スーパー代数群上の積分について

柴田　大樹* (筑波大学 数理物質科学研究科)

概要

代数群上の積分はその表現の研究において大切な役割を果たす．スーパー代数群でも同様のことがいえる．本稿ではスーパー代数群上の積分と付随する代数群の積分との関係を述べる．この研究は増岡彰 (筑波大学) 及び C. Pastro (九州大学) との共同研究である．

1　はじめに

$\Bbbk$ を単位元を持つ可換環とする．$\Bbbk$ 上の可換環のなす圏 $\mathrm{Alg}_{\Bbbk}$ から群の圏への表現可能な群関手 G を $\Bbbk$ 上のアフィン群スキームという．すなわち $\Bbbk$ 上の可換環 C が存在し $G(R) = \mathrm{Alg}_{\Bbbk}(C, R)$ とかけるような群関手である．G の群構造によって，C は可換ホップ代数となる．この C を $\mathcal{O}(G)$ とかく．逆に可換ホップ代数 C が与えられてたとき $\mathrm{Sp}\, C := \mathrm{Alg}_{\Bbbk}(C, -)$ とおくことで，これは自然に群関手となる．このような対応で，アフィン群スキームの圏と可換ホップ代数の圏は反圏同値である．特に C が有限生成代数のとき対応する G をアフィン代数群スキームという．基礎環 $\Bbbk$ が標数ゼロの代数的閉体のとき，アフィン代数群スキームといわゆる線型代数群の概念は一致する．簡単のために以降は単に代数群ということにしよう．前述の反圏同値のおかげで，代数群はホップ代数的手法を用いて研究することが可能となる．

近年，物理学からの要請から “スーパー” 数学への関心が高まってきている．スーパーとは $\mathbb{Z}_2(= \{0, 1\})$-graded と同義語であり，代数，ホップ代数などの概念もスーパー化して考えることができる．通常の場合と同様にして，（有限生成）スーパー可換ホップ代数によって表現される，スーパー可換代数の圏から群の圏への群関手をスーパー（代数）群という．このようなスーパー化は単なる一般化ではなく，テンソル圏に関するドリーニュの定理 ([D]) が物語っているようにスーパーは数学的にも興味深いことが分かっている．

さて，本題の積分の話をする．コンパクト群上にはハール積分が存在し，この積分を用いることで，コンパクト群の有限次元表現がみな完全可約であることが分かるのであった．こ

* tshibata@math.tsukuba.ac.jp

のアナロジーとして代数群上の積分もその表現に深くかかわっていることが知られている．ここで代数群上の積分とは対応するホップ代数における積分として定義される．ホップ代数の積分は M. E. Sweedler [Swe] や J. B. Sullivan [Su] らによってよく研究されてており，例えば基礎体の標数がゼロであれば常に（非自明な）積分が存在することが分かっている．一方で，スーパー代数群上の積分に関しては，具体的なスーパー代数群に関する結果はいくつかあるものの体系的な研究は今だなされていなかった．本稿は最近得られた，スーパー代数群上の積分と付随する代数群上の積分との関係を紹介する．また最近の進展として，スーパー・シュヴァレー群のユニモジュラー性に関する結果も紹介する．

以降，$\Bbbk$ を基礎体とし，$\Bbbk$-代数全体を $\mathrm{Alg}_\Bbbk$ とかき，$\Bbbk$-ベクトル空間や $\Bbbk$-代数などは単にベクトル空間や代数という．また添え字 $\otimes_\Bbbk$ を $\otimes$ のように略す．

2　スーパー代数群について

2.1　スーパー代数群の定義と例

$\mathbb{Z}_2$-graded ベクトル空間 $V = V_0 \oplus V_1$ のことを**スーパー・ベクトル空間**という．このとき言葉遣いとして V_0 を **even part**，V_1 を **odd part** といい，元 $v \in V$ が homogeneous component に入っている，すなわち $v \in V_i$ $(i = 0, 1)$ のときに $|v| := i$ とかきこれを v の**パリティー**という．

代数，リー代数，ホップ代数などは，その構造が乗っている “足場” としてベクトル空間（のなす対称テンソル圏）があったが，スーパー・アナロジーとしてこの “足場” をスーパー・ベクトル空間としたものの上に，同様の構造を乗せたものを**スーパー代数**，**スーパー・リー代数**，**スーパー・ホップ代数**などというのである．ここでスーパー・ベクトル空間全体には次の構造を入れ対称テンソル圏とみなす．スーパー・ベクトル空間 V, W に対して，

$$\begin{array}{rcl} \text{テンソル構造} & : & (V \otimes W)_i = \bigoplus_{j+\ell=i} (V_j \oplus W_\ell), \quad (i = 0, 1); \\ \text{ユニット対象} & : & \Bbbk = \Bbbk \oplus 0; \\ \text{スーパー対称性} & : & V \otimes W \to W \otimes V\,;\ v \otimes w \mapsto (-1)^{|v||w|}\, w \otimes v. \end{array}$$

またスーパー代数 A が**スーパー可換代数**であるとは，$a, b \in A$ に対して $ab = (-1)^{|a||b|} ba$ が成立するときをいう．ここで簡単のため $|a|$ などは a が homogeneous component の元に入っているものとして表記している．

例 2.1.1. スーパー代数（$= \mathbb{Z}_2$-graded 代数）A がスーパー・ホップ代数であるとは，スーパー代数射（$\mathbb{Z}_2$-grading を保つ代数射）

$$\Delta\ :\ A \to A \otimes A, \qquad \varepsilon\ :\ A \to \Bbbk$$

によって (A, Δ, ε) が（スーパー）余代数をなしており，アンチポード $S : A \to A$ をもつ

ものである．ここで Δ は特に乗法的であるので，余積を

$$\Delta(a) \;=\; \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)} \qquad (a \in A)$$

と表記（Heynemann-Sweedler 記法）するとき，

$$\Delta(ab) \;=\; \sum (-1)^{|a_{(2)}|\,|b_{(1)}|}\, a_{(1)}b_{(1)} \otimes a_{(2)}b_{(2)}$$

となっていることに注意.

さて以上の言葉使いのもとで，通常の場合のスーパー・アナローグとしてスーパー代数群は次のように定義される.

定義 2.1.2. スーパー可換代数の圏から群の圏への表現可能関手を **スーパー・アフィン群** という.

この場合も通常のアフィン群のときと同様に次がいえる.

$$\begin{array}{ccc}
\text{（スーパー・アフィン群）} & \overset{\text{反同型}}{\cong} & \text{（スーパー可換ホップ代数）} \\
G & \longmapsto & \mathcal{O}(G) \\
\operatorname{Sp} A & \longleftarrow\!\!\shortmid & A
\end{array}$$

定義 2.1.3. 有限生成なスーパー可換ホップ代数で表現されるスーパー・アフィン群を **スーパー・アフィン代数群** という．以降は単にスーパー代数群という.

以上のように通常の場合の一般化としてスーパー・アフィン群を定義したのだが，実は G の中には最大の通常のアフィン群が含まれている．これを G_{res} とかき G **の制限部**ということにする．これは次のようなものである：

$$\mathcal{O}(G_{\mathrm{res}}) \;=\; A/\langle A_1 \rangle\,.$$

ここで，$\langle A_1 \rangle$ は A_1 の生成する A のイデアルである.

例 2.1.4 (一般線型スーパー群)**.** スーパー・ベクトル空間 $V = V_0 \oplus V_1$，ただし V_0, V_1 はそれぞれ次元 m, n のベクトル空間，について，次のような群関手を考える.

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{GL}_V \;=\; \mathrm{GL}(m|n) \;:\; \text{（スーパー可換代数）} & \longrightarrow & \text{（群）} \\
R & \longmapsto & \mathrm{Aut}_R^{\mathbb{Z}_2}(V \otimes R).
\end{array}$$

ここで $\mathrm{Aut}_R^{\mathbb{Z}_2}(V \otimes R)$ は $\mathbb{Z}_2$-grading を保つ R-自己同型群．これはスーパー・アフィン群である.

対応するスーパー・ホップ代数の形を記述するために，V の基底を適当にとり固定し，次のような行列表示を考える．

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overset{m}{\leftrightarrow} & \overset{n}{\leftrightarrow} \end{array} \\ \begin{array}{c} m \updownarrow \\ n \updownarrow \end{array} & \begin{pmatrix} X & U \\ W & Y \end{pmatrix} \end{array} = \left(\begin{array}{c|c} x_{ij} & u_{i\ell} \\ \hline w_{kj} & y_{k\ell} \end{array} \right).$$

このとき対応するスーパー可換ホップ代数の形は

$$\mathcal{O}(\mathrm{GL}_V) \;\cong\; \Bbbk[\, x_{ij},\ y_{k\ell},\ \det(X)^{-1},\ \det(Y)^{-1} \,] \otimes \wedge(u_{i\ell},\, w_{kj})$$

となることが分かる．ここで $\det(X)$ は行列式 $\det(X) = \det(x_{ij})_{i,j}$ のことであり，$\wedge(u_{i\ell},\, w_{kj})$ は $u_{i\ell},\, w_{kj}$ たちの生成する $\Bbbk$ 上の外積代数である．このことから $\mathrm{GL}_V = \mathrm{GL}(m|n)$ はスーパー代数群であることが分かる．ブロック行列表示を用いるとホップ代数の構造は,

$$\begin{aligned}
\Delta \begin{pmatrix} X & U \\ W & Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X & U \\ W & Y \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} X & U \\ W & Y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} X \otimes X + U \otimes W & X \otimes U + U \otimes Y \\ W \otimes X + Y \otimes W & W \otimes U + Y \otimes Y \end{pmatrix};\\
\varepsilon \begin{pmatrix} X & U \\ W & Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = (\text{単位行列});\\
S \begin{pmatrix} X & U \\ W & Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (X - UY^{-1}W)^{-1} & -X^{-1}US(Y) \\ -Y^{-1}WS(X) & (Y - WX^{-1}U)^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

で与えられる．ここで $\bullet^{-1}$ は逆行列を表す．また GL_V の制限部は $(\mathrm{GL}_V)_{\mathrm{res}} = \mathrm{GL}_m \times \mathrm{GL}_n$ となる．

例 2.1.5 (スーパー・シュヴァレー群)**.** 複素数体上の半単純リー代数が分類されているように，スーパー・リー代数も古典型 (classical type) と呼ばれるクラスが V. Kac [K] によって既に分類されている．分類によると古典型スーパー・リー代数は，単純リー代数もしくは次の単純スーパー・リー代数のいずれかに同型となる（表の記号は [FSS] による）：

タイプ	パラメータ	even part
$A(m,\, n)$	$m \geqslant n \geqslant 0,\, m+n > 0$	$U(1) \oplus A_m \oplus A_n$
$B(m,\, n)$	$m \geqslant 0,\, n \geqslant 1$	$B_m \oplus C_n$
$C(n)$	$n \geqslant 3$	$U(1) \oplus C_n$
$D(m,\, n)$	$m \geqslant 2,\, n \geqslant 1$	$D_m \oplus C_n$
$P(n)$	$n \geqslant 2$	A_n
$Q(n)$	$n \geqslant 2$	A_n
$F(4)$		$A_1 \oplus B_3$
$G(3)$		$A_1 \oplus G_2$
$D(2,\, 1; a)$	$-1, 0 \neq a \in \mathbb{C}$	$A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$

半単純リー代数とその有限忠実表現の組からシュヴァレー群と呼ばれる（半単純）代数群が構成されたように，近年 [FG] によって古典型スーパー・リー代数とその有限忠実表

現の組から**スーパー・シュヴァレー群**と呼ばれるスーパー代数群が構成されている．特に $B(m,n), C(n), D(m,n)$ から作られるスーパー・シュヴァレー群は，**ortho-symplectic スーパー群**と呼ばれており，以前からよく研究されていた（例えば [SW], [W] など）．このスーパー群は，記号で $\mathrm{SpO}(m,n)$ や $\mathrm{Spo}(m,n)$ などとかかれる．

注意 2.1.6. 実は次に述べる Harish-Chandra ペアの理論を用いることで，スーパー・シュヴァレー群は（広義の）シュヴァレー群から, より見通しのよい構成が可能である (例 2.2.2) . より詳しくは [MS, §9.] を参照してください.

2.2 Harish-Chandra ペアの理論

スーパー代数群 $G = \mathrm{Sp}\, A$ が与えられたときに，付随するデータとしてすぐに次の二つが考えられる：

(i) G の制限部 G_{res}； (ii) G のリー代数 $\mathrm{Lie}(G)$ の odd part $V := \mathrm{Lie}(G)_1$.

さらに両者の間の関係性としてスーパー・リー代数のブラケットの制限 $[\,,\,] : V \times V \to \mathrm{Lie}(G_{\mathrm{res}})\,(= \mathrm{Lie}(G)_0)$ がある．Harish-Chandra ペアとはこのような二つのデータ（とその間の関係）を，ホップ代数の言葉で記述しなおしたものである．（正式な定義を述べるには記号の準備が必要なので [M] や [MS] を見てください．）構成員としては，有限生成可換ホップ代数 C とその有限次元 C-余加群 W からなるペア (C, W) であって，適当な両立条件をみたすものである．Harish-Chandra ペアの理論とは，スーパー代数群 G は実はその制限部 G_{res} と G_{res} の有限次元表現から再構成できるということを保証しているものである．乱暴に言うと，スーパー代数群の研究はよく知っている通常の代数群とその表現の研究へと帰着されるということである．

Harish-Chandra ペア理論の主結果は次のように述べられる．

定理 2.2.1 ([M, Theorem 29.]). Harish-Chandra ペア (C, W) が与えられたとき，有限生成スーパー可換ホップ代数 $A(C, W)\,(\cong C \otimes \wedge(W))$ が構成できる．さらにこの構成によって Harish-Chandra ペアのなす自然な圏 **HCP** と有限生成スーパー可換ホップ代数のなす圏 **AHSA** が圏同値になる．

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{AHSA} & \approx & \mathbf{HCP} \\ A(C, W) & \longleftarrow & (C, W) \end{array}$$

例 2.2.2 (スーパー・シュヴァレー群). Harish-Chandra ペアの理論によるスーパー・シュヴァレー群の構成の概略を述べる．古典型スーパー・リー代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ が与えられたとする．$\mathfrak{g}_0$ は簡約リー代数である．(i) Chevalley-Demazure 構成から（広義）シュヴァレー

群 $G(\mathfrak{g}_0)$ が構成できる．(ii) 有限 $G(\mathfrak{g}_0)$-加群として $\mathfrak{g}_1$ を取る．これらとスーパー・リー代数のブラケットの制限 $[\,,\,]:\mathfrak{g}_1\times\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_0$ によって，$(\mathcal{O}(G(\mathfrak{g}_0)),\mathfrak{g}_1^*)$ は Harish-Chandra ペアをなすことが分かる．ここで $\mathfrak{g}_1^*$ は $\mathfrak{g}_1$ の線形双対．定理 2.2.1 の記号で有限生成スーパー可換ホップ代数 $A(\mathcal{O}(G(\mathfrak{g}_0)),\mathfrak{g}_1^*)$ が構成でき，これによって表現される群関手 G こそが求めるスーパー・シュヴァレー群である．

3 積分について

3.1 積分の定義と例

コンパクト群 G にはハール測度という両側 G-不変な測度 $d\mu$ が，スカラー倍を除いて一意的に存在するのであった．これを用いて，G 上連続な関数全体 $C(G)$ から $\mathbb{R}$ への線形写像として，ハール積分 $\int_G d\mu : C(G)\to\mathbb{R}$ が定義される．両側不変であるから，任意の $h\in G$ に対して次をみたしている：

$$\int_{g\in G} f(hg)\,d\mu \;=\; \int_{g\in G} f(g)\,d\mu \;=\; \int_{g\in G} f(gh)\,d\mu. \qquad (f\in C(G))$$

これは，正規化して $\int_{g\in G} 1\,d\mu = 1$ にできる．ハール積分を用いることで，有限次元表現はみな完全可約であることが分かる．これから議論する代数群上の積分，すなわちホップ代数の積分とはこのような事実をホップ代数的に言い換えたものであり，やはり表現を調べるうえで大切な役割を果たしている．

定義 3.1.1. ホップ代数 C について．

(a) ゼロでない $\Bbbk$-線形双対の元 $\phi\in C^*$ が**左積分**であるとは，任意の $\gamma\in C^*$, $c\in C$ に対して $\sum\gamma(c_{(1)})\,\phi(c_{(2)})=\gamma(1)\,\phi(c)$ をみたすときをいう．これは $(\mathrm{id}\otimes\phi)\circ\Delta=\phi$ をみたすことと同値.

(b) 左積分 ϕ が**全積分**であるとは $\phi(1)=1$ をみたすときをいう．また，C が左積分 ϕ をもちこれが同時に右積分（同様にして定義される）であるとき ϕ を**両側積分**といい，両側積分をもつ C を**ユニモジュラー**という．

ホップ代数の積分は Sweedler や Sullivan らによって詳しく研究されている．以下の性質をもつ：(i) 積分は存在すればスカラー倍を除いて一意的である．(ii) 有限次元ホップ代数は必ず積分を持つ．(iii) 全積分をもてば必然的にユニモジュラーである．

アフィン群 $G=\mathrm{Sp}\,C$ 上の積分とは，対応するホップ代数 C の積分のことと定義する．以下に，代数群上の積分の簡単な例をあげる：

例 3.1.2. (1) 乗法群 G_m に関して．対応するホップ代数はローラン多項式環 $C=$

$\Bbbk[T, T^{-1}]$ であり，両側積分 $\phi(T^m) := \delta_{0,m}$ をもつ（δ はクロネッカーのデルタ）.

(2) 加法群 G_a に関して．対応するホップ代数は多項式環 $C = \Bbbk[T]$ であり，積分を持たない.

(3) 特殊線型群 SL_2 に関して．対応するホップ代数は $C = \Bbbk[X, Y, U, W]/(XY - UW - 1)$ であり，基礎体 $\Bbbk$ の標数がゼロであるとき次は両側積分.

$$\phi(X^n Y^n U^m W^m) := (-1)^m \frac{m!n!}{(m+n+1)!}, \qquad \phi(\text{他}) := 0.$$

さて，アフィン群 $G = \mathrm{Sp}\, C$ の表現は C-余加群と一対一に対応することに注意して，群 G の完全可約性を次のように余加群の言葉で言い換える.

定義 3.1.3. 左 C-余加群 M が**完全可約**であるとは，M の任意の部分余加群 N に対して左 C-余加群射 $M \to N$ が存在して $N \hookrightarrow M \to N$ が恒等写像になるときをいう．これは M が単純部分余加群の直和でかけていることと同値であり，さらに C が**余半単純**（すなわち $C = \mathrm{corad}\, C$）であることとも同値である.

初めに述べたコンパクト群とハール積分に関する事実をアフィン群へ一般化したものが次の定理である.

定理 3.1.4. 任意の左 C-余加群が完全可約（すなわち G が線形簡約）であることと，C が全積分を持つことは同値である.

また他にも，群の表現と積分との関係として次の定理もよく知られている（例えば [DNR] など).

定理 3.1.5. 以下は同値である：

(1) C は左積分を持つ.
(2) 任意の入射 G-加群は射影的である.
(3) 任意の有限次元 G-加群の移入包絡もまた有限次元である.
(4) C は**左余フロベニウス余代数**である.

ここで，余フロベニウス余代数の定義は *[DNR]* を参照してください.

以上の定義や性質は，容易にスーパー化できる．従って次に問題となるのは，通常の積分とスーパーの積分との関係性を明らかにすることである.

注意 3.1.6. スーパー・代数群だけではなく，スーパー・リー群の場合においても類似の問題意識はある．例えば複素数体上では M. Scheunert と R. B. Zhang [SZ] によって研究されている.

3.2 主結果

我々は Harish-Chandra ペアの理論を用いることにより前章の問題への回答として次の結果を得た．これによりスーパーの積分はその制限部の積分（すなわち通常の積分）によってコントロールできることがわかった．

定理 3.2.1 ([Masuoka, Pastro, S.] in preparation)**.** スーパー代数群 G に関して．G が左積分をもつことと，G_{res} が左積分をもつことは同値である．

存在だけではなく，制限部分の積分からスーパーの積分を具体的に構成することも可能である．しかしそれにはいろいろと準備が必要なので割愛する．さらにこの定理を Sullivan [Su] の結果と合わせると次の系を得る：

系 3.2.2. G_{res} が連結被約代数群であるとき以下が成立する：

(a) $\mathrm{char}\,\Bbbk = 0$ のとき．G は左積分を常にもつ．
(b) $\mathrm{char}\,\Bbbk > 2$ のとき．G_{res} がトーラスでない限り G は左積分をもたない．

定理の中の条件は G がスーパー・シュヴァレー群ならば必然的にみたすことに注意する．

例 3.2.3 (ortho-symplectic スーパー群)**.** ortho-symplectic スーパー群 $\mathrm{Spo}(1,2)$ について．制限部は $\mathrm{Spo}(1,2)_{\mathrm{res}} = \mathrm{SL}_2$ である．定理 3.2.2 によると $\mathcal{O}(\mathrm{Spo}(1,2))$ は $\mathrm{char}\,\Bbbk = 0$ のときに限って左積分 ϕ をもつことが分かる．さらに積分 ϕ のより詳しい形を調べると，これは全積分とも分かるので結局，$\mathrm{Spo}(1,2)$ は $\mathrm{char}\,\Bbbk = 0$ のときに限って線形簡約であると分かった．

また最近，スーパー代数群のユニモジュラー性に関しても進展があった．その一つとして次の結果を紹介して終わることにする：

定理 3.2.4. スーパー・シュヴァレー群は皆ユニモジュラー．

参考文献

[D] P. Deligne, *Catégories tensorielles*, Moscow Math. Journal **2** (2002) no.2, 227–248.

[DNR] S. Dăscăkescu, C. Năstăsescu and Ş. Raianu, *Hopf algebras. An introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **235**. Marcel Dekker, Inc., New York, (2001).

[FG] R. Fioresi, F. Gavarini, *Chevalley supergroups*, Mem. Amer. Math. Soc., **1014**

(2012).

[FSS] L. Frappat, P. Sorba, A. Sciarrino, *Dictionary on Lie algebras and superalgebras*, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 2000.

[K] V. G. Kac, *Lie superalgebras*, Adv. Math. **26** (1977), 8–26.

[M] A. Masuoka, *Harish-Chandra pairs for algebraic affine supergroup schemes over an arbitrary field*, Transform. Groups, **17** (2012), no.4, 1085–1121.

[MS] A. Masuoka, T. Shibata, *Algebraic supergroups over a PID*, preprint, arXiv:1304.0531 [math.RT] (2013).

[Su] J. B. Sullivan, *Affine group schemes with integrals*, J. Algebra, **22** (1972).

[SW] B. Shu, W. Wang, *Modular Representations of the Ortho-Symplectic Supergroups*, Proc. Lond. Math. Soc., (3) **96** (2008), no. 1.

[Swe] M. E. Sweedler, *Integrals for Hopf-algebras*, Ann. of Math., **89** (1969).

[SZ] M. Scheunert, R. B. Zhang, *Integration on Lie supergroups: A Hopf superalgebra approach*, J. Algebra **292** (2005), no. 2, pp.324–342.

[W] R. Weissauer, *Semisimple algebraic tensor categories*, preprint, arXiv:0909.1793 [math.CT].