{C}) = \left\{ \alpha_y^x : x \to y \,\middle|\, x \leq y \right\}$ であるときにいう.

$x \leq y$ となる P の元 x, y に対して, $x < z < y$ となる元 z が存在しないとき y は x を覆うといい $x \dot{<} y$ とかく.

定義 8. 頂点集合が P であり, 矢集合が $\{\, x \to y \,|\, x \dot{<} y \,\}$ であるクイバーを P のハッセ図といい H_P とかく.

P の元の 4 つ組 $(a; b, b'; c)$ が B_2-部分集合とは, b と b' が比較不能で $a < b < c$ かつ $a < b' < c$ を満たすときをいう.

定義 9. P が B_2-部分集合を持たないとき P を B_2-自由な順序集合という.

4. 主定理

以下で, 有限で B_2-自由な順序集合から誘導された小圏に対する 1 次の Baues–Wirsching コホモロジーの計算について述べる.

P を有限で B_2-自由な順序集合, $\mathcal{C}$ を P から誘導された小圏とする. P を

$$\begin{aligned} \check{P} &= \{\, a \in P \,|\, b < a \text{ となる } b \in P \text{ が存在する} \,\}, \\ \hat{P} &= P \setminus \check{P} \end{aligned}$$

と分解する. $\check{P}$ の元 a に対して, $t(f) = a$ となる H_P の矢 f_a を 1 つ固定する. H_P を $\check{Q} = \left\{ f_a \,\middle|\, a \in \check{P} \right\}$, $\hat{Q} = H_P \setminus \check{Q}$ と分解する. $x, y \in P$ に対して, $k\mathcal{C}$ の元 $p_{y,x}$ を $\check{Q}$ の中の x から y への道とし, $x = y$ なら $p_{y,x} = \mathrm{id}_x$, 道がなければ $p_{y,x} = 0$ とする. $\check{P}$ の元 a に対して, $\check{v}_a \in \bigoplus_{f_{a'} \in \check{Q}} k\mathcal{C}$ と $\hat{v}_a \in \bigoplus_{g \in \hat{Q}} k\mathcal{C}$ を

$$\check{v}_a(f_{a'}) = \begin{cases} \mathrm{id}_a & (a = a') \\ 0 & (a \neq a') \end{cases}, \qquad \hat{v}_a(g) = p_{t(g),a} - g p_{s(g),a}$$

とする. $\hat{P}$ の元 b に対して, $\check{w}_b \in \bigoplus_{f_{a'} \in \check{Q}} k\mathcal{C}$ と $\hat{w}_b \in \bigoplus_{g \in \hat{Q}} k\mathcal{C}$ を

$$\check{w}_b(f_{a'}) = 0, \qquad \hat{w}_b(g) = p_{t(g),b} - g p_{s(g),b}$$

とする. $\check{P}$ の元 a に対して $v_a = \check{v}_a \oplus \hat{v}_a$ とし, $\hat{P}$ の元 b に対して $w_b = \check{w}_b \oplus \hat{w}_b$ とする. 左 $k\mathcal{C}$-加群 N に対して V を k-ベクトル空間 $\left\langle v_a n_a, w_b n_b \,\middle|\, a \in \check{P}, b \in \hat{P}, n_a \in \mathrm{id}_a \cdot N, n_b \in \mathrm{id}_b \cdot N \right\rangle$ で定義する.

定理 10. $\tilde{D} = \pi_{\mathcal{C}}(N) \circ t$ とする. このとき, k-ベクトル空間として

$$\mathrm{H}^1_{BW}(\mathcal{C}, \tilde{D}) \cong \Big(\bigoplus_{\alpha \in H_P} \tilde{D}_\alpha \Big) / V.$$

5. 応用

$\mathcal{C}$ として以下の小圏を考える.

$$\begin{tikzcd}
(0,1) & (1,1) \arrow[l] \arrow[dl] & (2,1) \arrow[l] \arrow[dl] \\
(0,0) & (1,0) \arrow[l] \arrow[ul] & (2,0) \arrow[l] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

ここで, $\{\,(0,0),(0,1)\,\}$, $\{\,(1,0),(1,1)\,\}$, $\{\,(2,0),(2,1)\,\}$ それぞれに $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の作用が定まるので $\mathcal{C}$ は $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$-圏である. よって, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ の部分群 G に対して $\mathcal{C}$ は G-圏である. $(\mathcal{C}, S_G)$ を G-圏 $\mathcal{C}$ に対して命題 2 から得られる擬スキーモイドとする.

ここでは, $k\mathcal{C}$ を左 $k(\mathcal{C}, S_G)$-加群と思いスキーモイドコホモロジー $\mathrm{H}^n((\mathcal{C}, S_G); k\mathcal{C})$ を計算する. $\mathcal{C}$ は B_2-自由な順序集合ではないので主定理は使えない. この問題に対して我々は Mayer–Vietoris スペクトル系列を用いた. Mayer–Vietoris スペクトル系列とは小圏の可算な被覆に対して構成されるスペクトル系列であり, 被覆の各成分の小圏に対して Baues–Wirsching コホモロジーが計算出来ればもとの小圏に対する Baues–Wirsching コホモロジーが計算出来るものである. 実際に, $\mathcal{C}$ に対して被覆を以下のように取れる.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_1 & & (1,1) \arrow[dl] & (2,1) \arrow[l] \arrow[dl] \\
& (0,0) & (1,0) \arrow[l] & (2,0) \arrow[l] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_2 & (0,1) & (1,1) \arrow[l] & (2,1) \arrow[l] \arrow[dl] \\
& & (1,0) \arrow[ul] & (2,0) \arrow[l] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

そして, $\mathcal{C}_1$ と $\mathcal{C}_2$ の共通部分は B_2-自由な順序集合から誘導された小圏となり主定理を適用出来る.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 & (1,1) & (2,1) \arrow[l] \arrow[dl] \\
& (1,0) & (2,0) \arrow[l] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

さらに, $\mathcal{C}_1$ と $\mathcal{C}_2$ に対して被覆を取ることによって帰納的にコホモロジーを計算すると以下の結果を得る.

$$\begin{aligned}
N_G &= k\mathcal{C} \otimes_{k(\mathcal{C}, S_G)} k\mathcal{C}, \\
A_{0,j} &= \left(\mathrm{id}_{(0,j)} \cdot N_G\right) / \left(\alpha^{(1,0)}_{(0,j)} \cdot N_G + \alpha^{(1,1)}_{(0,j)} \cdot N_G\right), \\
B &= \left(\mathrm{id}_{(1,0)} \cdot N_G \oplus \mathrm{id}_{(1,1)} \cdot N_G\right) \Big/ \left((\alpha^{(2,0)}_{(1,0)}, \alpha^{(2,0)}_{(1,1)}) \cdot N_G + (\alpha^{(2,1)}_{(1,0)}, \alpha^{(2,1)}_{(1,1)}) \cdot N_G\right)
\end{aligned}$$

とすると,

$$\mathrm{H}^n((\mathcal{C}, S_G); k\mathcal{C}) \cong \begin{cases} A_{0,0} \bigoplus A_{0,1} \bigoplus B & , \ n = 2 \\ 0 & , \ \mathit{otherwise} \end{cases}.$$

この結果に基づき, 4 つの部分群に対して以下が得られた. $G_0 := 0,\ G_1 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times 0 \times 0,\ G_2 := 0 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times 0,\ G_3 := 0 \times 0 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とする.

- $G = G_0$ のとき, $\dim_k A_{0,0} = \dim_k A_{0,1} = 1,\ \dim_k B = 4.$
- $G = G_1$ のとき, $\dim_k A_{0,0} = \dim_k A_{0,1} = 6,\ \dim_k B = 4.$

- $G = G_2$ のとき, $\dim_k A_{0,0} = \dim_k A_{0,1} = 1,\ \dim_k B = 10$.
- $G = G_3$ のとき, $\dim_k A_{0,0} = \dim_k A_{0,1} = 1,\ \dim_k B = 6$.

以上から, いずれの左 $k(\mathcal{C}, S_{G_i})$-加群としての $k\mathcal{C}$ も d-同値でないことが示せ, スキーモイドの構造の違いを見ることが出来た.

参考文献

[1] Hans Joachim Baues and Günther Wirsching. Cohomology of small categories. *J. Pure Appl. Algebra*, 38(2-3):187–211, 1985.

[2] R. C. Bose and T. Shimamoto. Classification and analysis of partially balanced incomplete block designs with two associate classes. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 47:151–184, 1952.

[3] K. Kuribayashi and K. Matsuo. Association schemoids and their categories. to appear in Applied Categorical Structures, preprint (2013). arXiv:1304.6883 math. CT.