

量子座標環 $\mathbb{C}[SL_n]_v$ の既約表現の素朴な構成について

大矢 浩徳 (東京大学大学院数理科学研究科) *

概要

本稿では, A 型の量子座標環 $\mathbb{C}[SL_n]_v$ の unitarizable な最高ウェイト既約表現を構成する素朴な方法について述べる. ここでは量子行列環と呼ばれる代数 $\mathbb{C}[Mat_n]_v$ が重要になる. $\mathbb{C}[SL_n]_v$ は $\mathbb{C}[Mat_n]_v$ の商代数である. 構成の手順はまず $\mathbb{C}[Mat_n]_v$ の右正則表現の部分表現をある方法で取り出し, それらがさらに $\mathbb{C}[SL_n]_v$ の表現と見れるように表現を捻る, という 2 つの段階に分けられる. 一連の手順は (式にすると一見複雑に見えるが) Rothe 図と呼ばれる図を見ながら容易に行うことができる. また, $\mathbb{C}[SL_n]_v$ の生成元の作用もこの Rothe 図を見ながら容易に書き下すことができるのでその点についても解説する.

1 導入

G を \mathbb{C} 上の連結単連結単純代数群とする. 量子座標環 $\mathbb{C}[G]_v$ とは G の座標環 $\mathbb{C}[G]$ の q -類似にあたる代数である. 本稿ではこの代数の表現論を扱う. $\mathbb{C}[G]_v$ の表現論はその非可換性のために (\mathbb{C} 上の有限生成) 可換代数である $\mathbb{C}[G]$ の表現論とは全く様子が異なる. $\mathbb{C}[G]$ の既約表現は 1 次元のもののみである一方 $\mathbb{C}[G]_v$ には無限次元の既約表現も存在する. $\mathbb{C}[G]_v$ の表現論については Soibelman ら ([Vak88] [Soi90] 等) による研究があり, 最高ウェイト unitarizable 既約表現の分類, 構成が行われている. (2 節に詳細を述べるが) 分類については G の Weyl 群 W の元と $\text{rank} g$ 次元トーラス $\mathbb{T}^{\text{rank} g}$ の元の組によってパラメトライズされており, 構成については W の各元の最短表示ごとにテンソル積を用いた構成方法を与えている. ここで特に, W の単位元 (と $\mathbb{T}^{\text{rank} g}$ の任意の元) に対応する既約表現は 1 次元であるがそれ以外の既約表現は全て無限次元である.

近年では, このような $\mathbb{C}[G]_v$ の既約表現の間の絡作用素から四面体方程式や 3 次元反射方程式の解が得られるという現象が研究されていたり, ([Kap94], [Kun12] 等) 量子座標環の表現論と量子包絡環の正部分の構造に類似が見られることが指摘されたりしている ([Kun13]).

*E-mail address: oya@ms.u-tokyo.ac.jp

本稿では $G = SL_n$ の場合に焦点を当て、Soibelman の構成した既約表現の再構成を行う。この構成はテンソル積を用いないという点で Soibelman の構成とは異なる形をしているが、Weyl 群 (n 次対称群) の各元に対し適切に最短表示を決めると Soibelman の構成したものと、ある定数倍のもとに“自然な基底” 同士まで込めて対応している。(共に“自然な基底” を持っている。) また、その基底への $\mathbb{C}[SL_n]_v$ の生成元の具体的な作用についても述べる。なお、テンソル積を用いないという点でここでの構成を“素朴” と呼んでいる。

本稿の構成としては 2 節で必要な用語、記号及び Soibelman らの $\mathbb{C}[G]_v$ の既約表現に関する結果について説明し、3 節で今回得られた $\mathbb{C}[SL_n]_v$ の既約表現の (Rothe 図を見ながらの) 構成方法、及び作用の計算方法について述べる。さらに付録として、 $\mathbb{C}[SL_2]_v$ の場合にその既約加群の構成の様子を具体的な計算も含め展開したものをつけた。

以下は本稿を通して用いる記号である。

記号 1.1. $\mathbf{k} := \mathbb{C}$ 又は $\mathbb{C}(v)$ (v は不定元). なお、 $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ のときは v を 1 のべき根でない $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ の元とする. n は 2 以上の自然数として固定する. \mathfrak{S}_n を n 次対称群とし、単位元を e , 互換 $(i, i+1) \in \mathfrak{S}_n$ を s_i で表す. 有限集合 X に対し、 $|X|$ をその元の数とする.

2 諸定義と準備

ここでは、量子座標環の定義と Soibelman らによる量子座標環の表現論に関する結果について述べる。

本稿では主に $G = SL_n$ の場合のみ扱うので定義 2.3 のみで十分であるがもう少し一般の場合の量子座標環の定義について簡単に述べる。各用語の詳細な定義については [Kas93] を参照。([Kas93] では量子座標環は $A_q(\mathfrak{g})$ と表されている。)

G を \mathbb{C} 上の連結単連結単純代数群とし、 \mathfrak{g} をその Lie 環とする. $U_v(\mathfrak{g})$ を \mathbf{k} 上の量子包絡環とし、 $U_v(\mathfrak{g})^* := \text{Hom}_{\mathbf{k}}(U_v(\mathfrak{g}), \mathbf{k})$ とする。

定義, 事実 2.1. G の量子座標環 $\mathbb{C}[G]_v$ を

$$\mathbb{C}[G]_v := \{ f \in U_v(\mathfrak{g})^* \mid U_v(\mathfrak{g}) \cdot f \text{ は } O_{\text{int}}(\mathfrak{g}) \text{ の対象, } f \cdot U_v(\mathfrak{g}) \text{ は } O_{\text{int}}(\mathfrak{g}^{\text{opp}}) \text{ の対象} \},$$

と定義する。ここに、 O_{int} は有限次元可積分左 $U_v(\mathfrak{g})$ 加群の圏、 $O_{\text{int}}(\mathfrak{g}^{\text{opp}})$ は有限次元可積分右 $U_v(\mathfrak{g})$ 加群の圏 (\mathfrak{g} は有限型であることに注意)、 $U_v(\mathfrak{g})^*$ の両側 $U_v(\mathfrak{g})$ 加群構造を $U_v(\mathfrak{g})$ の自然な両側 $U_v(\mathfrak{g})$ 加群構造から定まるものとする。

このとき、 $\mathbb{C}[G]_v$ は $U_v(\mathfrak{g})$ の Hopf 代数構造から自然に定まる Hopf 代数構造をもつ。例えば、 $U_v(\mathfrak{g})$ の余積が $\mathbb{C}[G]_v$ の積構造を定める。ここで、 $U_v(\mathfrak{g})$ の余積は [Kas93, Section 7] の Δ_+ を用いる。

命題 2.2 (Peter-Weyl の定理の q -類似 [Kas93, Proposition 7.2.2]). P_+ を支配的整ウェイトの集合とし, 各 $\lambda \in P_+$ に対し, $V(\lambda)$ を最高ウェイト λ の可積分左 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群, $V(\lambda)^r$ は $V(\lambda)$ の双対空間を自然に可積分右 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群と考えたものとする.

また, 各 $\lambda \in P_+$ に対し Ψ_λ を,

$$\Psi_\lambda : V(\lambda)^r \otimes V(\lambda) \longrightarrow \mathbb{C}[G]_v, \quad f \otimes v \longmapsto (u \mapsto \langle f, u \cdot v \rangle),$$

で定める. (以下では, $\Psi_\lambda(f \otimes v)$ を $c_{f,v}^\lambda$ で表す.)

このとき,

$$\bigoplus_{\lambda \in P_+} \Psi_\lambda : \bigoplus_{\lambda \in P_+} V(\lambda)^r \otimes V(\lambda) \longrightarrow \mathbb{C}[G]_v$$

は両側 $U_v(\mathfrak{g})$ 加群の同型を与える.

以下, $G = SL_n$ の場合を考える. この場合の量子座標環は次のような表示が知られている.

定義, 事実 2.3. $\mathbb{C}[SL_n]_v$ は命題 2.2 の同型のもと, $V(\omega_1)^r \otimes V(\omega_1)$ によって \mathbf{k} 代数として生成される. ここで, ω_1 は添え字 1 に対応する基本ウェイト, すなわち, $V(\omega_1)$ は \mathfrak{sl}_n のベクトル表現 (n 次元表現) の q -類似である.

特に, $V(\omega_1)$ の最高ウェイトベクトルを一つ固定して v_1 とし, $V(\omega_1)^r$ の (右加群の意味での) 最高ウェイトベクトル f_1 を $\langle f_1, v_1 \rangle = 1$ となるように取ると, $\mathbb{C}[SL_n]_v$ は $c_{ij} := f_{j-1}f_{j-2} \cdots f_1 \cdot c_{f_1, v_1}^{\omega_1} \cdot e_1 \cdots e_{i-2}e_{i-1}$ ($i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$) によって生成される \mathbf{k} 代数である. (e_k, f_k らは標準的な $U_v(\mathfrak{g})$ の Chevalley 生成元を表す. [Kas93] 参照.)

さらに, $\mathbb{C}[SL_n]_v$ において $\{c_{ij}\}_{i,j=1,2,\dots,n}$ は以下にあげる関係式をみたし, しかも関係式は以下で尽くされる. (すなわち, 生成元を $\{c_{ij}\}_{i,j=1,2,\dots,n}$ (ここでは c_{ij} はただの記号) とし, 以下の (Q1) から (Q5) の関係式を定義関係式とする \mathbf{k} 代数と $\mathbb{C}[SL_n]_v$ は \mathbf{k} 代数として同型.)

- (Q1) $c_{ij}c_{iq} = vc_{iq}c_{ij}$ $j < q$ のとき,
 - (Q2) $c_{ij}c_{pj} = vc_{pj}c_{ij}$ $i < p$ のとき,
 - (Q3) $c_{ij}c_{pq} = c_{pq}c_{ij}$ $i < p$ かつ $j > q$ のとき,
 - (Q4) $c_{ij}c_{pq} - c_{pq}c_{ij} = (v - v^{-1})c_{iq}c_{pj}$ $i < p$ かつ $j < q$ のとき,
 - (Q5) $\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} (-v)^{l(\tau)} c_{1\tau(1)} c_{2\tau(2)} \cdots c_{n\tau(n)} = 1.$ ($l(\tau)$ は τ の転倒数.)
- (例: $n = 2$ のとき, $c_{11}c_{22} - vc_{12}c_{21} = 1.$)

次に, 量子行列環 $\mathbb{C}[Mat_n]_v$ を定義する. 量子行列環は n 次正方行列のなす空間の座標環 (すなわち, n^2 変数 \mathbb{C} 係数多項式環) の q -類似である.

より正確には, $\{c_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$ (記号の濫用になるがここでは c_{ij} はただの記号とする) を生成元とし, 関係式 (Q1), (Q2), (Q3), (Q4) で定義される単位的結合 \mathbf{k} 代数を $\mathbb{C}[Mat_n]_v$ とする.

$\mathbb{C}[Mat_n]_v$ は以下の余単位射 ε と余積 Δ によって定まる双代数構造を持つ.

$$\varepsilon(c_{ij}) = \delta_{ij},$$

$$\Delta(c_{ij}) = \sum_{k=1}^n c_{ik} \otimes c_{kj}.$$

ここで, δ_{kl} は Kronecker のデルタである.

また, $\mathbb{C}[Mat_n]_v \rightarrow \mathbb{C}[SL_n]_v$, $c_{ij} \mapsto c_{ij}$ は双代数の全射準同型を定める.

それでは, 量子座標環 $\mathbb{C}[SL_n]_v$ の既約表現に関する Soibelman らによる基本的な結果について述べてゆく. (cf. [Vak88], [Kor98].)

定義 2.4 (単純 $\mathbb{C}[SL_n]_v$ 加群 V_{s_i}). まずは, 単純 $\mathbb{C}[SL_2]_v$ 加群を構成する.

V を非負整数でパラメライズされる基底を持つ無限次元ベクトル空間 $V := \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathbf{k} |m\rangle$ とする. V 上に $\mathbb{C}[SL_2]_v$ 加群の構造が以下で定まる.

$$c_{11} \cdot : |m\rangle \mapsto \begin{cases} 0 & m = 0 \text{ のとき,} \\ (1 - v^{2m}) |m - 1\rangle & m \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ のとき,} \end{cases}$$

$$c_{12} \cdot : |m\rangle \mapsto \alpha v^m |m\rangle,$$

$$c_{21} \cdot : |m\rangle \mapsto -\alpha^{-1} v^{m+1} |m\rangle,$$

$$c_{22} \cdot : |m\rangle \mapsto |m + 1\rangle.$$

ここで, $\alpha \in \mathbf{k}^\times$ とする. 構成より任意の $\alpha \in \mathbf{k}^\times$ に対し, これは単純 $\mathbb{C}[SL_2]_v$ 加群となることが容易にわかる. (v が 1 のべき根でないことに注意.) 特に $\alpha = -v$ のとき, この無限次元加群に対応する \mathbf{k} -代数準同型 $\mathbb{C}[SL_2]_v \rightarrow \text{End}_{\mathbf{k}}(V)$ を π で表す.

次に π を用いて単純 $\mathbb{C}[SL_n]_v$ 加群を構成する. $1 \leq i \leq n - 1$ なる整数 i に対し, Hopf 代数の全射準同型 $\varphi_i : \mathbb{C}[SL_n]_v \rightarrow \mathbb{C}[SL_2]_v$ を以下のように定義することができる.

$$c_{i+\epsilon, i+\epsilon'} \mapsto c_{1+\epsilon, 1+\epsilon'} \quad (\epsilon, \epsilon' \in \{0, 1\}),$$

$$T_{kl} \mapsto \delta_{kl} \quad \text{その他の場合.}$$

これにより各 $i = 1, \dots, n - 1$ に対し, $\mathbb{C}[SL_n]_v$ の既約表現 $\pi \circ \varphi_i$ が得られる. $\pi \circ \varphi_i$ に対応する $\mathbb{C}[SL_n]_v$ 加群 (ベクトル空間としては V) を V_{s_i} と表すことにする. また, 余単位射から定まる自明な $\mathbb{C}[SL_n]_v$ 加群を V_e で表す.

次の定理が Soibelman による (A_{n-1} 型の) テンソル積定理である.

定理 2.5 (Soibelman [Soi90]). $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ とする.

このとき, 各最短表示 $\sigma = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell(\sigma)}$ に対し, $\mathbb{C}[SL_n]_v$ 加群 $V_{s_{i_1}} \otimes \cdots \otimes V_{s_{i_\ell(\sigma)}}$ は単純であり, その同型類は σ の最短表示の取り方に依らない. (これを踏まえ, この単純 $\mathbb{C}[SL_n]_v$ 加群を V_σ と書くことにする.)

さらに Soibelman は以下のような形で単純 $\mathbb{C}[SL_n]_v$ 加群を分類している.

定理 2.6 (Soibelman [Soi90] [Kor98]). $\mathbf{k} = \mathbb{C}$, $0 < \nu < 1$ とする.

このとき, 任意の unitarizable な最高ウェイト単純 $\mathbb{C}[SL_n]_\nu$ 加群 V' に対し, n 次対称群の元 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ と $n-1$ 次元トーラスの元 $\tau \in \mathbb{T}^{n-1}$ の組がただ一つ定まり, unitarizable な $\mathbb{C}[SL_n]_\nu$ 加群として,

$$V' \simeq (V_\sigma)^{(\tau)}$$

となる. ここで, $(\)^{(\tau)}$ は \mathbb{T}^{n-1} の各元に対して定まる $\mathbb{C}[SL_n]_\nu$ 加群のある種の捻りを表す.

以下では, 定理 2.6 は用いないので $\mathbb{C}[SL_n]_\nu$ の “最高ウェイト加群” や “unitarizable な加群” さらに, “ \mathbb{T}^{n-1} の各元に対して定まる $\mathbb{C}[SL_n]_\nu$ 加群のある種の捻り” といった用語の定義の詳細については割愛する. 詳細は [Kor98] に述べられている.

$n = 2$ の場合についてのみ説明すると, “最高ウェイト表現” であるということは c_{11}, c_{21} の同時固有ベクトル (V でいうと $|0\rangle$) によって生成されているということ, “unitarizable な加群” であるということは, 加群上にある Hermitian 内積が定まり $\mathbb{C}[SL_2]_\nu$ の $*$ -構造と両立すること, “ \mathbb{T}^1 の各元に対して定まる $\mathbb{C}[SL_2]_\nu$ 加群のある種の捻り” とは定義 2.4 の V の定義にあらわれた α の分の自由度に対応する. ($|\alpha| = 1$ という条件は unitarizable であるということから課される.) 特に, “ \mathbb{T}^1 の各元に対して定まる $\mathbb{C}[SL_2]_\nu$ 加群のある種の捻り” については 1 次元 $\mathbb{C}[SL_2]_\nu$ 加群 $\mathbb{C} \cdot \mu$,

$$\begin{aligned} c_{11} \cdot \mu &= \alpha \mu, & c_{12} \cdot \mu &= 0, \\ c_{21} \cdot \mu &= 0, & c_{22} \cdot \mu &= \alpha^{-1} \mu, \end{aligned}$$

を左からテンソルすることで実現される. (n が一般の場合も 1 次元加群をテンソルする形で実現される.)

そこで, 以下ではトーラスでパラメトライズされる捻りの分は無視し, 各 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対する V_σ を再構成する方法について考察する. 特に, 3 節に述べる方法では V_σ が自然に持つ $\{|m_1\rangle \otimes \cdots \otimes |m_{l(\sigma)}\rangle\}_{m_1, \dots, m_{l(\sigma)} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ という形の基底に (σ の適切な最短表示を取った際に定数倍を除いて) 対応する自然な基底を持つ単純 $\mathbb{C}[SL_n]_\nu$ 加群が得られる. 一方で, その構成にはテンソル積を用いないことが特徴である.

注意 2.7. 定理 2.5, 2.6 は G が一般の \mathbb{C} 上の連結単連結単純代数群の場合にも成立する. この場合には Hopf 代数全射準同型 $\varphi_i : \mathbb{C}[G]_\nu \rightarrow \mathbb{C}[SL_2]_{\nu_i}$ は Hopf 代数単射準同型 $\psi_i : U_{\nu_i}(\mathfrak{sl}_2) \rightarrow U_\nu(\mathfrak{g})$, $e \mapsto e_i$, $f \mapsto f_i$, $q^h \mapsto q^{h_i}$ の双対として定まるものとし, n 次対称群 \mathfrak{S}_n は \mathfrak{g} の Weyl 群 W , 捻りをパラメトライズする \mathbb{T}^{n-1} は $\mathbb{T}^{\text{rank } \mathfrak{g}}$ とすればよい. 詳細は [Kor98] に述べられている.

以下, $\mathbb{C}[SL_n]_\nu$ の表現を考えるが, 主に扱う代数は $\mathbb{C}[Mat_n]_\nu$ である. そこで, $\mathbb{C}[Mat_n]_\nu$ に関する記号といくつかの事実を準備する.

定義, 事実 2.8.

- 定義 2.3(Q5) の左辺に現れる形の $\mathbb{C}[Mat_n]_v$ の元 $\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} (-v)^{l(\tau)} c_{1\tau(1)} c_{2\tau(2)} \cdots c_{n\tau(n)}$ は量子行列式とよばれ $\mathbb{C}[Mat_n]_v$ の中心に入る.

- $\mathbb{C}[Mat_n]_v$ は $\left\{ \prod_{i,j \in \{1, \dots, n\}}^{\rightarrow} c_{ij}^{a_{ij}} \mid (a_{ij}) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{n^2} \right\}$ を \mathbf{k} -基底とする整域である. ここで, $\prod_{i,j \in \{1, \dots, n\}}^{\rightarrow}$ は $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ に任意に全順序を定めたとえで順序通り積を取ったものとする.

本稿においては, $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ の全順序を以下のように定める.

$$(i, j) < (k, l) \Leftrightarrow i > k \text{ 又は } [i = k, j > l].$$

これにより, c_{ij} らの積は以下のように定まる.

$$\prod_{i,j}^{\rightarrow} c_{ij}^{a_{ij}} := c_{mn}^{a_{mn}} \cdots c_{n1}^{a_{n1}} c_{n-1n}^{a_{n-1n}} \cdots c_{n-11}^{a_{n-11}} c_{n-2n}^{a_{n-2n}} \cdots c_{1n}^{a_{1n}} \cdots c_{11}^{a_{11}}.$$

次に, $\left| \prod_{i,j}^{\rightarrow} c_{ij}^{a_{ij}} \right\rangle \in \mathbb{C}[Mat_n]_v^* (:= \text{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbb{C}[Mat_n]_v, \mathbf{k}))$ を以下で定義する.

$$\left| \prod_{i,j}^{\rightarrow} c_{ij}^{a_{ij}} \right\rangle \left(\prod_{i,j}^{\rightarrow} c_{ij}^{a'_{ij}} \right) := \delta_{(a_{ij})_{i,j=1, \dots, n} (a'_{ij})_{i,j=1, \dots, n}}.$$

以下では, $\mathbb{C}[Mat_n]_v$ の $\mathbb{C}[Mat_n]_v^*$ への以下で定まる左作用を考える (右正則表現).

$$f \in \mathbb{C}[Mat_n]_v^*, b, c \in \mathbb{C}[Mat_n]_v \text{ に対し, } (c.f)(b) := f(bc).$$

3 $\mathbb{C}[SL_n]_v$ の既約表現の構成について

本節では本稿の主目標である $\mathbb{C}[SL_n]_v$ の既約表現の構成法について述べる. 大きく分けると手順は,

- $\mathbb{C}[Mat_n]_v$ 加群 $\mathbb{C}[Mat_n]_v^*$ から各 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ごとに定まるある部分加群を取り出す.
- 上で取り出した部分加群が自然に $\mathbb{C}[SL_n]_v$ 加群と見られるように $\mathbb{C}[Mat_n]_v$ の作用を捻る.

の2つである.

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ を1つ固定する.

定義 3.1. $l(\sigma)$ 個の非負整数 $(m_{\sigma(i)j})_{i>j, \sigma(i)<\sigma(j)}$ に対し, $\mathbb{C}[\text{Mat}_n]^*$ の元 $|(m_{\sigma(i)j})_{i>j, \sigma(i)<\sigma(j)}\rangle$ を

$$|(m_{\sigma(i)j})_{i>j, \sigma(i)<\sigma(j)}\rangle := \sum_{m_{\sigma(1)1}, \dots, m_{\sigma(n)n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \left| \prod_{i=j \text{ 又は } [i>j, \sigma(i)<\sigma(j)]}^{\rightarrow} c_{\sigma(i)j}^{m_{\sigma(i)j}} \right\rangle,$$

とおく. $\mathbb{C}[\text{Mat}_n]^*$ においてこの無限和は正当化されているものであることに注意する.

この元は定義が少し複雑に見えるが以下の例に示すような図を用いると見やすい. (Rothe 図と呼ばれる.) これは $c_{ij}(i, j \in \{1, \dots, n\})$ らのうち, べきに関して無限和を取る c_{ij} とべきがパラメーターとなる c_{ij} があるがそれらの (i, j) の配置を図示している. が書き込まれている部分が前者に対応するものであり, が書き込まれている部分が後者に対応する部分である. (つまり, $\sigma(i)$ 行 i 列 ($i = 1, \dots, n$) の部分に を書き込み, $\sigma(i)$ 行 j 列 (ただし, $i > j, \sigma(i) < \sigma(j)$) に を書き込んでいます.)

例 3.2. $n = 2$ の場合,

$$\begin{array}{c} \sigma = e : \\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \sigma = s_1 : \\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array}$$

つまり,

$$\begin{aligned} \sigma = e \text{ のとき, } |(\) \rangle &:= \sum_{m_{22}, m_{11} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} |c_{22}^{m_{22}} c_{11}^{m_{11}}\rangle, \\ \sigma = s_1 \text{ のとき, } |(m_{11})\rangle &:= \sum_{m_{21}, m_{12} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} |c_{21}^{m_{21}} c_{12}^{m_{12}} c_{11}^{m_{11}}\rangle, \end{aligned}$$

となる. (cf. 付録.)

例 3.3. $n = 3$ の場合,

$$\begin{array}{cc} \sigma = e : \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} & \sigma = s_1 : \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \\ \sigma = s_2 : \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} & \sigma = s_1 s_2 : \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \\ \sigma = s_2 s_1 : \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} & \sigma = s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2 : \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

注意 3.4. 上の各 σ に対応する Rothe 図は一般的には“ σ^{-1} に対応する Rothe 図”と呼ばれるものであるが以下では引き続き σ に対応する Rothe 図と呼ぶことにする. 各図の の個数はそれぞれ $l(\sigma)$ に一致する.

命題 3.5 (O). $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ とする. \tilde{V}'_σ を,

$$\tilde{V}'_\sigma := \text{span}_{\mathbf{k}} \left\{ \left| (m_{\sigma(i)j})_{i>j, \sigma(i)<\sigma(j)} \right| (m_{\sigma(i)j})_{i>j, \sigma(i)<\sigma(j)} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{l(\sigma)} \right\},$$

と定義する. このとき, \tilde{V}'_σ は $\mathbb{C}[\text{Mat}_n]_v^*$ の部分 $\mathbb{C}[\text{Mat}_n]_v$ 加群となる.

これで各 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対してある $\mathbb{C}[\text{Mat}_n]_v^*$ 加群が得られたことになるが \tilde{V}'_σ はこのままでは $\mathbb{C}[SL_n]_v$ 加群とはならない. すなわち, 量子行列式の定める作用が恒等写像になっていない. この点を調節するために次のような作用の捻りを考える.

定義 3.6. 各 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対し, \mathbf{k} -代数同型 $\varphi_\sigma : \mathbb{C}[\text{Mat}_n]_v \rightarrow \mathbb{C}[\text{Mat}_n]_v$ が次で定まる.

$$c_{ij} \mapsto (-v)^{\kappa_\sigma(i)} c_{ij}. \quad \text{ここで, } \kappa_\sigma(i) := \left| \left\{ j \mid i < j, \sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j) \right\} \right|,$$

とする. $\kappa_\sigma(i)$ は先の Rothe 図を用いて述べると, σ に対応する Rothe 図の i 行目の \searrow の個数である.

ここで, $\mathbb{C}[\text{Mat}_n]_v$ 加群 V'_σ を, ベクトル空間としては $V'_\sigma = \tilde{V}'_\sigma$, $\mathbb{C}[\text{Mat}_n]_v$ 加群構造 \cdot_{new} を

$$c \in \mathbb{C}[\text{Mat}_n]_v, v \in V'_\sigma \text{ に対し, } c \cdot_{\text{new}} v = \varphi_\sigma(c) \cdot v,$$

としたものと定める.

この準備のもと, 本稿の主定理は以下のように述べられる.

定理 3.7 (O). 各 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対し, V'_σ は自然に $\mathbb{C}[SL_n]_v$ -加群とみなせる. さらに, $\mathbb{C}[SL_n]_v$ 加群として $V'_\sigma \simeq V_\sigma$.

さらに, σ の最短表示 $\sigma = s_{i_1} \cdots s_{i_{l(\sigma)}}$ を,

$$i_k := \max \left\{ i \in \{1, \dots, n\} \mid \kappa_{s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1}} \sigma(i) \neq 0 \right\} \quad (k = 1, \dots, l(\sigma)),$$

ととり, 全単射

$$\omega : \{1, \dots, l(\sigma)\} \rightarrow \{(\sigma(i), j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} \mid i > j, \sigma(i) < \sigma(j)\}$$

を,

$$\omega(k) = (s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}(i_k), s_{i_{l(\sigma)}} \cdots s_{i_{k+1}}(i_k)) \quad (k = 1, \dots, l(\sigma)),$$

ととると, $\mathbb{C}[SL_n]_v$ 加群の同型射は,

$$V_{s_{i_1}} \otimes \cdots \otimes V_{s_{i_{l(\sigma)}}} \rightarrow V'_\sigma, |m_1\rangle \otimes \cdots \otimes |m_{l(\sigma)}\rangle \mapsto c_{(m_i)_{i=1, \dots, l(\sigma)}} \left| ((m_i)_{\omega(i)})_{i=1, \dots, l(\sigma)} \right\rangle,$$

で与えられる. ここに,

$$c_{(m_i)_{i=1, \dots, l(\sigma)}} = (-v)^{-\sum_{i=1}^{l(\sigma)} m_i \kappa_{s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1}} \sigma(i)} \prod_{i=1}^{l(\sigma)} \left(\prod_{j=1}^{m_i} (1 - v^{2j}) \right),$$

であり, $\left| ((m_i)_{\omega(i)})_{i=1, \dots, l(\sigma)} \right\rangle$ は $m_{\omega(i)} = m_i$ とした, $\left| (m_{\sigma(i)j})_{i>j, \sigma(i)<\sigma(j)} \right\rangle$ を意味する.

例 3.8. $n = 3$, $\sigma = s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$ の場合. σ に対応する Rothe 図は以下のようになる.

| | | |
|--|--|--|
| | | |
| | | |
| | | |

これより, $\kappa_\sigma(1) = 2$, $\kappa_\sigma(2) = 1$, $\kappa_\sigma(3) = 0$ なので, $i_1 = 2$ である. ($\sigma = s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$ の最短表示の取り方はこの 2 通りのみなのでここで最短表示の取り方は決まるが, 以下引き続き定義通り最短表示を決定する.)

次に, $s_{i_1} \sigma = s_1 s_2$ に対応する Rothe 図は以下のようになる.

| | | |
|--|--|--|
| | | |
| | | |
| | | |

これより, $\kappa_{s_{i_1} \sigma}(1) = 2$, $\kappa_{s_{i_1} \sigma}(2) = 0$, $\kappa_{s_{i_1} \sigma}(3) = 0$ なので, $i_2 = 1$ である.
最後に, $s_{i_2} s_{i_1} \sigma = s_2$ に対応する Rothe 図は以下のようになる.

| | | |
|--|--|--|
| | | |
| | | |
| | | |

これより, $\kappa_{s_{i_2} s_{i_1} \sigma}(1) = 0$, $\kappa_{s_{i_2} s_{i_1} \sigma}(2) = 1$, $\kappa_{s_{i_2} s_{i_1} \sigma}(3) = 0$ なので, $i_3 = 2$ である.
さらに, $\omega(1) = (2, 1)$, $\omega(2) = (1, 1)$, $\omega(3) = (1, 2)$ となる.

以上より, \mathbf{k} -線型写像 $V_{s_2} \otimes V_{s_1} \otimes V_{s_2} \rightarrow V'_\sigma$,

$$|m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \otimes |m_3\rangle \mapsto (-v)^{-m_1 - 2m_2 - m_3} \prod_{i=1}^3 \left(\prod_{j=1}^{m_i} (1 - v^{2j}) \right) |((m_i)_{\omega(i)})_{i=1,2,3}\rangle,$$

が $\mathbb{C}[SL_3]_v$ 加群の同型を与える.

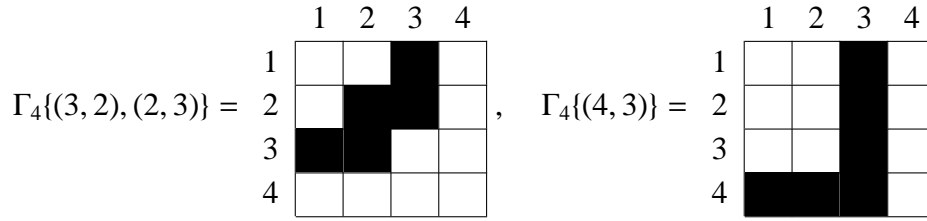
本節の残りで, c_{ij} の $\left\{ (m_{\sigma(i)j})_{i>j, \sigma(i)<\sigma(j)} \right\}$ への作用について述べる. これにあたって便利な記号を一つ導入しておく.

記号 3.9. $i_1 > \dots > i_t$ かつ $j_1 < \dots < j_t$ なる $i_1, \dots, i_t, j_1, \dots, j_t \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対し,

$$\Gamma_n\{(i_1, j_1), \dots, (i_t, j_t)\} := \left(\bigcup_{s=1}^t \{(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\} \mid i \leq i_s, j \leq j_s\} \right) \setminus \left(\bigcup_{s=1}^t \{(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\} \mid i \leq i_s - 1, j \leq j_s - 1\} \right),$$

とおく.

例 3.10. $n = 4$ の場合.



ここで、黒色の箱に対応する (i, j) が左辺の元である.

命題 3.11 (O). $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対し,

$$c_{kl\text{-new}} \left| (m_{\sigma(i)j})_{i>j, \sigma(i)<\sigma(j)} \right\rangle = (-v)^{k_{\sigma(k)}} \sum_{\substack{t \in \mathbb{Z}_{>0} \\ k=i_1 > \dots > i_t \\ j_1 < \dots < j_t = l \\ (*)}} v^{-\sum_{s=1}^t m_{i_s} + \sum_{(i,j) \in (**)} m_{ij}} \prod_{s=2}^t (v^{m_{i_s j_{s-1}} + 1} - v^{-(m_{i_s j_{s-1}} + 1)}) \left| (m'_{\sigma(i)j})_{i>j, \sigma(i)<\sigma(j)} \right\rangle,$$

ここで, $(*) = \llbracket i_s = \sigma(j_s) \text{ 又は } \lceil \sigma^{-1}(i_s) > j_s \text{ かつ } i_s < \sigma(j_s) \rceil (s = 1, \dots, t) \rrbracket$,

$(**) = \Gamma_n \{(i_1, j_1), \dots, (i_t, j_t)\}$ であり,

$$m'_{\sigma(i)j} = \begin{cases} m_{\sigma(i)j} - 1 & \text{ある } s \text{ に対して } (\sigma(i), j) = (i_s, j_s) \text{ となるとき,} \\ m_{\sigma(i)j} + 1 & \text{ある } s \text{ に対して } (\sigma(i), j) = (i_s, j_{s-1}) \text{ となるとき,} \\ m_{\sigma(i)j} & \text{その他の場合.} \end{cases}$$

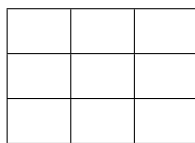
この計算公式も一見複雑であるが Rothe 図を用いると次のように述べることができる. (cf. 例 3.12.)

「 c_{kl} の $\left| (m_{\sigma(i)j})_{i>j, \sigma(i)<\sigma(j)} \right\rangle$ へ作用を考えると $(i, 1)$ を始点とし, $(1, j)$ を終点とするような Rothe 図内での “右又は上方向にのみ進める折れ線型の経路” を考える. ここで, 経路の角にあたる部分には \lceil または \rfloor があるようにする. このようにして定まる各径路と上の公式の右辺の各項が一対一に対応する. 経路を一つ定めると補正項 $(-v)^{k_{\sigma(k)}}$ 以外の部分は次のように決まる.

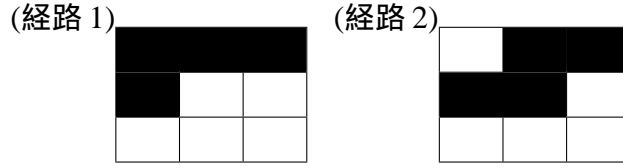
- (1) 経路の角以外の部分が \lceil を通過すれば対応する (i, j) について $v^{m_{ij}}$ をつけ,
- (2) 経路の \lceil 型の角に対応する (i, j) について $v^{m_{ij}}(v^{m_{ij}+1} - v^{-(m_{ij}+1)})$ をつけてさらに $m'_{ij} = m_{ij} + 1$ とし,
- (3) 経路の \rfloor 型の角が \lceil のある位置であった場合, 対応する (i, j) について $m'_{ij} = m_{ij} - 1$ とする.

以下に計算を実行した例を記す.

例 3.12. $n = 3, \sigma = s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$ の場合. まず, σ に対応する Rothe 図は以下である.



$c_{23 \cdot \text{new}} |(m_{21}, m_{12}, m_{11})\rangle$ について考える. 上に述べた形の考えられる経路は以下の2通りである.

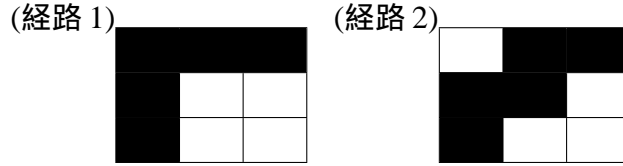


よって, もとの Rothe 図とも比べて,

$$\begin{aligned}
 & c_{23 \cdot \text{new}} |(m_{21}, m_{12}, m_{11})\rangle \\
 &= (-v)\{(経路 1 \text{ に対応する項}) + (経路 2 \text{ に対応する項})\} \\
 &= (-v)v^{m_{11}+m_{12}}(v^{m_{11}+1} - v^{-(m_{11}+1)})|(m_{21}-1, m_{12}, m_{11}+1)\rangle \\
 &\quad + (-v)v^{m_{21}+m_{12}}(v^{m_{12}+1} - v^{-(m_{12}+1)})|(m_{21}, m_{12}+1, m_{11})\rangle,
 \end{aligned}$$

となる. 経路 1 の (2, 1) は「型」の角とみなすことに注意する.

$c_{33 \cdot \text{new}} |(m_{21}, m_{12}, m_{11})\rangle$ について考える. 上に述べた形の考えられる経路は以下の2通りである.



よって, もとの Rothe 図とも比べて,

$$\begin{aligned}
 & c_{33 \cdot \text{new}} |(m_{21}, m_{12}, m_{11})\rangle \\
 &= \{(経路 1 \text{ に対応する項}) + (経路 2 \text{ に対応する項})\} \\
 &= v^{m_{21}+m_{11}+m_{12}}(v^{m_{11}+1} - v^{-(m_{11}+1)})|(m_{21}, m_{12}, m_{11}+1)\rangle \\
 &\quad + v^{m_{21}+m_{12}}(v^{m_{21}+1} - v^{-(m_{21}+1)})(v^{m_{12}+1} - v^{-(m_{12}+1)})|(m_{21}+1, m_{12}+1, m_{11})\rangle,
 \end{aligned}$$

となる.

最後に主定理の証明の概略をごく簡単に述べる. まず, $c_{kl} \cdot \left| \vec{\prod}_{i,j} c_{ij}^{a_{ij}} \right\rangle$ を計算する. (命題 3.11 と似た形の公式が得られる.) そこで得られた公式より命題 3.5 を得る. 次に, 量子行列式の $|(0)_{i>j, \sigma(i)<\sigma(j)}\rangle$ への作用を見て, それが 1 倍となるように作用を捻る. (量子行列式は $\mathbb{C}[Mat_n]_v$ の中心に入っていることに注意.) 最後にここで得られた $\mathbb{C}[SL_n]_v$ 加群 V'_σ が Soibelman の構成した V_σ と同型であることを, 具体的な生成元の作用を見ながら σ の長さに関する帰納法によって示す. これにより, V'_σ の単純性も従う. また, V'_σ と相性のよい具体的な最短表示の取り方や $\omega, c_{(m_i)_{i=1, \dots, l(\sigma)}}$ については主定理の証明中の帰納法から同時に得られる.

付録. 例： $\mathbb{C}[SL_2]_v$ の場合

$n = 2$ の場合については上記の定理が容易に証明できるので最後にこの場合について計算の様子を見ておく.

$\mathbb{C}[Mat_2]_v$ の生成元 c_{ij} ($i, j = 1, 2$) の $|c_{22}^{a_{22}} c_{21}^{a_{21}} c_{12}^{a_{12}} c_{11}^{a_{11}}\rangle$ ($a_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, i, j = 1, 2$) への作用は以下のように与えられる.

補題 A.1.

$$\begin{aligned} c_{11} \cdot |c_{22}^{a_{22}} c_{21}^{a_{21}} c_{12}^{a_{12}} c_{11}^{a_{11}}\rangle &= |c_{22}^{a_{22}} c_{21}^{a_{21}} c_{12}^{a_{12}} c_{11}^{a_{11}-1}\rangle, \\ c_{12} \cdot |c_{22}^{a_{22}} c_{21}^{a_{21}} c_{12}^{a_{12}} c_{11}^{a_{11}}\rangle &= v^{a_{11}} |c_{22}^{a_{22}} c_{21}^{a_{21}} c_{12}^{a_{12}-1} c_{11}^{a_{11}}\rangle, \\ c_{21} \cdot |c_{22}^{a_{22}} c_{21}^{a_{21}} c_{12}^{a_{12}} c_{11}^{a_{11}}\rangle &= v^{a_{11}} |c_{22}^{a_{22}} c_{21}^{a_{21}-1} c_{12}^{a_{12}} c_{11}^{a_{11}}\rangle, \\ c_{22} \cdot |c_{22}^{a_{22}} c_{21}^{a_{21}} c_{12}^{a_{12}} c_{11}^{a_{11}}\rangle &= v^{a_{12}+a_{21}} |c_{22}^{a_{22}-1} c_{21}^{a_{21}} c_{12}^{a_{12}} c_{11}^{a_{11}}\rangle \\ &\quad + v^{a_{11}} (v^{a_{11}+1} - v^{-(a_{11}+1)}) |c_{22}^{a_{22}} c_{21}^{a_{21}-1} c_{12}^{a_{12}-1} c_{11}^{a_{11}+1}\rangle. \end{aligned}$$

ここで, $c_{ij}^{-1} := 0$ ($i, j = 1, 2$) とする.

証明. 示すべき式は以下と等価である.

$$\begin{aligned} (c_{22}^{a_{22}} c_{21}^{a_{21}} c_{12}^{a_{12}} c_{11}^{a_{11}})c_{11} &= c_{22}^{a_{22}} c_{21}^{a_{21}} c_{12}^{a_{12}} c_{11}^{a_{11}+1}, \\ (c_{22}^{a_{22}} c_{21}^{a_{21}} c_{12}^{a_{12}} c_{11}^{a_{11}})c_{12} &= v^{a_{11}} c_{22}^{a_{22}} c_{21}^{a_{21}} c_{12}^{a_{12}+1} c_{11}^{a_{11}}, \\ (c_{22}^{a_{22}} c_{21}^{a_{21}} c_{12}^{a_{12}} c_{11}^{a_{11}})c_{21} &= v^{a_{11}} c_{22}^{a_{22}} c_{21}^{a_{21}+1} c_{12}^{a_{12}} c_{11}^{a_{11}}, \\ (c_{22}^{a_{22}} c_{21}^{a_{21}} c_{12}^{a_{12}} c_{11}^{a_{11}})c_{22} &= v^{a_{12}+a_{21}} c_{22}^{a_{22}+1} c_{21}^{a_{21}} c_{12}^{a_{12}} c_{11}^{a_{11}} \\ &\quad + v^{a_{11}-1} (v^{a_{11}} - v^{-a_{11}}) c_{22}^{a_{22}} c_{21}^{a_{21}+1} c_{12}^{a_{12}+1} c_{11}^{a_{11}-1}. \end{aligned}$$

ここでは最後の式についてのみ証明する. 残りの式も c_{ij} らの満たす関係式から容易に導出される. c_{ij} らの満たす関係式より,

$$\begin{aligned} c_{11}^{a_{11}} c_{22} &= c_{22} c_{11}^{a_{11}} + (v - v^{-1}) \sum_{i=0}^{a_{11}-1} c_{11}^{a_{11}-i-1} c_{12} c_{21} c_{11}^i \\ &= c_{22} c_{11}^{a_{11}} + (v - v^{-1}) \left(\sum_{i=0}^{a_{11}-1} v^{2(a_{11}-i-1)} \right) c_{21} c_{12} c_{11}^{a_{11}-1} \\ &= c_{22} c_{11}^{a_{11}} + v^{a_{11}-1} (v^{a_{11}} - v^{-a_{11}}) c_{21} c_{12} c_{11}^{a_{11}-1}. \end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned} (c_{22}^{a_{22}} c_{21}^{a_{21}} c_{12}^{a_{12}} c_{11}^{a_{11}})c_{22} &= c_{22}^{a_{22}} c_{21}^{a_{21}} c_{12}^{a_{12}} (c_{22} c_{11}^{a_{11}} + v^{a_{11}-1} (v^{a_{11}} - v^{-a_{11}}) c_{21} c_{12} c_{11}^{a_{11}-1}) \\ &= v^{a_{12}+a_{21}} c_{22}^{a_{22}+1} c_{21}^{a_{21}} c_{12}^{a_{12}} c_{11}^{a_{11}} \\ &\quad + v^{a_{11}-1} (v^{a_{11}} - v^{-a_{11}}) c_{22}^{a_{22}} c_{21}^{a_{21}+1} c_{12}^{a_{12}+1} c_{11}^{a_{11}-1}, \end{aligned}$$

となる. □

ここで,

$$|(\)\rangle := \sum_{m_{11}, m_{22} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} |c_{22}^{m_{22}} c_{11}^{m_{11}}\rangle, \quad |m\rangle := \sum_{m_{21}, m_{12} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} |c_{21}^{m_{21}} c_{12}^{m_{12}} c_{11}^m\rangle \in \mathbb{C}[\text{Mat}_2]_v^*,$$

($m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) とおく. さらに,

$$\tilde{V}'_e := \mathbf{k} \cdot |(\)\rangle, \quad \tilde{V}'_{s_1} := \text{span}_{\mathbf{k}} \{ |m\rangle \mid m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \},$$

とおく.

補題 A.2. $\tilde{V}'_e, \tilde{V}'_{s_1}$ は $\mathbb{C}[\text{Mat}_2]_v^*$ の部分 $\mathbb{C}[\text{Mat}_2]_v$ 加群である.

証明. 補題 A.1 より,

$$\begin{aligned} c_{11} \cdot |(\)\rangle &= |(\)\rangle, & c_{12} \cdot |(\)\rangle &= 0, \\ c_{21} \cdot |(\)\rangle &= 0, & T_{22} \cdot |(\)\rangle &= |(\)\rangle, \end{aligned}$$

$$c_{11} \cdot |m\rangle = \begin{cases} 0 & m = 0 \text{ のとき,} \\ |m-1\rangle & m \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ のとき,} \end{cases}$$

$$c_{12} \cdot |m\rangle = v^m |m\rangle,$$

$$c_{21} \cdot |m\rangle = v^m |m\rangle,$$

$$c_{22} \cdot |m\rangle = v^m (v^{m+1} - v^{-(m+1)}) |m+1\rangle,$$

となる. よって, 補題 A.2 は示された. \square

最後に $\mathbb{C}[SL_2]_v$ 加群を得るために $\mathbb{C}[\text{Mat}_2]_v$ 加群 $\tilde{V}'_e, \tilde{V}'_{s_1}$ への $\mathbb{C}[\text{Mat}_2]_v$ の作用を捻る. (なお, \tilde{V}'_e はすでに $\mathbb{C}[SL_2]_v$ 加群とみなすことができる.) \mathbf{k} -代数同型 $\varphi_e, \varphi_{s_1} : \mathbb{C}[\text{Mat}_2]_v \rightarrow \mathbb{C}[\text{Mat}_2]_v$ が以下で与えられる.

$$\varphi_e = \text{id}_{\mathbb{C}[\text{Mat}_2]_v},$$

$$\varphi_{s_1}(c_{11}) = -vc_{11}, \quad \varphi_{s_1}(c_{12}) = -vc_{12},$$

$$\varphi_{s_1}(c_{21}) = c_{21}, \quad \varphi_{s_1}(c_{22}) = c_{22}.$$

ここで $\sigma = e, s_1$ に対して, $\mathbb{C}[\text{Mat}_2]_v$ 加群 V'_σ をベクトル空間としては $V'_\sigma = \tilde{V}'_\sigma$ とし, $\mathbb{C}[\text{Mat}_2]_v$ 加群構造 \cdot_{new} を,

$$c \in \mathbb{C}[\text{Mat}_2]_v, v \in V'_\sigma \text{ に対し, } c \cdot_{\text{new}} v := \varphi_\sigma(c) \cdot v,$$

として定めたものとする. このとき,

定理 A. 各 $\sigma \in \mathfrak{S}_2$ の元に対して, V'_σ は自然に $\mathbb{C}[SL_2]_v$ 加群とみなせる. さらに $\mathbb{C}[SL_2]_v$ 加群として, $V'_\sigma \simeq V_\sigma$. さらに, $\mathbb{C}[SL_2]_v$ 加群の同型射 $V_e \xrightarrow{\sim} V'_e, V_{s_1} \xrightarrow{\sim} V'_{s_1}$ はそれぞれ, $1 \mapsto |(\)\rangle, |m\rangle \mapsto (-v)^{-m} (\prod_{i=1}^m (1 - v^{2i})) |m\rangle$ で与えられる.

証明. $\sigma = e$ のときは $\mathbb{C}[SL_2]_v$ の余単位射 (定義, 事実 2.3) と補題 A.2 の証明を合わせると容易にわかる. これより, \mathbf{k} -線型同型 $V_{s_1} \rightarrow V'_{s_1}$, $|m\rangle \mapsto (-v)^{-m}(\prod_{i=1}^m(1-v^{2i}))|m\rangle$ が $\mathbb{C}[Mat_2]_v$ 加群の同型であることを示せばよい. $\mathbb{C}[SL_2]_v$ 加群 V_{s_1} は自然な商写像 $\mathbb{C}[Mat_2]_v \rightarrow \mathbb{C}[SL_2]_v$ を介して $\mathbb{C}[Mat_2]_v$ 加群みなせることに注意する. $\overline{|m\rangle} := (-v)^{-m}(\prod_{i=1}^m(1-v^{2i}))|m\rangle \in \mathbb{C}[Mat_2]_v^*$ ($m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) とする. このとき,

$$\begin{aligned} c_{11 \cdot \text{new}} \overline{|m\rangle} &= \begin{cases} 0 & m = 0 \text{ のとき,} \\ (1-v^{2m})\overline{|m-1\rangle} & m \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ のとき,} \end{cases} \\ c_{12 \cdot \text{new}} \overline{|m\rangle} &= -v^{m+1}\overline{|m\rangle}, \\ c_{21 \cdot \text{new}} \overline{|m\rangle} &= v^m\overline{|m\rangle}, \\ c_{22 \cdot \text{new}} \overline{|m\rangle} &= \overline{|m+1\rangle}, \end{aligned}$$

となる. これと定義 2.4 にある式を比べると定理 A が証明されていることがわかる. \square

謝辞

最後になりましたが, 第 19 回代数若手研究会において講演の機会を与えてくださった世話人の内藤様, 亀山様, 前川様, 沼田様にこの場を借りて御礼申し上げます.

参考文献

- [Kap94] Kapranov, M. M. and V. A. Voevodsky: 2-categories and Zamolodchikov tetrahedra equations, in *Algebraic groups and their generalizations: quantum and infinite-dimensional methods (University Park, PA, 1991)*, Vol. 56 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pp. 177–259, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [Kas93] Kashiwara, M.: Global crystal bases of quantum groups, *Duke Math. J.*, Vol. 69, No. 2, pp. 455–485, 1993.
- [Kor98] Korogodski, L. I. and Y. S. Soibelman: *Algebras of functions on quantum groups. Part I*, Vol. 56 of *Mathematical Surveys and Monographs*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [Kun12] Kuniba, A. and M. Okado: Tetrahedron and 3D reflection equations from quantized algebra of functions, *J. Phys. A*, Vol. 45, No. 46, pp. 465206, 27, 2012.

- [Kun13] Kuniba, A., M. Okado, and Y. Yamada: A Common Structure in PBW Bases of the Nilpotent Subalgebra of $U_q(\mathfrak{g})$ and Quantized Algebra of Functions, *SIGMA*, Vol. 9, p. 49, 2013.
- [Soř90] Sořbel'man, Y. S.: Algebra of functions on a compact quantum group and its representations, *Algebra i Analiz*, Vol. 2, No. 1, pp. 190–212, 1990.
- [Vak88] Vaksman, L. L. and Y. S. Sořbel'man: An algebra of functions on the quantum group $SU(2)$, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, Vol. 22, No. 3, pp. 1–14, 96, 1988.