FFRTの局所環の基本類について

大田康介

明治大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻

本稿は第１９回代数学若手研究会において発表した内容をまとめたものである。

1 はじめに

以下では、環は可環なものだけを扱う。

R をネーター局所環とする。$M \neq (0)$ を有限生成 R-加群とする。

$$\operatorname{depth} M = \dim R$$

を満たすような R-加群 M を極大コーエン・マコーレー R-加群と呼ぶ。または、省略して単に MCM と呼ぶ。極大コーエン・マコーレー加群は、古くから可換環論における重要な研究テーマである。極大コーエン・マコーレー加群に関する詳しい内容は [20] を参照。

次の予想 1.1 が正しければ、Serre の positivity 予想などの様々な局所環論の未解決問題が肯定的に解決されることが知られている。Serre の positivity 予想については後述する。しかし、予想 1.1 が無条件に正しいと信じている人は少ないようである。この予想 1.1 を small Mac 予想と呼ぶ。

予想 1.1 (small Mac 予想) 任意の完備ネーター局所環 R に対して、極大コーエン・マコーレー R-加群が存在する。

ホモロジカル予想の中には、次のようなヒエラルキーがある。

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{samll Mac 予想} & \Longrightarrow & \text{big Mac 予想} & \Longrightarrow & \text{直和因子予想} & \Longrightarrow & \text{シジジー予想}\\
\Downarrow & & & & \Updownarrow & & \\
\text{Serre の重複度予想} & & & & \text{単項式予想} & & \\
 & & & & \Downarrow & & \\
 & & & & \text{新交叉予想 (定理)} & &
\end{array}$$

歴史的には、Serre の重複度予想を解決するために、ほかの様々な予想が提起された。各予想を説明しよう。

予想 1.2 (big Mac 予想) R をネーター局所環とする。R の任意のパラメータ系に対して、それを M-正則列とするような R-加群 M が存在する。このような R-加群 M を big Mac 加群と呼ぶ。

予想 1.3 (直和因子予想) R をネーター環とする。S を正則局所環で単射な finite 射 $S \to R$ が存在すると仮定する。このとき、S は S-加群としての R の直和因子である。

予想 1.4 (単項式予想) R をネーター局所環とし、$x_1, \ldots, x_d$ をパラメータ系とする。このとき、任意の正整数 $t > 0$ に対して $x_1^{t-1} \cdots x_d^{t-1} \notin (x_1^t, \ldots, x_d^t)R$ である。

予想 1.5 (シジジー予想) R をネーター局所環とする。K_{i-1} をある有限生成 R-加群の i 次シジジーで自由加群でない (特に 0 でない) 有限生成 R-加群とする。このとき、

$$i \leq \mathrm{rank}_R K_{i-1}$$

である。

予想 1.6 (新交叉予想) R をネーター局所環とする。

$$\mathbb{F}_{\bullet} : 0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \to 0$$

を有限生成自由 R-加群からなる完全列でない鎖複体とする。任意の i に対して、$\ell_R\bigl(H_i(\mathbb{F}_{\bullet})\bigr) < \infty$ とする。このとき、

$$\dim R \leq n$$

が成り立つ。

1974 年、Hochster が体を含む場合には big Mac 予想が正しいことを証明した [9]。シジジー予想は、Evans-Griffiths によって 1981 年に R が体を含む場合には肯定的に証明されている [3]。Hochster は、1983 年には、big Mac 予想が正しければ直和因子予想が正しいことを、直和因子予想が正しければシジジー予想が正しいことを、また、直和因子予想と単項式予想がそれぞれ同値であることを証明し、さらに体を含むネーター局所環に対しては直和因子予想と単項式予想が正しいことを証明した。同年には、後藤四郎によって Buchsbaum 環に対して単項式予想が正しいことが証明されている [6]。1987 年、Roberts は任意のネーター局所環に対して新交叉予想を証明し [16]、これは現在では新交叉定理と呼ばれている。1992 年には、Hochster と Huneke は標数が素数の局所環に対して big Mac 加群を具体的に構成している [8]。そして、2002 年には Heitmann が 3 次元のネーター局所環に対して直和因子予想が正しいことを証明した [7]。この Heitmann の証明を用いて、2002 年に、Hochster はクルル次元が 3 以下のネーター局所環において big Mac 予想が正しいことを証明している [10]。

次の予想 1.7 は Serre の重複度予想と呼ばれ、Serre によって 1965 年に提起された。前記した Serre の positivity 予想は予想 1.7(3) である。

予想 1.7 R を正則局所環とする。M, N は有限生成 R-加群であって

$$0 < \ell_R(M \otimes_R N) < \infty$$

なるものとする。また、

$$\chi_R(M, N) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i \ell_R\bigl(\mathrm{Tor}_i^R(M, N)\bigr) \in \mathbb{Z}$$

と定める。このとき、次の (1), (2), (3) が成り立つ。

(1) $\dim M + \dim N \leq \dim R$

(2) $\dim M + \dim N < \dim R$ ならば $\chi_R(M, N) = 0$ である。

(3) $\dim M + \dim N = \dim R$ ならば $\chi_R(M, N) > 0$ である。

予想 1.7(1) は Serre [17] が 1965 年に証明した。また同時に、Serre は (2) と (3) を R が体を含む場合には正しいことを示している。(2) は、1985 年に、Roberts [15] と Gillet-Soulé [5] によって独立に証明された。(3) は今もなお未解決問題となっている。1995 年に Gabber は (3) において左辺が非負であることを証明した [1]。前述の通り、small Mac 予想が正しければ、以上のような未解決の予想が肯定的に解決される。

ここで、次の予想を考えたい。$\overline{\mu_R}$ は定義 2.11 で定義する。$\overline{\mu_R}$ を環 R の基本類という。

予想 1.8 R を優秀正則局所環の準同型像とする。このとき、$\overline{G_0(R)_\mathbb{R}}$ の中で、$\overline{\mu_R} \in C_{CM}(R)$ である。

以下で説明するが、基本類 $\overline{\mu_R}$ はホモロジカル予想と深い関係がある [14]。予想 1.8 を FC 予想と呼ぶ。FC 予想は R が完全交叉環であれば正しいことが知られている [4]。しかしながら、R が体を含むゴーレンシュタイン環あるいはコーエン・マコーレー環という良い環であってさえも未解決である。FC 予想が正しければ $C_{CM}(R)$ が空集合ではないので、外面的に見れば FC 予想は small Mac 予想よりも強いように思える。しかし、実はこれらはほぼ同値である。つまり、FC 予想における環のカテゴリーを、あるいは small Mac 予想における環のカテゴリーをうまく調整すれば同値性が証明される [12]。一方、定義 2.7 で、$C_{CM}(R)$ より大きな strictly nef cone $SN(R)$ が定義される（正確には、$SN(R) \cup \{0\} \supset C_{CM}(R)$ である）。Roberts は、R が体を含む場合に $\overline{\mu_R} \in SN(R)$ を示すことによって、（混合標数の場合を含めて）新交叉予想を肯定的に示した。R が体を含むとは限らない混合標数の場合に $\overline{\mu_R} \in SN(R)$ となるかどうかは知られていないが、これが正しければ、Serre の重複度予想の一部が解ける（M または N がコーエン・マコーレー加群のとき）。このように、基本類 $\overline{\mu_R}$ はホモロジカル予想と濃い結び付きがあることが分かる。R がコーエン・マコーレーでないときには、$[R] \notin SN(R)$ となる例もあるので、$\overline{\mu_R}$ は $[R]$ より性質が良いと考えることもできる。

今回紹介するものは、FC 予想が成り立つ環の例、つまり、次の定理である。

定理 1.9 $(R, \mathfrak{m})$ を、d 次元 F-finite コーエン・マコーレー局所整域で、剰余体 $R/\mathfrak{m}$ が完全体なるものとする。このとき、R が FFRT ならば、

$$\mu_R \in C'_{CM}(R)$$

である。特に、$G_0(R)_\mathbb{Q}$ の中で $[N] = \mathrm{rank}_R N \cdot \mu_R$ を満たすような極大コーエン・マコーレー R-加群 $N \neq 0$ が存在する。

2 準備

それでは、Grothendieck 群、Cohen-Macaulay cone、strictly nef cone、環の基本類、F-finite、$F^e_* R$ の定義をする。

N を $\mathbb{Z}$-加群で、K を $\mathbb{Q}$ または $\mathbb{R}$ であるとする。このとき、$N_K := N \otimes_\mathbb{Z} K$ と定める。

定義 2.1 R をネーター環とし、$\mathcal{M}_R$ を有限生成 R-加群のカテゴリーとするとき、

$$G_0(R) := \frac{\displaystyle\bigoplus_{M \in \mathcal{M}_R} \mathbb{Z}[M]}{\big\langle [M_2] - [M_1] - [M_3] \,\big|\, 0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0 \text{ は } \mathcal{M}_R \text{内の完全列} \big\rangle}$$

を有限生成 R-加群の Grothendieck 群という。ただし、$\displaystyle\bigoplus_{M \in \mathcal{M}_R} \mathbb{Z}[M]$ は

$$\{ \, [M] \,|\, M \in \mathcal{M}_R \, \}$$

を基底とする自由アーベル群である。

以下、$(R, \mathfrak{m})$ はネーター局所環とする。

定義 2.2

$$C(R) := \left\{ \mathbb{F}. \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{任意の } \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} R - \{\mathfrak{m}\} \text{ に対して } (\mathbb{F}.)_{\mathfrak{p}} \text{ が完全列であるような} \\ \text{有限生成自由 } R\text{-加群の bounded complex} \end{array} \right\}$$

とおく。$C(R)$ の部分カテゴリー $C_d(R)$ を次で定義する。

$$C_d(R) := \{ \, \mathbb{F}. \in C(R) \mid \mathbb{F}. \text{ は長さ } d \text{ で完全列でない} \, \}$$

定義 2.3 $\mathbb{F}. \in C(R)$ に対して、射

$$\begin{array}{cccc} \chi_{\mathbb{F}.}: & G_0(R) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & \cup & & \cup \\ & [M] & \longmapsto & \displaystyle\sum_i (-1)^i \ell_R\big(H_i(\mathbb{F}. \otimes_R M)\big) \end{array}$$

が得られ、これを用いて

$$\overline{G_0(R)} := \frac{G_0(R)}{\{ \, \alpha \in G_0(R) \mid \text{任意の } \mathbb{F}. \in C(R) \text{ に対して} \chi_{\mathbb{F}.}(\alpha) = 0 \, \}}$$

と定義する。上の右辺の分母に入る元 $\alpha \in G_0(R)$ は、0 に数値的同値と呼ばれる。$\overline{G_0(R)}$ は、数値的同値で割った Grothendieck 群と呼ばれる。

注意 2.4 $\overline{G_0(R)}$ は、0 でない有限生成自由 $\mathbb{Z}$-加群である [13]。

例 2.5 R を次元 2 以下のネーター局所整域とする。このとき、$\overline{G_0(R)} \simeq \mathbb{Z}$ である [13]。

定義 2.6 R の Cohen-Macaulay cone は、

$$C_{CM}(R) := \sum_{M:\mathrm{MCM}\, R\text{-加群}} \mathbb{R}_{\geq 0}[M] \subset \overline{G_0(R)}_{\mathbb{R}}$$

で定義される。

定義 2.7 R の strictly nef cone は、

$$SN(R) := \left\{ \alpha \in \overline{G_0(R)}_{\mathbb{R}} \;\middle|\; 任意の\ \mathbb{F}. \in C(R)\ に対して \chi_{\mathbb{F}.}(\alpha) > 0 \right\}$$

で定義される。

注意 2.8 $C_{CM}(R) \subset SN(R) \cup \{ 0 \}$ である。

定義 2.9 R を d 次元ネーター局所環とするとき、

$$A_i(R) := \frac{\displaystyle\bigoplus_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} R \\ \dim R/\mathfrak{p} = i}} \mathbb{Z}[\mathrm{Spec} R/\mathfrak{p}]}{\left\langle \mathrm{div}_{\mathfrak{q}}(x) \;\middle|\; \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec} R,\ \dim R/\mathfrak{q} = i+1,\ x \in R - \mathfrak{q} \right\rangle}$$

を R の i 次の Chow 群という。ただし、$\displaystyle\bigoplus_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} R \\ \dim R/\mathfrak{p} = i}} \mathbb{Z}[\mathrm{Spec} R/\mathfrak{p}]$ は

$$\left\{ [\mathrm{Spec} R/\mathfrak{p}] \;\middle|\; \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} R,\ \dim R/\mathfrak{p} = i \right\}$$

を基底とする自由アーベル群であり、

$$\mathrm{div}_{\mathfrak{q}}(x) := \sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}_R(R/(\mathfrak{q}, x))} \ell_{R_{\mathfrak{p}}}\left(R_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{q}, x)R_{\mathfrak{p}}\right) [\mathrm{Spec} R/\mathfrak{p}]$$

とする。R の Chow 群は

$$A_*(R) := \bigoplus_{i=0}^{d} A_i(R)$$

で定義される。

特異リーマン・ロッホ理論によって、次の定理が得られる。

定理 2.10 (Baum-Fulton-MacPherson[4]) R をネーター局所環とする。このとき、自然な $\mathbb{Q}$-ベクトル空間の同型写像

$$\tau_R : G_0(R)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} A_*(R)_{\mathbb{Q}}$$

が存在する。

定義 2.11 R をネーター局所整域とする。

$$\mu_R := \tau_R^{-1}([\mathrm{Spec} R]) \in G_0(R)_{\mathbb{Q}}$$

と定める。R の基本類 (fundamental class) は、

$$\overline{\mu_R} := \tau_R^{-1}\big([\mathrm{Spec} R]\big) \in \overline{G_0(R)}_{\mathbb{Q}}$$

で定義される。

注意 2.12 幾何的には、μ_R は次のような意味がある。R は $\mathbb{C}$ 上有限生成な d 次元整域とする。$X = \mathrm{Spec}R$ は R に対応する代数多様体とする。このとき、基本類 $\mu_X \in H_{2d}(X, \mathbb{Q})$ が定まる。これは、$H_{2d}(X, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}$ の生成元である。ここで、$H_*(X, \mathbb{Q})$ は Borel-Moore ホモロジーである。

$$G_0(R)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow[\sim]{\tau_R} A_*(R)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{cl} H_*(X, \mathbb{Q})$$

cl はサイクル写像とすると、$cl(\tau_R(\mu_R)) = \mu_X$ が成立する。

注意 2.13 μ_R には次のように正規拡大を用いた特徴づけがある。S を R の部分環で正則局所環とする。R は S-加群として有限生成な環を局所化した整域とする。L を S の商体 $Q(S)$ の有限次正規拡大とする。B を L における R の整閉包とする。このとき、B を有限生成 R-加群とすれば、

$$\mu_R = \frac{1}{\mathrm{rank}_R B}[B] \in G_0(R)_{\mathbb{Q}}$$

を得る。μ_R は、上の L の取り方によらずに定まることが証明できる [12]。

注意 3.2 や主定理の証明にも出てくるが、ある意味で、μ_R はフロベニウスの極限と見ることもできる。

次は、F-finite な環を定義する。

定義 2.14 p を素数とする。R を標数 p のネーター環とする。$0 < e \in \mathbb{N}$ とするとき、

$$\begin{array}{cccc} F^e: & R & \longrightarrow & R \\ & \cup\!\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\!\shortmid \\ & x & \longmapsto & x^{p^e} \end{array}$$

を e 回フロベニウス写像と呼ぶ。$e = 1$ のときは、単に、$F := F^1$ をフロベニウス写像と呼ぶ。

定義 2.15 p を素数とする。R を標数 p のネーター環とする。フロベニウス写像

$$F : R \longrightarrow R$$

が finite 射であるときに、R は F-finite であるという。

注意 2.16 R を標数が素数 p の被約なネーター環とする。このとき、R が F-finite であるためには、

$$R^{1/p} := \left\{ x^{1/p} \,\middle|\, x \in R \right\} \supset R$$

が有限生成 R-加群となることが必要十分である。

以下、F-finite と言ったときは、環の標数は素数 p であると仮定する。

証明は省略するが、次の事実から、F-finite な環は強鎖状環である。

定理 2.17 (E. Kunz) F-finite な環は優秀環である [11]。

定義 2.18 Rを環とし、MをR-加群とする。また、$Q(R)$をRの全商環とする。$M\otimes_R Q(R)$がrank rの自由$Q(R)$-加群となるとき、Mはrank rを持つという。このとき、

$$\mathrm{rank}_R M := \mathrm{rank}_{Q(R)}(M \otimes_R Q(R))$$

と定める。

ここで、Rが整域であれば、有限生成R-加群は必ずrankを持つことに注意する。

定義 2.19 Rを環とし、MをR-加群とする。$Q(R)$をRの全商環とするとき、

$$M \otimes_R Q(R) = 0$$

を満たすならば、Mはtorsion R-加群であるという。

注意 2.20 Mを有限生成R-加群とする。Mがtorsion R-加群であるためには、R-非零因子$s \in R$が存在して$sM = 0$を満たすことが必要十分である。

補題 2.21 $f : R \to A$をネーター環の平坦射とし、Mを有限生成R-加群とする。このとき、次が正しい。

(1) $m \in M$ならば、$\mathrm{Ann}_R(m)A = \mathrm{Ann}_A(m \otimes 1_A)$である。また、$\mathrm{Ann}_R(M)A = \mathrm{Ann}_A(M \otimes_R A)$である。

(2) Mがtorsion R-加群ならば、$M \otimes_R A$がtorsion A-加群である。

(3) fが忠実平坦射ならば、(2)の逆も成り立つ。

補題 2.22 $f : R \to A$をネーター環の平坦射とする。このとき、有限生成R-加群Mがrankを持てば$M \otimes_R A$はA-加群としてrankを持ち、

$$\mathrm{rank}_R M = \mathrm{rank}_A\bigl(M \otimes_R A\bigr)$$

が成り立つ。

証明 まず、Mがrank rを持つとする。このとき、Cがtorsion R-加群であるようなR-加群の完全列

$$0 \longrightarrow R^r \longrightarrow M \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

が存在する。したがって、完全列

$$0 \longrightarrow A^r \longrightarrow M \otimes_R A \longrightarrow C \otimes_R A \longrightarrow 0$$

があり、補題 2.21(2)より$C \otimes_R A$がtorsion R-加群なので、$\mathrm{rank}_A\bigl(M \otimes_R A\bigr) = r$を得る。 証明終

定義 2.23 R を標数 $p>0$ のネーター環とする。$e>0$ を自然数とし、

$$F^e : R_1 := R \longrightarrow R =: R_2$$

を e 回フロベニウス写像とする。R_2-加群 M を F^e を通して R_1-加群と見たものを $F^e_* M$ と定義する。

注意 2.24 R が F-finite であるというのは、言い換えれば、ある正整数 $e>0$ があって $F^e_* R$ が有限生成 R-加群であるということである。

命題 2.25 R をネーター環とする。

(1) $S \subset R$ を積閉集合とすれば、

$$F^e_*\bigl(S^{-1}R\bigr) = S^{-1}\bigl(F^e_* R\bigr)$$

である。

(2) $(R, \mathfrak{m})$ がネーター局所環で F-finite であれば、

$$F^e_* \widehat{R} = \widehat{F^e_* R}$$

である。ここで、R-加群 B に対して $\widehat{B}$ は $\mathfrak{m}$-進完備化を表す。

証明 (1) の証明は (2) と同様なので、(2) のみを示す。

(2) 次の図式

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{F^e} & R = F^e_* R \\ {\scriptstyle \text{nat.}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \text{nat.}} \\ \widehat{R} & \xrightarrow{\hat{F^e}} & \widehat{R} = \widehat{F^e_* R} \end{array}$$

を可換にするような $\hat{F^e}$ が一意的に定まり、この射は $\widehat{R}$ の e 回フロベニウス写像になるためである。ここで、R が F-finite なので、$F^e_* R \otimes_R \widehat{R} \simeq \widehat{F^e_* R}$ であることに注意する。

証明終

後の命題 2.27 において、R はネーター局所整域であるが、R をネーター完備局所整域の場合に帰着させることで証明したい。そこで、次の補題 2.26 を必要とする。

補題 2.26 R を F-finite ネーター環とする。このとき、$F^e_* R$ が rank を持てば、任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}_R R$ に対して、

$$\mathrm{rank}_R F^e_* R = \mathrm{rank}_{R/\mathfrak{p}} F^e_*(R/\mathfrak{p})$$

が成り立つ。

証明 $r=\mathrm{rank}_R F^e_* R$ とおく。$\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}_R R$ をとれば、$R_\mathfrak{p}$-加群としての同型

$$F^e_*(R_\mathfrak{p})=(F^e_*R)_\mathfrak{p}\simeq (R_\mathfrak{p})^r$$

を得る。従って、

$$\ell_{R_\mathfrak{p}}\bigl(F^e_*(R_\mathfrak{p})\bigr)=r\cdot \ell_{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p})<\infty \tag{1}$$

である。$t:=\ell_{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p})$ とおけば、$R_\mathfrak{p}$-加群のフィルトレーション

$$R_\mathfrak{p}=M_0\supset M_1\supset M_2\supset\cdots\supset M_t=(0)$$

で、$i=0,1,\ldots,t-1$ に対して、

$$M_i/M_{i-1}\simeq R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$$

を満たすものがある。F^e_* は $R_\mathfrak{p}$-加群から $R_\mathfrak{p}$-加群への完全関手なので、$i=0,1,\ldots,t-1$ に対して、短完全列

$$0\longrightarrow F^e_*M_{i+1}\longrightarrow F^e_*M_i\longrightarrow F^e_*(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p})\longrightarrow 0$$

が存在する。従って、

$$\ell_{R_\mathfrak{p}}\bigl(F^e_*(R_\mathfrak{p})\bigr)=\ell_{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p})\cdot \ell_{R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}\bigl(F^e_*(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p})\bigr) \tag{2}$$

である。式 (1) と式 (2) によって、

$$\ell_{R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}\bigl(F^e_*(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p})\bigr)=r$$

である。よって、$Q(R/\mathfrak{p})=R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ に注意すれば、

$$\mathrm{rank}_{R/\mathfrak{p}}F^e_*(R/\mathfrak{p})=r$$

を得る。 **証明終**

次の命題 2.27 は、古くから知られていることであるが、どこで最初に使われたのかは分からない。証明はつけておく。

命題 2.27 $(R,\mathfrak{m})$ を F-finite ネーター局所整域で剰余体 $R/\mathfrak{m}$ が完全体であると仮定する。このとき、任意の非負整数 $e>0$ に対して、

$$\mathrm{rank}_R(F^e_*R)=p^{\dim R\cdot e}$$

が成り立つ。

証明 $r=\mathrm{rank}_R(F^e_*R)$ とおく。$\widehat{R}$ は標数 p であり、環の同型 $\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}}\cong R/\mathfrak{m}$ により $\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}}$ は標数 p の完全体であることに注意する。ここで、$\mathfrak{p}\in\mathrm{Min}_{\widehat{R}}\widehat{R}$ をとれば、$\widehat{R}/\mathfrak{p}$ は標数 p の F-finite ネーター完備局所整域となる。補題 2.22 と命題 2.25 により、

$$\mathrm{rank}_R(F^e_*R)=\mathrm{rank}_{\widehat{R}}\widehat{F^e_*R}=\mathrm{rank}_{\widehat{R}}F^e_*\widehat{R}$$

なので、$F^e_*\widehat{R}$ は rank r を持つ。従って、補題 2.26 により、$\widehat{R}$ の極小素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して、

$$\mathrm{rank}_{\widehat{R}} F^e_*\widehat{R} = \mathrm{rank}_{\widehat{R}/\mathfrak{p}} F^e_*(\widehat{R}/\mathfrak{p})$$

である。以上により、この命題は R が剰余体が標数 p の完全体であるような完備局所整域の場合に証明すれば十分であることが分かった。

$d = \dim R$ とする。R は等標数の完備局所環であるので、$R/\mathfrak{m}$ に同型な R の部分体 K があって、d 変数の K 上形式的冪級数環から R への単射かつ finite 射

$$\varphi : K[[Y_1, \ldots, Y_d]] \longrightarrow R$$

が得られる。すると、次の可換図式を得る。

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "g:=F^e"] & R \\ K[[Y_1, \ldots, Y_d]] \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "h:=F^e"] & K[[Y_1, \ldots, Y_d]] \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd} \tag{3}$$

ここで、$S = K[[Y_1, \ldots, Y_d]]$ とおけば、K が完全体なので,

$$T := h(S) = K[[Y_1^{p^e}, \ldots, Y_d^{p^e}]]$$

が成り立ち、

$$F^e_*S = \bigoplus Y_1^{\alpha_1} \cdots Y_d^{\alpha_d} T \tag{4}$$

が分かる。式 (4) の右辺の直和は、$0 \le \alpha_1 \le p^e - 1, \ldots, 0 \le \alpha_d \le p^e - 1$ を満たすすべての $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ をわたる。$S \simeq T \simeq Y_1^{\alpha_1} \cdots Y_d^{\alpha_d} T$ なので、F^e_*S は自由 S-加群で、

$$\mathrm{rank}_S F^e_*S = p^{de}$$

を得る。一方で、h が finite 射であることが分かったので、先の可換図式 (3) により g もまた finite 射である。いま、

$$Q(S) = S \otimes_S Q(S) \xrightarrow{\varphi \otimes \mathrm{id}} R \otimes_S Q(S)$$

は単射かつ integral extension であり、$R \otimes_S Q(S)$ は整域で $Q(S)$ は体なので、$R \otimes_S Q(S)$ は体となり、従って、

$$Q(R) = R \otimes_S Q(S)$$

が分かり、以下の可換図式が得られる。

$$\begin{tikzcd} Q(R) \arrow[r, "\text{有限次代数拡大}"] & F^e_*Q(R) \\ Q(S) \arrow[u, "\text{有限次代数拡大}"] \arrow[r, "\text{有限次代数拡大}"] & F^e_*Q(S) \arrow[u, "\text{有限次代数拡大}"'] \end{tikzcd}$$

ここで、

$$\bigl[Q(R) : Q(S)\bigr] = \bigl[F^e_*Q(R) : F^e_*Q(S)\bigr]$$

に注意する。このとき、

$$\begin{aligned}\left[F^e_*Q(R):Q(R)\right]\cdot\left[Q(R):Q(S)\right] &= \left[F^e_*Q(R):Q(S)\right]\\ &= \left[F^e_*Q(R):F^e_*Q(S)\right]\cdot\left[F^e_*Q(S):Q(S)\right]\end{aligned}$$

により、

$$\left[F^e_*Q(R):Q(R)\right]=\left[F^e_*Q(S):Q(S)\right]$$

となる。従って、

$$\mathrm{rank}_R(F^e_*R)=p^{de}$$

が分かる。 証明終

3 主定理

定義 3.1 R を F-finite なネーター環とする。このとき、e 回フロベニウス写像 $F^e: R\to R$ から誘導された $G_0(R)$ 自身の間の射を

$$\begin{array}{cccc} F^e_*: & G_0(R) & \longrightarrow & G_0(R)\\ & \mathrel{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \mathrel{\rotatebox{90}{$\in$}}\\ & [M] & \longmapsto & [F^e_*M]\end{array}$$

で定義する。

注意 3.2 R を d 次元 F-finite ネーター局所環とする。次の可換図式 (5) が得られる。

$$\begin{array}{ccc} G_0(R)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\tau_R} & A_*(R)_{\mathbb{Q}}\\ {\scriptstyle F^e_*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle F^e_*}\\ G_0(R)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\tau_R} & A_*(R)_{\mathbb{Q}}\end{array} \tag{5}$$

ここで、水平の射 τ_R は定理 2.10 のリーマン・ロッホ射である。また、縦の左の射 F^e_* は e 回フロベニウス写像から誘導された射である。縦の右の射 F^e_* に関しては Fulton[4] 参照。この可換図式 (5) により、

$$\tau_R([F^e_*R])=F^e\big(\tau_R([R])\big) \tag{6}$$

を得る。$[R]\in G_0(R)_{\mathbb{Q}}$ を τ_R で写して、

$$\tau_R([R])=\tau_R([R])_d+\tau_R([R])_{d-1}+\cdots+\tau_R([R])_0$$

と斉次分解されたとする。ただし、$i=0,\ldots,d$ に対して $\tau_R([R])_i\in A_i(R)_{\mathbb{Q}}$ である。このとき、

$$\tau_R([R])_d=[\mathrm{Spec}R]\in A_*(R)_{\mathbb{Q}}$$

となることが知られている [4]。

ここで、$(R,\mathfrak{m})$ を d 次元 F-finite ネーター局所整域で剰余体 $R/\mathfrak{m}$ が完全体なるものとすれば、

$$F^e\big(\tau_R([R])\big) = p^{de}[\mathrm{Spec}R] + p^{(d-1)e}\tau_R([R])_{d-1} + \cdots + p^e\tau_R([R])_1 + \tau_R([R])_0 \qquad (7)$$

である。このことは、$F^e : A_*(R)_{\mathbb{Q}} \to A_*(R)_{\mathbb{Q}}$ の定義と命題 2.27 から得られる。従って、式 (6)(7) により、

$$\tau_R([F^e_* R])_j = p^{je}\cdot\tau_R([R])_j$$

である。以上により、$G_0(R)_{\mathbb{Q}}$ の中で

$$[F^e_* R] = p^{de}\tau_R^{-1}\big([\mathrm{Spec}R]\big) + p^{(d-1)e}\tau_R^{-1}(\tau_R([R])_{d-1}) + \cdots + \tau_R^{-1}(\tau_R([R])_0) \qquad (8)$$

が得られる。

注意 3.3 R をネーター環とする。M が極大コーエン・マコーレー R-加群であれば、$F^e_* M$ もまた極大コーエン・マコーレー R-加群である。

FFRT は、Smith-Van den Bergh [18] によって、初めて導入された概念である。FFRT は finite F-representation type の略である。

定義 3.4 R を標数が素数 p のコーエン・マコーレー環とする。このとき、R が有限フロベニウス表現型 (FFRT) であるとは、有限個の直既約な極大コーエン・マコーレー R-加群 $M_1, \ldots, M_s$ があって、任意の自然数 $e > 0$ に対して、

$$F^e_* R = M_1^{a_{e1}} \oplus \cdots \oplus M_s^{a_{es}}$$

を満たすような非負整数 $a_{e1}, \ldots, a_{es} \in \mathbb{N}_0$ が存在することをいう。

注意 3.5 注意 2.24 より、R が FFRT ならば F-finite である。

例 3.6 R を標数が素数 p のコーエン・マコーレー環であるとする。このとき、次が正しい。

(1) R が F-finite な正則局所環であれば、R は FFRT である [18]。

(2) R がトーリック環であれば、R は F-finite であり、更に FFRT である。

注意 3.7 定義 2.6 の

$$C_{CM}(R) := \sum_{M:\mathrm{MCM}\ R\text{-加群}} \mathbb{R}_{\geq 0}[M] \subset \overline{G_0(R)_{\mathbb{R}}}$$

に対応して

$$C'_{CM}(R) := \sum_{M:\mathrm{MCM}\ R\text{-加群}} \mathbb{R}_{\geq 0}[M] \subset G_0(R)_{\mathbb{R}}$$

と定めることにする。自然な射を

$$\pi : G_0(R)_{\mathbb{R}} \longrightarrow \overline{G_0(R)_{\mathbb{R}}}$$

と書くことにすると、

$$\pi\big(C'_{\mathrm{CM}}(R)\big) = C_{CM}(R),$$
$$\pi\left(\mu_R\right) = \overline{\mu_R}$$

である。

注意 3.8 定理 1.9 と注意 3.7 より、R が FFRT なら

$$\overline{\mu_R} \in C_{CM}(R)$$

であることが分かる。

では、主定理を証明しよう。

定理 1.9 $(R, \mathfrak{m})$ を、d 次元 F-finite コーエン・マコーレー局所整域で、剰余体 $R/\mathfrak{m}$ が完全体なるものとする。このとき、R が FFRT ならば、

$$\mu_R \in C'_{CM}(R)$$

である。特に、$G_0(R)_{\mathbb{Q}}$ の中で $[N] = \mathrm{rank}_R N \cdot \mu_R$ を満たすような極大コーエン・マコーレー R-加群 $N \neq 0$ が存在する。

証明 R が FFRT であるから、ある有限個の直既約な極大コーエン・マコーレー R-加群 $M_1, \ldots, M_s$ があって、任意の自然数 $e > 0$ に対して、$F^e_* R = M_1^{a_{e1}} \oplus \cdots \oplus M_s^{a_{es}}$ を満たすような 0 以上の整数 $a_{e1}, \ldots, a_{es} \in \mathbb{N}_0$ が存在する。U を、

$$\{\, [M_1], \ldots, [M_s] \,\} \cup \{\, \tau_R^{-1}\big(\tau_R([R])_j\big) \,\big|\, j = 0, 1, \ldots, d \,\}$$

で張られる $G_0(R)_{\mathbb{Q}}$ の部分 $\mathbb{Q}$-ベクトル空間とする[1]。$C := \sum_{i=1}^{s} \mathbb{R}_{\geq 0}[M_i] \subset U_{\mathbb{R}}$ とする。$C \subset C'_{CM}(R)$ なので、$\mu_R \in C$ を示せばよい。

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{R}} : G_0(R)_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

を $\mathrm{rk}_{\mathbb{R}}([M]) = \mathrm{rank}_R M$ で定まる $\mathbb{R}$-線形写像とする。$U_{\mathbb{R}}$ は有限次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間であるので、ある自然数 n があって $\mathbb{R}^n$ に位相同型である。$U_{\mathbb{R}}$ の $\mathbb{R}$-ベクトル空間としてのある基底を正規直交基底と見ることにより、$U_{\mathbb{R}}$ を距離空間と思うことができる。ここで、$C \cap \mathrm{rk}_{\mathbb{R}}^{-1}(1)$ は $U_{\mathbb{R}}$ の有界閉集合であることを示す。$i = 1, \ldots, s$ に対して $r_i = \mathrm{rank}_R M_i$ (> 0) として、

$$m_i := \frac{[M_i]}{r_i} \in U_{\mathbb{R}}$$

[1] 本当は、$\{\, [M_1], \ldots, [M_s] \,\}$ で張られる $\mathbb{Q}$-ベクトル空間は $\{\, \tau_R^{-1}\big(\tau_R([R])_j\big) \,\big|\, j = 0, 1, \ldots, d \,\}$ を含むことを示すことができる。

とおいて、

$$\begin{array}{ccccc} \big(\mathbb{R}_{\geq 0}\big)^s & \overset{\varphi}{\to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \mathbb{R}_{\geq 0} m_i & \overset{\mathrm{rk}_{\mathbb{R}}|_C}{\to} & \mathbb{R} \\ \Cup & & \Cup & & \Cup \\ (a_1, \ldots, a_s) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{s} a_i m_i & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{s} a_i \end{array}$$

と φ を定義する。すると、φ は全射かつ連続写像であって、

$$X := \left\{ (a_1, \ldots, a_s) \in \big(\mathbb{R}_{\geq 0}\big)^s \;\middle|\; \sum_{i=1}^{s} a_i = 1 \right\} \subset (\mathbb{R}_{\geq 0})^s$$

とおけば、φ の制限写像

$$X \xrightarrow{\varphi|_X} \sum_{i=1}^{s} \mathbb{R}_{\geq 0} m_i$$

は、

$$\mathrm{Im}(\varphi|_X) = \left\{ \sum a_i m_i \;\middle|\; \sum a_i = 1\,,\, a_i \geq 0 \right\} = C \cap \mathrm{rk}_{\mathbb{R}}^{-1}(1)$$

を満たすことが分かる。X はユークリッド空間 $\mathbb{R}^s$ の有界閉集合なので、従って $C \cap \mathrm{rk}_{\mathbb{R}}^{-1}(1)$ は $U_{\mathbb{R}}$ の有界閉集合であることが分かった。

剰余体が完全体であるので、任意の $e > 0$ に対して、$\mathrm{rank}_R\big(F_*^e R\big) = p^{de}$ である (補題 2.27)。

$$[F_*^e R] = a_{e1}[M_1] + \cdots + a_{es}[M_s]$$

に注意すれば、

$$\frac{1}{p^{de}}[F_*^e R] \in C \cap \mathrm{rk}_{\mathbb{R}}^{-1}(1)$$

であることが分かる。また、式 (8) により

$$\frac{1}{p^{de}}[F_*^e R] = \sum_{0 \leq i \leq d} \frac{1}{p^{ie}} \tau_R^{-1}\big(\tau_R([R])_{d-i}\big)$$

である。U の定義により、右辺の各項は $U_{\mathbb{R}}$ に入っていることに注意する。このとき、$U_{\mathbb{R}}$ の中で

$$\lim_{e \to \infty} \frac{1}{p^{de}}[F_*^e R] = \tau_R^{-1}\big(\tau_R([R])_d\big) = \tau_R^{-1}\big([\mathrm{Spec} R]\big) = \mu_R$$

である。ここで、top term property (Fulton [4]) より、

$$\tau_R([R])_d = [\mathrm{Spec} R]$$

に注意する。$C \cap \mathrm{rk}_{\mathbb{R}}^{-1}(1)$ は $U_{\mathbb{R}}$ の閉集合であるので、

$$\mu_R \in C \cap \mathrm{rk}_{\mathbb{R}}^{-1}(1) \subset C = \sum_{i=1}^{s} \mathbb{R}_{\geq 0}[M_i]$$

が従う。必要ならば順序を入れ替えて、

$$\mu_R = p_1[M_1] + \cdots + p_t[M_t] \tag{9}$$

とする ($p_1, \ldots, p_t \in \mathbb{R}_{>0},\ 0 < t \leq s$)。このとき、

$$\mu_R \in \sum_{i=1}^{t} \mathbb{Q}_{\geq 0}[M_i]$$

であることを示そう。$\dim_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{t} \mathbb{R}_{\geq 0}[M_i] = m$ とおき、その基底をとって、

$$\sum_{i=1}^{t} \mathbb{R}[M_i] \simeq \mathbb{R}^m$$

とみる。ここで、各 $[M_i]$ を $\mathbb{R}^m$ の元と見なせば、

$$[M_i] = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{mi} \end{pmatrix}$$

と書くことができる。また、

$$\mu_R = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

とする。このとき、変数 $x_1, x_2, \ldots, x_t$ に関する連立方程式

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1t} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_t \end{pmatrix}$$

を考える。この連立方程式は、(9) によって解

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_t \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_{>0})^t$$

を持つ。上の連立方程式の解は、$\mathbb{Q}^t$ の元 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r, \mathbf{b}$ があって、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_t \end{pmatrix} = \ell_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \ell_r \mathbf{a}_r + \mathbf{b}$$

と書ける。ただし、$\ell_1, \ldots, \ell_r \in \mathbb{R}$ である。よって、

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_t \end{pmatrix} = \ell'_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \ell'_r \mathbf{a}_r + \mathbf{b}$$

をみたす $\ell'_1, \ldots, \ell'_r \in \mathbb{R}$ が存在する。$p_1, \ldots, p_t \in \mathbb{R}_{>0}$ なので、ℓ'_i に十分近い有理数 ℓ''_i をとれば、

$$\ell''_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \ell''_r \mathbf{a}_r + \mathbf{b}$$

の各成分は正の有理数としてよい。よって、

$$\mu_R \in \sum_{i=1}^{t} \mathbb{Q}_{\geq 0}[M_i]$$

であることが分かった。このことにより、$G_0(R)_{\mathbb{Q}}$ の中で $[N] = \mathrm{rank}_R N \cdot \mu_R$ を満たすような極大 Cohen-Macaulay R-加群 $N \neq 0$ が存在することが分かる。 証明終

主定理は、トーリック環、つまり体 k 上の正規半群環でも成立する。ただし、k が正標数であるという仮定は必要ない。フロベニウス写像の代わりに、変数を何乗かする写像を用いれば、同様に証明することができる。

参考文献

[1] P. Berthelot, "Altérations de variétés algébriques [d'aprés A. J. de Jong]", Sém. Bourbaki 48, No. 815(1995/96).

[2] W. Bruns and J. Herzog, "Cohen-Macaulay Rings", Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 39, Cambridge, Cambridge University Press, 1993.

[3] E. G. Evans and P. Griffith, "The syzygy problem", Ann. of Math. (2) 114(1981), no. 2, 323—333.

[4] W. Fulton, "Intersection theory, 2nd Edition", Springer-Verlag, Berlin, New York, 1997.

[5] H. Gillet and C. Soulé, "K-théorie et nullité des multiplicities d'intersection", C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 300(1985), 71—74

[6] S. Goto, "On the associated graded rings of parameter ideals in Buchsbaum rings", J. Algebra 85 (1983), no.2, 490—534.

[7] R. C. Heitmann, "The direct summand conjecture in dimension three", Ann.of Math. (2) 156 (2002), no. 2, 695—712.

[8] M. Hochster and C. Huneke, "Infinite integral extensions and big Cohen-Macaulay algebras", Ann. of Math. (2) 135 (1992), 53—89.

[9] M. Hochster, "The equicharacteristic case of some homological conjectures on local rings", Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 683—686.

[10] M. Hochster, "Big Cohen-Macaulay algebras in dimension three via Heitmann's theorem", Journal of Algebra 254 (2002) 395—408.

[11] E. Kunz, "On Noetherian rings of characteristic p", Amer. J. Math. 98 (1976), no. 4, 999—1013.MR 555612

[12] K. Kurano, "Test Modules to Calculate Dutta Multiplicities", J. Algebra 236(2001), 216—235.

[13] K. Kurano, "Numerical equivalence defined on Chow groups of Noetherian local rings", Invent. Math., 157(2004), 575—619.

[14] K. Kurano, "On the limit of Frobenius in the Grothendieck group", 35th Comm. Alg., 報告集.

[15] P. Roberts, "Local Chern characters and intersection multiplicities", Algebraic geometry, Bowdoin, 1985, 389—400, Proc. Symp. Pure Math., 46, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[16] P. Roberts, "Le théorème d'intersection", C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 304 (1987), no. 7, 177—180.

[17] J.-P. Serre, “Algébre locale. Multiplicitiés”, Lect. Note in Math., vol. 11, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1965.

[18] K. Smith and M. Van den Bergh, “Simplicity of rings of differential operators in prime characteristic”, Proc. London Math. Soc. (3) 75 (1997), 32—62.

[19] S. Takagi and R. Takahashi, “D-modules over rings with finite F-representation type”, Math. Res. Lett. 15 (2008), no. 3, 563—581.

[20] Y. Yoshino, “Cohen-Macaulay Modules over Cohen-Macaulay Rings”, London Math. Soc. Lect. Note vol. 146, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1992.