TORIC IDEALS OF SERIES AND PARALLEL CONNECTIONS OF MATROIDS

柴田 和樹 (立教大学大学院理学研究科)

1. Introduction

集合 $E = [d] := \{1, \ldots, d\}$ と $(\emptyset \neq)\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_n\} \subset 2^E$ $(\# B_i = r)$ に対し, 以下の条件を満たすとき, $M = (E, \mathcal{B})$ を**マトロイド**という.

- 任意の $x \in B_i \setminus B_j$ $(1 \leq i, j \leq n)$ に対し, $(B_i \cup \{y\}) \setminus \{x\} \in \mathcal{B}$ となる $y \in B_j \setminus B_i$ が存在する.

集合 $\mathcal{B}$ の元のことをマトロイドの *basis* と呼び, r を *rank* という. 以下, マトロイド M の bases の集合を $\mathcal{B}(M)$ と表す. 次にマトロイドに付随するトーリックイデアルを定義する. K を体とし, $K[X] = K[x_1, \ldots, x_n]$ を n 変数多項式環とする. 配置 $\mathcal{D}_M = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\} \subset \mathbb{Z}^d$ を

$$\mathbf{b}_j = \sum_{l \in B_j} \mathbf{e}_l \quad (1 \leq j \leq n)$$

と定める. ここで, $\mathbf{e}_j$ は $\mathbb{R}^d$ の単位座標ベクトルとする. また, 配置 $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ と $d \times n$ 整数行列 $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ を同一視する. このとき M の**トーリックイデアル** J_M を

$$J_M = \left\langle \prod_{l=1}^{u} x_{j_l} - \prod_{l=1}^{u} x_{k_l} \;\middle|\; \sum_{l=1}^{u} (\mathbf{b}_{j_l} - \mathbf{b}_{k_l}) = \mathbf{0} \right\rangle$$

と定義する. また半群環 $R_M = K[X]/J_M$ を M の *bases monomial ring* と呼ぶ. この半群環に対し, 以下のことが知られている.

Proposition 1.1. 任意のマトロイド M に対し, bases monomial ring R_M は normal である. 特に, R_M は Cohen-Macaulay である.

マトロイドのトーリックイデアルに関し, 以下の予想が存在する.

Conjecture 1.2. 任意のマトロイド M に対し,

(a) J_M は 2 次生成 ; [16, Conjecture 12]
(b) J_M は 2 次のグレブナー基底をもつ.

Conjecture 1.2 (a) は

- 横断マトロイド
- グラフィックマトロイド ($M(G)$ と表す)
- rank ≤ 3

のとき成り立ち, Conjecture 1.2 (b) は

- 一様マトロイド ($U_{r,d}$ と表す)
- rank ≤ 2

のとき正しい.

次に, マトロイドの操作についていくつか紹介する. M を E 上のマトロイドとし, $\mathcal{B}(M)$ を M の bases の集合とする. このとき, $p \in E$ が M の *loop* (resp. *coloop*) であるとは, すべての $B \in \mathcal{B}(M)$ に対し, $p \notin B$ (resp. $p \in B$) となるときにいう. 以下, M は loop, coloop を持たないものとする.

E 上のマトロイド M の bases の集合 $\mathcal{B}(M)$ に対し, 以下の集合を考える

- $\mathcal{B}^*(M) = \{E \setminus B \mid B \in \mathcal{B}(M)\}$
- $\mathcal{B}(M) \setminus p = \{B \mid p \notin B \in \mathcal{B}(M)\} \quad (p \in E)$

このとき $(E, \mathcal{B}^*(M))$, $(E \setminus p, \mathcal{B}(M) \setminus p)$ はそれぞれマトロイドになる. このマトロイドを M の *dual*, p での *deletion* といい, M^*, $M \setminus p$ と表す. また, $(M^* \setminus p)^*$ をマトロイド M の p での *contraction* といい, M/p と置く.
また, M_1, M_2 を E_1, E_2 上のマトロイドとし, $\mathcal{B}(M_1)$, $\mathcal{B}(M_2)$ をそれぞれのマトロイドの bases の集合とする. ここで, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ とする. 以下の集合を考える.

$$\mathcal{B}(M_1) \oplus \mathcal{B}(M_2) = \{B \cup D \mid B \in \mathcal{B}(M_1),\ D \in \mathcal{B}(M_2)\}$$

このとき, $(E_1 \cup E_2, \mathcal{B}(M_1) \oplus \mathcal{B}(M_2))$ はマトロイドとなる. このマトロイドを M_1, M_2 の *1-sum* といい, $M_1 \oplus M_2$ と表す. これらのマトロイドに対し, 以下の結果が知られている.

Proposition 1.3. *任意のマトロイド M, M_1, M_2 に対し, トーリックイデアル J_M, J_{M_1}, J_{M_2} が 2 次生成 (resp. 2 次グレブナー基底をもつ) ならば, J_{M^*}, $J_{M/p}$, $J_{M \setminus p}$, $J_{M_1 \oplus M_2}$ も 2 次生成 (resp. 2 次グレブナー基底をもつ).*

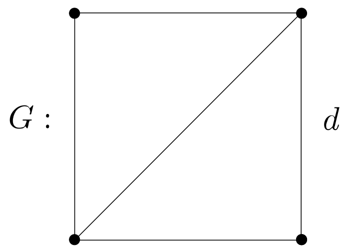
- $R_M \cong R_{M^*}$ (特に, $J_M = J_{M^*}$)
- $R_{M/p}, R_{M \setminus p}$: R_M の combinatorial pure subring
- $R_{M_1 \oplus M_2}$: R_{M_1}, R_{M_2} の Segre 積

2. A series and parallel extension of a matroid

M を E 上のマトロイドとする. マトロイド M の $d \in E$ での *series extension* とは

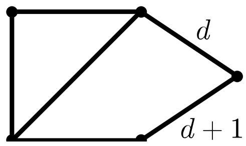
$$\{B \cup \{d+1\} \mid B \in \mathcal{B}(M)\} \cup \{B \cup \{d\} \mid d \notin B \in \mathcal{B}(M)\}$$

を bases の集合とするマトロイドのことである. このマトロイドを $M +_d (d+1)$ と表す. また, $(M^* +_d (d+1))^*$ を M の *parallel extension* という.



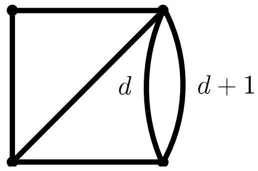
$M = M(G)$

$G_{\mathcal{S}}$:



$M +_d (d+1) = M(G_{\mathcal{S}})$

$G_{\mathcal{P}}$:



$[M +_d (d+1)]^* = M(G_{\mathcal{P}})$

マトロイド M の bases の集合を $\mathcal{B}(M) = \{B_1, \dots, B_\gamma, \dots, B_n\}$ とする．ここで, $d \notin B_j$ $(1 \le d \le \gamma)$, $d \in B_j$ $(\gamma+1 \le j \le n)$ とする．また, マトロイドに付随する配置を $\mathcal{D}_M = \{\mathbf{b}^1_j \mid j \in [n]\}$ と置く．次に新たな配置 $\widetilde{\mathcal{D}}_M$ を

$$\widetilde{\mathcal{D}}_M = \{(\mathbf{b}^i_j, \mathbf{a}^i) \mid i \in [2],\ j \in [\alpha_i]\}$$

と定義する．ここで,

- $\mathbf{b}^1_j = \mathbf{b}^2_j$ $(1 \le j \le \gamma)$
- $\binom{\alpha_1}{\alpha_2} = \binom{n}{\gamma}$
- $\mathbf{a}^1 = \binom{0}{1}$, $\mathbf{a}^2 = \binom{1}{1}$

とする．このとき, トーリックイデアル $J_{\widetilde{\mathcal{D}}_M}$ について以下のことが成り立つ．

Theorem 2.1. トーリックイデアル $J_{\mathcal{D}_M}$ が 2 次生成 *(resp.* 2 次グレブナー基底をもつ*)* ならば, $J_{\widetilde{\mathcal{D}}_M}$ も 2 次生成 *(resp.* 2 次グレブナー基底をもつ*).*

ここで, 配置 $\widetilde{\mathcal{D}}_M$ はマトロイドからつくられる配置ではない．しかし, $\widetilde{\mathcal{D}}_M$ において, 行基本変形を施すことにより, series extension に付随する配置を構成することができる．

$$\widetilde{\mathcal{D}}_M \to \left(\begin{array}{cccccc|ccc} \mathbf{b}^1_1 & \cdots & \mathbf{b}^1_\gamma & \mathbf{b}^1_{\gamma+1} & \cdots & \mathbf{b}^1_n & \mathbf{b}^2_1 & \cdots & \mathbf{b}^2_\gamma \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hline 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

上の行列の 1 行目から $d+1$ 行目が series extension からつくられる配置となる．以上より, 以下の結果が得られる．

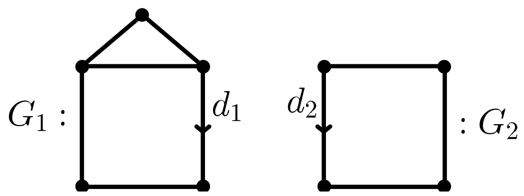
Theorem 2.2. 任意のマトロイド M に対し, J_M が 2 次生成 *(resp.* 2 次グレブナー基底をもつ*)* ならば, $J_{M+_d(d+1)}$ も 2 次生成 *(resp.* 2 次グレブナー基底をもつ*).*

3. A series and parallel connection of matroids

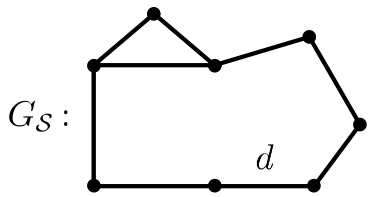
この節では, マトロイドを組み合わせる操作について考察する．
M_1, M_2 を $E_1 = [d_1]$, $E_2 = [d_2]$ 上のマトロイドとし, $\mathcal{B}(M_1), \mathcal{B}(M_2)$ を M_1, M_2 の bases の集合とする．ここで, 集合 $[d_2]$ と集合 $\{d_1+1, \dots, d_1+d_2\}$ を同一視する.$(d = d_1 = d_2$ とする$)$ また, $E_1 \cap E_2 = \{d\}$, $E = E_1 \cup E_2$ とする．ここで, 以下の集合を考える:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \{B \cup D \mid B \in \mathcal{B}(M_1), D \in \mathcal{B}(M_2), B \cap D = \emptyset\}.$$

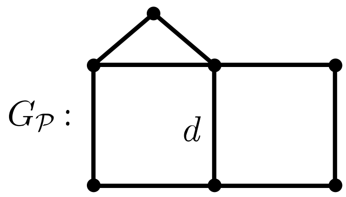
このとき, $(E, \mathcal{B})$ はマトロイドになる．このマトロイドを M_1, M_2 の *series connection* といい, $S(M_1, M_2)$ と表す．また, $[S(M_1^*, M_2^*)]^*$ を *parallel connection* といい, $P(M_1, M_2)$ と表す．更に, M_1, M_2 の 2-*sum* $M_1 \oplus_2 M_2$ を $S(M_1, M_2)/d$ と定義する．



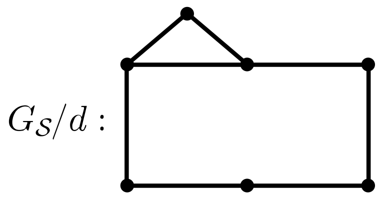
$M_1 = M(G_1)$, $M_2 = M(G_2)$



$S(M_1, M_2) = M(G_{\mathcal{S}})$



$P(M_1, M_2) = M(G_{\mathcal{P}})$



$M_1 \oplus_2 M_2 = M(G_{\mathcal{S}}/d)$

マトロイド M_1, M_2 の bases の集合をそれぞれ

$$\mathcal{B}(M_1) = \{B_1, \ldots, B_{\gamma_1}, \ldots, B_{n_1}\}, \qquad \mathcal{B}(M_2) = \{D_1, \ldots, D_{\gamma_2}, \ldots, D_{n_2}\}$$

とする．ここで, $d_1 \notin B_j$ $(1 \leq d \leq \gamma_1)$, $d_2 \notin D_k$ $(1 \leq k \leq \gamma_2)$ とする．また, マトロイドに付随する 2 つの配置を $\mathcal{D}_{M_1} = \{\mathbf{b}_j^1 \mid j \in [n_1]\}$, $\mathcal{D}_{M_2} = \{\mathbf{d}_k^2 \mid k \in [n_2]\}$ と置く．次に新たな配置 $\widetilde{\mathcal{D}}_{M_1}$, $\widetilde{\mathcal{D}}_{M_2}$ を

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{M_1} = \{(\mathbf{b}_j^i, \mathbf{a}^i) \mid i \in [2],\ j \in [\alpha_i]\}, \qquad \widetilde{\mathcal{D}}_{M_2} = \{(\mathbf{d}_k^i, \mathbf{a}^i) \mid i \in [2],\ k \in [\beta_i]\}$$

と定義する．ここで,

- $\mathbf{b}_j^1 = \mathbf{b}_j^2$ $(1 \leq j \leq \gamma_1)$, $\quad \mathbf{d}_k^1 = \mathbf{d}_k^2$ $(1 \leq k \leq \gamma_2)$
- $\binom{\alpha_1}{\alpha_2} = \binom{n_1}{\gamma_1}$, $\quad \binom{\beta_1}{\beta_2} = \binom{\gamma_2}{n_2}$
- $\mathbf{a}^1 = \binom{0}{1}$, $\mathbf{a}^2 = \binom{1}{1}$

とする. 更に, 新たな配置 $\widetilde{\mathcal{D}}$ を以下のように定める:

$$\widetilde{\mathcal{D}} = \{(\mathbf{b}^i_j, \mathbf{d}^i_k, \mathbf{a}^i) \mid i \in [2], j \in [\alpha_i], k \in [\beta_i]\}$$

このとき, トーリックイデアル $J_{\widetilde{\mathcal{D}}}$ について以下のことが成り立つ.

Theorem 3.1. 任意のマトロイド M_1, M_2 に対し, $J_{\mathcal{D}_{M_1}}$, $J_{\mathcal{D}_{M_2}}$ が 2 次生成 *(resp.* 2 次グレブナー基底をもつ*)* ならば, $J_{\widetilde{\mathcal{D}}}$ も 2 次生成 *(resp.* 2 次グレブナー基底をもつ*).*

上の定理は toric fiber product [5, 14] の理論を用いることにより, 証明することができる.

Section 2 と同様に $\widetilde{\mathcal{D}}$ はマトロイドに付随する配置とはならない. しかし, 行基本変形, combinatorial pure subring [7, 8] の理論を用いることにより, 以下の結果が得られる:

Theorem 3.2. 任意のマトロイド M_1, M_2 に対し, J_{M_1}, J_{M_2} が 2 次生成 *(resp.* 2 次グレブナー基底をもつ*)* ならば, $J_{S(M_1,M_2)}$, $J_{P(M_1,M_2)}$, $J_{M_1 \oplus_2 M_2}$ も 2 次生成 *(resp.* 2 次グレブナー基底をもつ*).*

この定理を用いることにより, 以下の事実が従う.

Theorem 3.3. マトロイド M が $M(K_4)$, $\mathcal{W}^3$, P_6, Q_6*-minor* をもたないならば, J_M は 2 次グレブナー基底をもつ. ここで,

- $\mathcal{B}(M(K_4)) = \{X \subset [6] \mid \#X = 3\} \setminus \{\{1,3,4\},\{2,4,5\},\{1,2,6\},\{3,5,6\}\}$
- $\mathcal{B}(\mathcal{W}^3) = \{X \subset [6] \mid \#X = 3\} \setminus \{\{1,3,4\},\{2,4,5\},\{3,5,6\}\}$
- $\mathcal{B}(P_6) = \{X \subset [6] \mid \#X = 3\} \setminus \{\{1,2,3\}\}$
- $\mathcal{B}(Q_6) = \{X \subset [6] \mid \#X = 3\} \setminus \{\{1,2,3\},\{3,4,5\}\}$

である.

この定理は以下の結果から直ちに従う.

Theorem 3.4. [3, Corollary 3.1] マトロイド M に対し, 以下は同値

- M は $M(K_4)$, $\mathcal{W}^3$, P_6, Q_6*-minor* をもたない*;*
- M は一様マトロイドの 1*-sum,* 2*-sum* の *minor* である*.*

M を E 上のマトロイドとする. このとき, 関数 rk を以下のように定義する:

$$\mathrm{rk} \;:\; 2^E \to \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad X \mapsto \#B_X,$$

ここで, B_X を $M \setminus (E - X)$ の basis とする. この rk を M の *rank function* と呼ぶ. また, $\lambda_M(X) := \mathrm{rk}(X) + \mathrm{rk}(E - X) - r(M)$ $(X \subset E)$ とおく. ここで, $r(M)$ を M の rank とする. この $\lambda_M(X)$ を M の *connectivity function* という. $X \subset E$ に対し, $\lambda_M(X) < k$, $\min\{\#X, \#(E - X)\} \geq k$ $(k \in \mathbb{Z}_{>0})$ の 2 つを満たすとき, $(X, E - X)$ を M の k-separation と呼ぶ. すべての $n \geq 2$ に対し, M が n*-connected* であるとは, 任意の $k < n$ について, M が k-separation をもたないときにいう.

3-connected でないすべてのマトロイドは, ある 3-connected マトロイドの 1-sum, 2-sum の操作を繰り返すことにより構成することができる. 以上より, Conjecture 1.2 を証明するためには以下の予想が成り立つのかどうか調べれば良い.

Conjecture 3.5. 任意の 3*-connected* なマトロイド M に対し, J_M は 2 次生成 *(resp.* 2 次グレブナー基底をもつ*).*

References

[1] J. Blasiak, The toric ideal of a graphic matroid is generated by quadrics, *Combinatorica*, **28**(3), (2008), 283-297.

[2] S. Blum, Base-sortable matroids and Koszulness of semigroup rings, *Europ. J. Combin.* **22** (2001), 937-951.

[3] B. Chaourar, "A characterization of uniform matroids," *ISRN Algebra*, vol. 2011, Article ID 208478, 4 pages, 2011. doi:10.5402/2011/208478.

[4] A. Conca, Linear spaces, transversal polymatroids and ASL domain, *J. Algebraic Comb.* **25** (2007), 25-41.

[5] A. Engström, T. Kahle, S. Sullivant, Multigraded commutative algebra of graph decompositions, *J. Algebraic Comb.* **39** (2014), 335-372.

[6] K. Kashiwabara, The toric ideal of a matroid of rank 3 is generated by quadrics, *Electron. J. Combin.*, **17**, (2010), #R28.

[7] H. Ohsugi, A geometric definition of combinatorial pure subrings and Gröbner bases of toric ideals of positive roots, *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, **56** (2007), no. 1, 27-44.

[8] H. Ohsugi, J. Herzog, T, Hibi, Combinatorial pure subrings, *Osaka J. Math.* **37** (2000), no. 3, 745-757.

[9] H. Ohsugi, T. Hibi, Compressed polytopes, initial ideals and complete multipartite grahs, *Illinois J. Math.* **44** (2000), no. **2**, 141-146.

[10] J. Oxley, Matroid Theory, Second Edition, Oxford University Press, New York, (2011).

[11] K. Shibata, Toric ideals of series and parallel connections of matroids, preprint. `arXiv:1312.3428 [math.CO]`

[12] B. Sturmfels, "Gröbner bases and convex polytopes," Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[13] B. Sturmfels, Equations defining toric varieties, *Proc. Sympos. Pure Math.* **62** (1997), 437-449.

[14] S. Sullivant, Toric fiber products, *J. Algebra* **316** (2007), no. 2, 560-577.

[15] N. White, The basis monomial ring of a matroid, *Adv. Math.* **24** (1977), 292-297.

[16] N. White, A unique exchange property for bases, *Linear Algebra Appl.* **31** (1980), 81-91.

Kazuki Shibata, Department of Mathematics, Graduate School of Science, Rikkyo University, Toshima-ku, Tokyo 171-8501, Japan.

E-mail address: `12rc003c@rikkyo.ac.jp`