テンソル圏のユニモジュラー性について

清水健一 *

2014 年 6 月 30 日

概要. 本稿は、第 19 回代数学若手研究会（於・信州大学）における私の講演『テンソル圏のユニモジュラー性について』(2014 年 2 月 26 日) に関する報告集である。講演では、ある種の有限性を持つテンソル圏に対して定義されるユニモジュラー性という性質の特徴づけについて、講演者のプレプリント [Shi14] に基づいて話した。講演の内容に加えて、講演時間の都合上ほとんど話すことのできなかったトポロジーへの応用についても記している。

序

私の主な研究対象は、**ホップ代数** (Hopf algebra) およびそれらの表現圏として現れる**テンソル圏** (tensor category) である。アフィン代数群の座標環はホップ代数の代表的な例であり、またこれはホップ代数の概念の起源のひとつでもある（歴史的な背景については [AFS09] を是非とも一読されたい）。このような理由から、ホップ代数は群という概念の一般化と思うことができ、群論に由来する概念がホップ代数やテンソル圏の理論には多く現れる。今回の講演の主題は、元々は局所コンパクト群に対して定義されていたユニモジュラー性という概念の、ある種の有限的なテンソル圏への一般化である。

まず局所コンパクト群のユニモジュラー性について復習しよう。位相空間としてハウスドルフであるような局所コンパクト群 G 上には、**左ハール測度** (left Haar measure) と呼ばれる G の左作用に関して不変な測度 μ が定数倍を除いて一意的に存在する。この測度に関する可測集合全体を $\mathfrak{B}(G)$ と表す。定義より μ は左不変、すなわち任意の $g \in G$ と任意の $A \in \mathfrak{B}(G)$ に対して $\mu(g \cdot A) = \mu(A)$ が成り立つが、右不変であるとは限らないことに注意しておく。左ハール測度の一意性を用いると、関数 $\alpha : G \to \mathbb{R}$ を

$$\mu(A \cdot g) = \alpha(g)\mu(A) \quad (g \in G, A \in \mathfrak{B}(G))$$

で定義することができる。この関数は左ハール測度がどれだけ右不変でないかを示すものであり、**モジュラー関数** (modular function) と呼ばれている。モジュラー関数が恒等的に 1 であるとき、すなわち左ハール測度が右不変であるとき、G は**ユニモジュラー** (unimodular) であると言われるのであった。

局所コンパクト群のユニモジュラー性はこのように解析的な言葉を用いて定義されているが、代数的な類似物を考えることも可能であり、アフィン群スキーム、あるいはもっと一般にホップ代数のユニモジュラー性を定義することが可能である（例えば Montgomery の教科書 [Mon93] などを参照されたい）。さて、有限群は（それを離散位相によってコンパクト群と考えたとき）ユニモジュラーであるが、有限次元ホップ代数はそうとは限らないことに注意しておく。有限次元ホップ代数のユニモジュラー性は、例えばそれが対称フロベニウ

* 名古屋大学多元数理科学研究科・日本学術振興会特別研究員 (PD)　✉ x12005i@math.nagoya-u.ac.jp

ス代数であるための必要条件[*1]であったりするなど、純代数学的な見地からも重要である。しかしながら、私がこの研究をはじめた動機はむしろトポロジーに属する問題にある。有限次元ホップ代数から結び目などの不変量を構成する方法が数多く知られているが、その中には Hennings-Kauffman-Radford [KR95, Hen96] による三次元多様体の不変量の構成や石井・増岡 [IM13] によるハンドル体絡み目の不変量の構成など、タネとなるホップ代数のユニモジュラー性を要求するものが幾つかある。ホップ代数から得られる位相不変量の多くにはテンソル圏の枠組みに基づいた圏論的な一般化が与えられているから、これらの構成もそのような立場から見直したい。しかしながら、そのようなことをしようと考えた場合、ひとつの問題が生じる。すなわち、**テンソル圏が『ユニモジュラー』であるとはどういうことか**である。

Etingof-Ostrik [EO04] によって導入された**有限的テンソル圏** (finite tensor category) の概念は、有限次元ホップ代数の表現論を抽象化する枠組みとして相応しいクラスのテンソル圏である。有限次元ホップ代数の理論においてよく知られている Radford [Rad76] の対合射の四乗公式を有限的テンソル圏へと一般化するため、Etingof-Nikshych-Ostrik [ENO04] は有限的テンソル圏における **distinguished invertible object** の概念を導入した。この対象は有限次元ホップ代数上のモジュラー関数を圏論的に特徴付けるものであり、これを用いることで有限的テンソル圏のユニモジュラー性が定義される。しかしながら、この対象の定義はテンソル圏上の加群圏の森田理論に基づくものであり、扱いやすいものではない。本稿で説明する私の結果は、有限的テンソル圏 $\mathcal{C}$ のユニモジュラー性を $\mathcal{C}$-加群の理論よりは良く知られているであろう $\mathcal{C}$ の**中心** (center) と呼ばれる圏 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ を用いて特徴付けるものである。さらに、上述した Hennings-Kauffman-Radford や石井・増岡による構成も、この特徴づけを用いることで圏論的な理解が可能になる。

主結果を詳しく述べるために、最小限の用語の解説をしておく。厳密な定義は後で与えるが、まず**モノイダル圏** (monoidal category) とは、その対象の間に関手的に振舞う二項演算 $\otimes$ が定義されており、対象の全体がこの演算に関してモノイドとなっているようなものである。対象の間の二項演算 $\otimes$ に関する “単位元” のことを**単位対象** (unit object) と呼び、本稿では $\mathbf{1}$ で表すことにする。なお、圏が何らかの代数的対象の表現圏となっているようなものを念頭に置いている場合には**テンソル圏** (tensor category) と呼ぶことが多いが、この用語は文献によって異なった意味で使われているため、注意が必要である。本稿を読む限りにおいては、後述する意味で『リジッド』であり、さらに線形アーベル圏の構造を持っているようなモノイダル圏のことをテンソル圏と呼んでいると思ってよい。

一般に、モノイダル圏 $\mathcal{C}$ に対しその**中心**と呼ばれる圏 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ が定義される。その対象は $\mathcal{C}$ の対象 V と自然同型 $\sigma(X) : V \otimes X \to X \otimes V$ $(X \in \mathcal{C})$ であって、任意の対象 $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して図式

$$\sigma(X \otimes Y) = (\mathrm{id}_X \otimes \sigma(Y)) \circ (\sigma(X) \otimes \mathrm{id}_Y)$$

が成り立つようなものの組 (V, σ) である。圏 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ の射 $f : (V, \sigma) \to (W, \tau)$ は $\mathcal{C}$ の射 $f : V \to W$ であって、任意の対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して $(\mathrm{id}_X \otimes f) \circ \sigma(X) = \tau(X) \circ (f \otimes \mathrm{id}_X)$ を満たすようなものである。射の合成は $\mathcal{C}$ における射の合成と同じである。対応 $(V, \sigma) \mapsto V$ は $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ から $\mathcal{C}$ への関手となるが、この関手を**忘却関手**と呼ぶ。なお、詳しくは述べないが、$\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ は忘却関手 $\mathcal{Z}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ がモノイダル関手となるようなモノイダル圏の構造を持つ。さらに $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ は**組みひも圏** (braided monoidal category) でもある。Kassel の教科書 [Kas95] や、あるいは本稿と同じ場所で入手できるであろう若手会セミナーの報告集を参照されたい。

モノイダル圏の各対象 V が**左双対** V^* および**右双対** ${}^*V$ とを持つとき、**リジッド** (rigid) であるという。リジッドなモノイダル圏であって、圏としてはある有限次元代数の表現圏となっているようなものを**有限的テン**

[*1] 有限次元ホップ代数 H が対称フロベニウス代数となるための必要十分条件は、H がユニモジュラーかつその対合射の二乗が内部自己同型となっていること [Lor97]。

ソル圏 (finite tensor category) という（これらの用語については、後で詳しく説明する)。$\mathcal{C}$ が有限的テンソル圏であるとき、その中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ も有限的テンソル圏であり、さらに忘却関手 $U : \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ は左随伴および右随伴を持つことが知られている。それらを、それぞれ $L : \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ と $R : \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ とする。このとき主結果は次のように述べられる。

定理. 次の条件はすべて同値である。

(1) $\mathcal{C}$ はユニモジュラー。
(2) U はフロベニウス関手、すなわちその左随伴 L と右随伴 R は同型である。
(3) 自然同型 $L(V^*) \cong L(V)^*$ が存在する。
(4) 同型 $L(\mathbf{1}) \cong L(\mathbf{1})^*$ が存在する。
(5) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(\mathbf{1}, L(\mathbf{1})) \neq 0$
(6) 自然同型 $R(V^*) \cong R(V)^*$ が存在する。
(7) 同型 $R(\mathbf{1}) \cong R(\mathbf{1})^*$ が存在する。
(8) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(R(\mathbf{1}), \mathbf{1}) \neq 0$

なお、$\mathcal{C}$ が有限次元ホップ代数 H の表現圏であるとき、条件 (1) と (2) の同値性は Caenepeel-Militaru-Zhu [CMZ02] によって示されている。しかしながら、証明の手法は全く異なっている。

本稿は以下のように構成されている。まず第 1 章において、有限的テンソル圏およびそのようなテンソル圏 $\mathcal{C}$ に対する有限的 $\mathcal{C}$-加群の定義と基本的な結果について復習する。次に第 2 章において、有限的テンソル圏のユニモジュラー性の定義を与え、主結果の証明の概略を説明する。最後に、第 3 章において、トポロジーへの応用について簡単に触れる。

謝辞. 第 19 回代数学若手研究会において講演の機会を与えていただいた、研究会の世話人である信州大学の内藤貴仁氏、亀山統胤氏、前川悠氏、沼田泰英氏には、この場を借りて御礼申し上げたい。本報告書の内容は、日本学術振興会特別研究員奨励費 (24・3606) の助成を受けて行われた研究に基づいている。

1 Finite tensor categories

1.1 Rigid monoidal categories

モノイダル圏 (monoidal category) とは、**テンソル積** (tensor product) と呼ばれる関手 $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$、**単位対象** (unit object) と呼ばれる対象 $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$ および自然同型

$$a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z), \quad l_X : \mathbf{1} \otimes X \to X, \quad r_X : X \otimes \mathbf{1} \to X \quad (X, Y, Z \in \mathcal{C})$$

を持つような圏 $\mathcal{C}$ であり、次の**五角形公理** (pentagon axiom) および**三角形公理** (triangle axiom) を満たすようなものである。

五角形公理　任意の対象 $W, X, Y, Z \in \mathcal{C}$ に対し、次の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd}
((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "a_{W,X,Y} \otimes Z"] \arrow[d, "a_{W \otimes X,Y,Z}"'] & (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \arrow[r, "a_{W,X \otimes Y,Z}"] & W \otimes ((X \otimes Y)) \otimes Z) \arrow[d, "W \otimes a_{X,Y,Z}"] \\
(W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[rr, "a_{W,X,Y \otimes Z}"'] & & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z))
\end{tikzcd}$$

三角形公理　任意の対象 $X, Y \in \mathcal{C}$ に対し、次の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,\mathbf{1},Y}"] \arrow[dr, "r_X \otimes Y"'] & & X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \arrow[dl, "X \otimes l_Y"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

任意の対象 X, Y, Z に対し $(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z)$ および $\mathbf{1} \otimes X = X = X \otimes \mathbf{1}$ が成り立ち、さらに自然同型 a, l, r がすべて恒等射であるとき、$\mathcal{C}$ は**厳格** (strict) であると言う。任意のモノイダル圏は、ある厳格なモノイダル圏に『モノイダル同値』であるという事実が知られている。この主張の意味するところに関しては、若手会セミナーの報告集に詳しく記したので、そちらを参照されたい。本稿では、この事実を鑑みて、**すべてのモノイダル圏は厳格であると仮定する。**

$\mathcal{C}$ をモノイダル圏とし、X と Y を $\mathcal{C}$ の対象、$e : Y \otimes X \to \mathbf{1}$ と $c : \mathbf{1} \to X \otimes Y$ を $\mathcal{C}$ の射とする。等式

$$(\mathrm{id}_X \otimes e) \circ (c \otimes \mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_X, \qquad (e \otimes \mathrm{id}_Y) \circ (\mathrm{id}_Y \otimes c) = \mathrm{id}_Y$$

が満たされるとき、(Y, e, c) は X の**左双対対象** (left dual object) であると言い、また (X, e, c) は Y の**右双対対象**であるとも言う。左双対対象は、存在すれば同型を除いて一意的である。そこで、$V \in \mathcal{C}$ の左双対対象を $(V^*, \mathrm{ev}, \mathrm{coev})$ などと書く。右双対対象は ${}^*V$ のように表す。なお、このあたりの用語法および記法は文献によってまちまちであり、我々の意味での左双対を右双対と呼んでいたり、我々の V^* を ${}^*V$ と書いていたりすることもあるので注意されたい。本稿は [Kas95] の記法及び用語法に従っている。

すべての $\mathcal{C}$ の対象が左双対対象を持つとき、$\mathcal{C}$ は**左リジッド** (left rigid) であると言う。$\mathcal{C}$ が左リジッドであるとき、対応 $V \mapsto V^*$ を $\mathcal{C}$ 上の反変関手に拡張することができる。この関手を**左双対性** (left duality) と呼ぶことにする。次のような自然同型が存在することが知られている：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, V \otimes Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V^* \otimes X, Y), \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes V, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y \otimes V^*). \tag{1.1}$$

すべての $\mathcal{C}$ の対象が右双対対象を持つとき、$\mathcal{C}$ は**右リジッド**であると言う。上と同様に、$\mathcal{C}$ が右リジッドであるとき、対応 $V \mapsto {}^*V$ は**右双対性**と呼ばれる $\mathcal{C}$ 上の反変関手に拡張でき、さらに

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, {}^*V \otimes Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V \otimes X, Y), \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes {}^*V, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y \otimes V) \tag{1.2}$$

という自然同型も存在する。$\mathcal{C}$ が左リジッドかつ右リジッドであるとき、$\mathcal{C}$ は**リジッド**であると言う。このとき左双対性と右双対性の両方が $\mathcal{C}$ 上に定義されるが、実はこれらは互いに逆を与える：

$${}^*(V^*) \cong V \cong ({}^*V)^*.$$

なお、一般に V^{**} や ${}^{**}V$ は V と同型であるとは限らない。本稿では用いないが、テンソル積と整合的な自然同型 $V \cong V^{**}$ を $\mathcal{C}$ の**ピボタル構造** (pivotal structure) と呼ぶ。

1.2　Finite tensor categories

以降 k を体とする。体 k 上の有限次元代数（＝単位的かつ結合的な多元環）の有限次元表現のなす圏と同値であるような k-線形アーベル圏を、ここでは**有限的アーベル圏** (finite abelian category) と呼ぶ。**有限的テンソル圏** (finite tensor category [EO04]) とは、リジッド・モノイダル圏の構造を持っているような有限的アーベル圏 $\mathcal{C}$ であって、次の条件を満たすようなものである：

- テンソル積 $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ は各成分に関して線形である。
- 単位対象 $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$ は単純対象であり、さらに $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}) \cong k$ を満たす。

$\mathcal{C}$ がリジッドであることから、テンソル積が各成分に関して完全関手であることが従う。実際、自然同型 (1.1) は $V \otimes (-)$ という $\mathcal{C}$ 上の関手の左随伴が $V^* \otimes (-)$ で与えられるということを言っており、従って $V \otimes (-)$ は右完全関手になる。同様に (1.2) より $V \otimes (-)$ の左完全性が従う。よって関手 $V \otimes (-)$ は完全である。同様の議論により $(-) \otimes V$ の完全性も分かる。

有限次元ホップ代数の有限次元表現の圏が有限的テンソル圏の代表的な例である。有限次元準ホップ代数 (quasi-Hopf algebra) や有限次元弱ホップ代数 (weak Hopf algebra) などのホップ代数の一般化からも有限的テンソル圏が得られる。実は、一般に、有限的テンソル圏は有限次元 $\times_R$-Hopf algebra (=Hopf algebroid over R) の表現圏になることが知られている (Bruguières-Lack-Virelizier [BLV11])。このような意味で、有限的テンソル圏の研究は、原理的には $\times_R$-Hopf algebra の研究に帰着する。しかしながら、このようなホップ代数の一般化はそう取り扱いやすい概念ではなく、むしろテンソル圏の一般論を用いて準ホップ代数や弱ホップ代数に関する結果を得るというようなことが行われている。

1.3 Finite module categories

$\mathcal{C}$ をモノイダル圏とする。**左 $\mathcal{C}$-加群圏** (left $\mathcal{C}$-module category) とは、関手 $\oslash : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ と自然同型

$$a_{X,Y,M} : (X \otimes Y) \oslash M \to X \oslash (Y \oslash M), \quad l_M : \mathbf{1} \oslash M \to M \quad (X, Y \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{M})$$

が定義されている圏 $\mathcal{M}$ であって、モノイダル圏の定義と似たような図式を可換にするものである。関手 $\oslash$ は $\mathcal{C}$ の**作用**と呼ばれる。右 $\mathcal{C}$-加群圏も同様に定義される。詳しい定義は [Ost03] などを参照されたい。

例 1.1. **モノイダル圏 $\mathcal{C}$ における代数** (algebra in $\mathcal{C}$) とは、射 $m : A \otimes A \to A$ および $u : \mathbf{1} \to A$ を持つような対象 $A \in \mathcal{C}$ であって、次の 2 つの図式を可換にするようなものである：

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m \otimes A"] \arrow[d, "A \otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{1} \otimes A \arrow[r, "u \otimes A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & A \otimes \mathbf{1} \arrow[l, "A \otimes u"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_A"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

m を A の**積**、u を A の**単位射**と呼ぶ。$\mathcal{C}$ における代数 A が与えられると、A 上の右加群、左加群、両側加群、さらにそれらの間の射を定義することができる。ここでは**右 A-加群**についてのみ定義する。それは作用と呼ばれる射 $\rho : M \otimes A \to M$ を持つ対象 $M \in \mathcal{C}$ であって、次の図式を可換にするようなものである：

$$\begin{tikzcd} M \otimes A \otimes A \arrow[r, "m \otimes A"] \arrow[d, "A \otimes \rho"'] & M \otimes A \arrow[d, "\rho"] \\ M \otimes A \arrow[r, "\rho"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \otimes A \arrow[d, "\rho"'] & M \otimes \mathbf{1} \arrow[l, "M \otimes u"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_M"] \\ M & \end{tikzcd}$$

M を作用を $\rho : M \otimes A \to M$ を持つ右 A-加群とする。任意の $X \in \mathcal{C}$ に対し、$X \otimes M$ は $X \otimes \rho$ を作用とする右 A-加群となる。右 A-加群の圏を $\mathcal{C}_A$ で表すと、この $M \in \mathcal{C}_A$ と $X \in \mathcal{C}$ から $X \otimes M \in \mathcal{C}_A$ を作る構成は関手 $\mathcal{C} \times \mathcal{C}_A \to \mathcal{C}_A$ となる。この関手は $\mathcal{C}$ の $\mathcal{C}_A$ への作用を与える。すなわち、$\mathcal{C}_A$ は左 $\mathcal{C}$-加群圏である。

$\mathcal{C}$ を有限的テンソル圏とする。左 $\mathcal{C}$-加群圏 $\mathcal{M}$ が有限型アーベル圏であり、作用 $\oslash$ が各成分に関して線形かつ第１成分に関して右完全であるとき、$\mathcal{M}$ は**有限的左 $\mathcal{C}$-加群圏** (finite left $\mathcal{C}$-module category) であると言う。なお、作用 $\oslash$ は第２成分に関しては常に完全である。実際、

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(M, V \oslash N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(V^* \oslash M, N), \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(M, {}^*V \oslash N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(V \oslash M, N) \tag{1.3}$$

という自然同型が存在し、これを用いると、有限的テンソル圏のテンソル積が各成分に関して完全であることを示したときと同様にして $V \oslash (-)$ の完全性を示すことが出来る。

さて、$\mathcal{M}$ を有限的左 $\mathcal{C}$-加群圏とし、$M \in \mathcal{M}$ を固定する。仮定より、関手 $(-) \oslash M : \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ は右完全である。Eilenberg-Watts の定理によってこの関手は右随伴を持つことが分かるが、それを $\underline{\mathrm{Hom}}(M, -)$ と書くことにする。すなわち、$\underline{\mathrm{Hom}}(M, N)$ $(N \in \mathcal{M})$ は

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(V \oslash M, N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, \underline{\mathrm{Hom}}(M, N)) \tag{1.4}$$

で特徴づけられる対象である。随伴関手の一般論より、対応 $(M, N) \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}(M, N)$ を関手 $\mathcal{M}^{\mathsf{op}} \times \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ に拡張することができる。この関手を**内部 Hom 関手** (internal Hom functor) と呼ぶ。内部 Hom 関手は通常の Hom と非常に良く似た振る舞いをする。実際、自然同型 (1.4) を用いて $\mathcal{C}$ における射

$$\circ : \underline{\mathrm{Hom}}(M, N) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(L, M) \to \underline{\mathrm{Hom}}(L, M), \quad \mathrm{id} : \mathbf{1} \to \underline{\mathrm{Hom}}(M, M) \tag{1.5}$$

を定義でき、さらにこれらが結合律および単位律を満たすことが確かめられる。圏論の専門用語で言えば、$\mathcal{M}$ は $\mathcal{C}$-豊穣圏 ($\mathcal{C}$-enriched category) の構造を持っていると言える。

射 (1.5) により、$A := \underline{\mathrm{Hom}}(M, M)$ は $\mathcal{C}$ における代数となる。$N \in \mathcal{M}$ に対し、$\underline{\mathrm{Hom}}(M, N)$ は

$$\underline{\mathrm{Hom}}(M, N) \otimes A = \underline{\mathrm{Hom}}(M, N) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(M, M) \xrightarrow{\ \circ\ } \underline{\mathrm{Hom}}(M, N)$$

によって右 A-加群となる。これにより関手

$$K : \mathcal{M} \to \mathcal{C}_A, \quad N \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}(M, N) \quad (N \in \mathcal{M})$$

が得られる。実はこの関手は随伴 (1.4) の**比較関手** (comparison functor) と呼ばれるものである。比較関手の同値性に関する Barr-Beck の定理 [ML98] をこの関手に適用し、分かりやすいようにアーベル圏の言葉で書き換えると、次の定理を得る：

定理 1.2. 次の２つの条件が満たされるとき、上の関手 K は圏同値になる。

1. 関手 $\underline{\mathrm{Hom}}(M, -) : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ は完全。
2. 任意の $N \in \mathcal{M}$ に対し、ある $V \in \mathcal{C}$ が存在し、N は $V \oslash M$ の商として得られる。

なお (1.3) と (1.4) を用いると、自然同型

$$\underline{\mathrm{Hom}}(M, X \oslash N) \cong X \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(M, N) \quad (X \in \mathcal{C}, M, N \in \mathcal{M}) \tag{1.6}$$

が得られる。従って K は $K(X \oslash N) \cong X \otimes K(N)$ $(N \in \mathcal{M}, X \in \mathcal{C})$ を満たす **$\mathcal{C}$-加群圏の関手** ($\mathcal{C}$-module functor) である（詳しい定義は [Ost03] を参照せよ)。実は、上の定理を用いることで、任意の有限的 $\mathcal{C}$-加群圏はある代数 $A \in \mathcal{C}$ 上の右加群の圏と $\mathcal{C}$-加群圏として同値であるということが示せる。詳しくは [EGNO] あるいは [DSPS14] を参照されたい。[DSPS14] には [EGNO] で練習問題として省略されている部分がきちんと書かれていてありがたい。

2 Characterizations of unimodularity

2.1 Deligne's tensor product of abelian categories

有限的テンソル圏のユニモジュラー性の定義と、その特徴づけに関して述べる。そのためにはまず Deligne [Del90] によって導入された**アーベル圏のテンソル積**の概念が必要である。k-線形アーベル圏 $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$, $\mathcal{B}$ が与えられたとき、$\mathrm{R{\scriptstyle EX}}_n(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n; \mathcal{B})$ で関手 $\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n \to \mathcal{B}$ であって、各成分に関しては k-線形かつ右完全であるようなものからなる圏を表す。簡単のため、$\mathrm{R{\scriptstyle EX}}_1(\mathcal{A}; \mathcal{B}) = \mathrm{R{\scriptstyle EX}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ と書く。$\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ の**テンソル積**とは、k-線形アーベル圏 $\mathcal{T}$ および $\boxtimes \in \mathrm{R{\scriptstyle EX}}_n(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n; \mathcal{T})$ の組であって、関手

$$\mathrm{R{\scriptstyle EX}}(\mathcal{T}, \mathcal{B}) \to \mathrm{R{\scriptstyle EX}}_n(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n; \mathcal{B}) \quad F \mapsto F \circ \boxtimes$$

が任意の k-線形アーベル圏 $\mathcal{B}$ に対して圏同値となるようなものである。そのような $(\mathcal{T}, \boxtimes)$ は存在すれば同値を除いて一意的であり、$\mathcal{T} = \mathcal{A}_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{A}_n$ と表される。また、対象 $(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$ の $\boxtimes$ による像を $X_1 \boxtimes \cdots \boxtimes X_n$ と表す。各 $\mathcal{A}_i$ が有限次元代数 A_i の有限次元表現の圏 A_i-mod である場合には、それらのテンソル積は必ず存在し、しかもそのひとつの実現として

$$A_1\text{-mod} \boxtimes \cdots \boxtimes A_n\text{-mod} = (A_1 \otimes_k \cdots \otimes_k A_n)\text{-mod} \tag{2.1}$$

がとれる。一般のアーベル圏のテンソル積の存在性に関しては [Fra13] に詳しい考察がある。**アーベル圏のテンソル積は一般には存在しない** [Fra13] という事実には注意が必要であるが、我々は主に有限的アーベル圏を考えるので、(2.1) を定義と思ってしまっても良い。

さて $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ を有限的テンソル圏とする。テンソル積の普遍性などを用いて

$$(A \boxtimes X) \otimes (B \boxtimes Y) := (A \otimes B) \boxtimes (X \otimes Y) \quad (A, B \in \mathcal{C}, X, Y \in \mathcal{D})$$

によって $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ にテンソル積を定義することができる。このテンソル積に関して $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ は $\mathbf{1} \boxtimes \mathbf{1}$ を単位対象とするモノイダル圏となる。さらに (2.1) より $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ は有限的アーベル圏でもある。これがリジッドになるかどうかが微妙なところなのであるが、例えば Deligne [Del90] の結果より、k が完全体ならば $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ は有限的テンソル圏となる。また k が完全体でなかったとしても、例えば $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ が有限次元ホップ代数の表現圏であるような場合には、$\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ は有限的テンソル圏となる。

2.2 Definition of unimodularity

モノイダル圏 $\mathcal{C}$ に対し、そのテンソル積を逆順にしたものを $\mathcal{C}^{\mathsf{rev}}$ で表す。これは環 R に対する反対環 R^{op} の類似であるが、双対圏の記号と紛らわしいため、$\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ とは書かない。以降 $\mathcal{C}$ を有限的テンソル圏とし、

$$\mathcal{C}^{\mathsf{env}} := \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}^{\mathsf{rev}} \text{ は有限的テンソル圏である} \tag{2.2}$$

と仮定する。上で注意したように、k が完全体であれば、この仮定は自動的に満たされる。また、例えば $\mathcal{C}$ が有限次元ホップ代数の表現圏であるような場合にもこの仮定は満たされる。

$\mathcal{C}$ のユニモジュラー性を定義するため、まず $\mathcal{C}^{\mathsf{env}}$ の $\mathcal{C}$ への作用を

$$(X \boxtimes Y) \ominus V = X \otimes V \otimes Y \quad (V, X, Y \in \mathcal{C}) \tag{2.3}$$

で定義する。この作用により $\mathcal{C}$ は有限的左 $\mathcal{C}^{\mathsf{env}}$-加群圏となる。従って内部 Hom 関手が定義されるが、それを用いて代数 $A \in \mathcal{C}^{\mathsf{env}}$ を $A = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ で定める。ここで (1.6) より同型

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{1}, V) = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{1}, (V \boxtimes \mathbf{1}) \circleddash \mathbf{1}) \cong (V \boxtimes \mathbf{1}) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = (V \boxtimes \mathbf{1}) \otimes A$$

があることに注意せよ。定理 1.2 とその下の注意により、関手

$$K : \mathcal{C} \xrightarrow{\approx} (\mathcal{C}^{\mathsf{env}})_A, \quad V \mapsto (V \boxtimes \mathbf{1}) \otimes A \tag{2.4}$$

は $\mathcal{C}^{\mathsf{env}}$-加群圏の同値である。

さて M を左 A-加群とし、A の作用を $\lambda : A \otimes M \to M$ で表す。すると

$$M^* \otimes A \xrightarrow{M^* \otimes A \otimes \mathrm{coev}} M^* \otimes A \otimes M \otimes M^* \xrightarrow{M^* \otimes \lambda \otimes M^*} M^* \otimes M \otimes M^* \xrightarrow{\mathrm{ev} \otimes M^*} M^* \tag{2.5}$$

によって M は右 A-加群となる。特に A 自身を左からの積によって左 A-加群とみて、その左双対として得られる右 A-加群 A^* を考える。K は圏同値であるから、右 A-加群として

$$A^* \cong K(D) = (D \boxtimes \mathbf{1}) \otimes A \tag{2.6}$$

となるような対象 $D \in \mathcal{C}$ が同型を除いて一意的に存在する。ここで有限的テンソル圏において定義されるフロベニウス=ペロン次元の理論 [EO04] を用いると $D \otimes D^* \cong \mathbf{1} \cong D^* \otimes D$ であることが分かる。一般に、このような性質を持つ対象は **invertible object** と呼ばれる。また、$\mathcal{C}$ が有限次元ホップ代数の表現圏である場合、D は Radford によって導入された distinguished grouplike element [Rad94] と呼ばれるものと対応している。以上のことから、対象 D は **distinguished invertible object** [ENO04] と呼ばれる。

定義 (Etingof-Nikshych-Ostrik [ENO04])**.** $D \cong \mathbf{1}$ のとき、$\mathcal{C}$ は**ユニモジュラー**であると言う。

なお、P_0 を $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$ の射影被覆とするとき、D は $\mathrm{soc}(P_0)^*$ と同型である。Etingof と Ostrik は、はじめこれを D の定義として採用した上で Radford S^4-formula $V^{****} \cong D \otimes V \otimes D^*$ $(V \in \mathcal{C})$ を示そうとしたようだが、上手くいかなかったようである [EO04, Conjecture 2.15]。射影被覆等を用いた議論はアーベル圏特有のものであるが、一方で Radford S^4-formula はそのようなものとは関係なく、非常に一般的な設定の元で成り立つ雰囲気がある [ENO04, Remark 1.2]。 そのため、上記のような加群圏の理論に基づいた定義が本質的なのではないかと推測される。

2.3 The algebra A as a coend

ここから、ユニモジュラー性の特徴づけの証明の概要を説明する。第一の鍵となるのが代数 A の余エンドとしての表示である。まず**余エンド** (coend) について説明しよう。一般に $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ を圏、$P : \mathcal{A} \times \mathcal{A}^{\mathsf{op}} \to \mathcal{B}$ を関手とする。P から $C \in \mathcal{B}$ への**対角自然変換**とは、$X \in \mathcal{A}$ で添え字付けられた射の族 $i_X : P(X, X) \to C$ であって、任意の $\mathcal{A}$ の射 $f : X \to Y$ に対して

$$\begin{tikzcd} P(X,Y) \arrow[r, "P(X,f)"] \arrow[d, "P(f,Y)"'] & P(X,X) \arrow[d, "i_X"] \\ P(Y,Y) \arrow[r, "i_Y"'] & C \end{tikzcd}$$

が可換になるようなものである。このような $(C, \{i_X\}_{X\in\mathcal{A}})$ の中で普遍的なものを P の余エンドと呼び、

$$\int^{X\in\mathcal{A}} P(X,X)$$

で表す。余エンドはもともと**エンド** (end) の双対概念として定義されるものである。P のエンドは

$$\int_{X\in\mathcal{A}} P(X,X)$$

という記号で表される。エンドと余エンドは極限と余極限の一種として捉えることが可能であるが、極限や余極限がそうであるように、エンドや余エンドも一般には存在するとは限らない。これらの概念について、詳しくは [ML98] などを参照されたい。

さて、$\mathcal{C}$ および $A \in \mathcal{C}^{\mathsf{env}}$ を前節のとおりとする。このとき、次が成立する。

補題 2.1. $A \cong \displaystyle\int^{X\in\mathcal{C}} X^* \boxtimes X.$

証明は少々込み入っている。まず $\mathcal{C}$ 上の k-線形かつ左完全な関手の圏を $\textsc{Lex}(\mathcal{C})$ で表す。Eilenberg-Watts の定理や (2.1) の有限的アーベル圏のテンソル積の実現を用いると、

$$\Phi : \mathcal{C}^{\mathsf{env}} \to \textsc{Lex}(\mathcal{C}), \quad \Phi(V \boxtimes W)(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W^*, X) \cdot V \tag{2.7}$$

という関手が圏同値であることが示せる。ここで "$\cdot$" は**余冪** (copower) と呼ばれる

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(H \cdot V, W) \cong \mathrm{Hom}_k(H, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W)) \quad (H \in \mathrm{Vec}, V, W \in \mathcal{C})$$

で定義される有限次元ベクトル空間の圏 Vec の $\mathcal{C}$ への作用である。Φ の逆関手を Ψ とすると、$F \in \textsc{Lex}(\mathcal{C})$ に対する $\Psi(F)$ がある関手の余エンドになっていることが示され、結果として

$$\Psi(F) = \int^{X\in\mathcal{C}} F(X^*) \boxtimes X \tag{2.8}$$

という、右辺の余エンドの存在性と Ψ の余エンドを用いた表示の両方が一度に得られる。ここでエンドや余エンドに関してよく知られた関係式を用いると

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathsf{env}}}(X, \Psi(N \otimes (-) \otimes M^*)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, X \circledcirc N) \quad (X \in \mathcal{C}^{\mathsf{env}}, N, M \in \mathcal{C})$$

が得られる。内部 Hom 関手の定義より $\underline{\mathrm{Hom}}(M,N) = \Psi(N \otimes (-) \otimes M^*)$ であり、特に $M = N = \mathbf{1}$ とすれば補題の主張を得る。

なお、実際には、対角自然変換 $i_X : X^* \boxtimes X \to A$ がどのような射か、また A の代数構造が対角自然変換を用いてどのように表されるかなども調べておく必要があるが、本稿では省略する。

2.4 The central monad

圏 $\mathcal{A}$ 上の**モナド** (monad) とは、自然変換 $\mu : T^2 \to T$ と $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to T$ を持つ関手 $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ であって、任意の $X \in \mathcal{A}$ に対して

$$\begin{tikzcd}
T^3(X) \arrow[r, "\mu_{T(X)}"] \arrow[d, "T(\mu_X)"'] & T^2(X) \arrow[d, "\mu_X"] \\
T^2(X) \arrow[r, "\mu_X"'] & T(X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "\eta_{T(X)}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{T(X)}"'] & T^2(X) \arrow[d, "\mu_X"] & T(X) \arrow[l, "T(\eta_X)"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_{T(X)}"] \\
& T(X) &
\end{tikzcd}$$

が可換となるようなものである。これらの図がモノイダル圏における代数を定義する図と良く似ていることに気づくだろう。実際、$\mathcal{A}$ 上の関手の圏は関手の合成をテンソル積としてモノイダル圏となるが、このモノイダル圏における代数がモナドに他ならない。

$\mathcal{A}$ 上のモナド T が与えられると **T-加群** (T-module) を定義することができる。T-加群とは、作用と呼ばれる射 $\lambda : T(M) \to M$ を持つような対象 $M \in \mathcal{A}$ であって、

$$\begin{tikzcd} T^2(M) \arrow[r, "\mu_M"] \arrow[d, "T(\lambda)"'] & T(M) \arrow[d, "\lambda"] \\ T(M) \arrow[r, "\lambda"'] & T(M) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\eta_M"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_M"'] & T(M) \arrow[d, "\lambda"] \\ & M \end{tikzcd}$$

を可換にするものである。T-加群の射も T の作用と可換な射として定義される。T-加群の全体は圏となるが、この圏を ${}_T\mathcal{A}$ で表す。なお、多くの文献では T-加群を T-代数、T-加群の圏を T の Eilenberg-Moore 圏と呼んでいる。我々は常に何かの表現として現れるものを意識しているので、『加群』という言葉を使うことにするが、他の文献を参照する際には注意されたい。

例 2.2. $\mathcal{C}$ をモノイダル圏、$\mathcal{M}$ を $\mathcal{C}$-加群圏とする。$\mathcal{C}$ における代数 A が与えられたとき、A の誘導する $\mathcal{M}$ 上の関手 $T = A \oslash (-)$ は次で定義されるモナドの構造を持つ：

$$\mu_X : T^2(X) = A \oslash (A \oslash X) \xrightarrow{\cong} (A \otimes A) \oslash X \xrightarrow{m \oslash X} X,$$
$$\eta_X : X \xrightarrow{\cong} \mathbf{1} \oslash X \xrightarrow{u \oslash X} A \oslash X = T(X) \quad (X \in \mathcal{M}).$$

代数 $B \in \mathcal{C}$ 上の右加群の圏 $\mathcal{C}_B$ は自然な $\mathcal{C}$-加群の構造を持つことを思い出そう。$\mathcal{M} = \mathcal{C}_B$ のとき、上で定義したモナド T 上の加群は A-B-双加群に他ならない。

本稿において重要な例が Day-Street [DS07] によって導入された **central monad** である。$\mathcal{C}$ をリジッドなモノイダル圏であって、任意の $V \in \mathcal{C}$ に対して余エンド

$$Z(V) = \int^{X \in \mathcal{C}} X^* \otimes V \otimes X \tag{2.9}$$

が存在するようなものとする（そう明らかなことではないが、$\mathcal{C}$ が有限的テンソル圏ならこれは存在する)。余エンドに関するパラメータ定理 [ML98] より、対応 $V \mapsto Z(V)$ を $\mathcal{C}$ 上の関手 $Z : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ にすることが可能である。さて、$i_V(X) : X^* \otimes V \otimes X \to Z(V)$ $(V, X \in \mathcal{C})$ を対角自然変換とする。関手 Z は

$$\mu_V \circ i_{Z(V)}(X) \circ (\mathrm{id}_{X^*} \otimes i_V(Y) \otimes \mathrm{id}_X) = i_V(X \otimes Y), \quad \eta_V = i_V(1) \quad (V, X, Y \in \mathcal{C})$$

によって特徴付けられるモナドの構造をもつ。このモナド Z を central monad と呼ぶ。

定義域と値域を同じくする関手 F と G に対し、F から G への自然変換全体を $\mathrm{N{\scriptsize AT}}(F, G)$ で表す。エンドや余エンドに関する基本性質を用いると、任意の $V \in \mathcal{C}$ に対して写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z(V), V) \to \mathrm{N{\scriptsize AT}}(V \otimes (-), (-) \otimes V), \quad \phi \mapsto (\mathrm{id}_{(-)^*} \otimes \phi i_V(-)) \circ (\mathrm{coev} \otimes \mathrm{id}_V \otimes \mathrm{id}_{(-)})$$

は全単射であることが分かる。さらに射 $\phi : Z(V) \to V$ が V を Z-加群にすることと、この射に対応する自然変換 $\sigma : V \otimes (-) \to (-) \otimes V$ が V を $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ の対象とすることは同値であり、このことより圏同型 $\mathcal{Z}(\mathcal{C}) \cong {}_Z\mathcal{C}$ が得られる。なお central monad は実際には Bruguières-Virelizier [BV07] の意味での**準三角ホップモナド** (quasitriangular Hopf monad) である。一般に準三角ホップモナド上の加群の圏は組みひも圏となり、さらに上で言及した圏同型 $\mathcal{Z}(\mathcal{C}) \cong {}_Z\mathcal{C}$ は実際には組みひも圏の同型となっている。

2.5 Proof of the main result

以上で主結果の証明に必要な概念の紹介は終了した。以降、証明の概略を説明する。まず $\mathcal{C}$ を (2.2) を満たす有限的テンソル圏とし $A = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ とおく（ただし $\underline{\mathrm{Hom}}$ は作用 (2.3) に関して）。$\mathcal{H} = (\mathcal{C}^{\mathsf{env}})_A$ は $\mathcal{C}^{\mathsf{env}}$-加群圏であったが、その構造を用いて $\mathcal{H}$ 上のモナド $T = A \otimes (-)$ を例 2.2 と同様に定義する。このとき T-加群の圏 ${}_T\mathcal{H}$ はちょうど両側 A-加群の圏 ${}_A(\mathcal{C}^{\mathsf{env}})_A$ である。

ここで $\mathcal{H}$ と $\mathcal{C}$ の間には (2.4) で与えられる圏同値 $K : \mathcal{C} \to \mathcal{H}$ があったことを思い出そう。圏同値 K を通して $\mathcal{H}$ 上のモナド T から $\mathcal{C}$ 上のモナドが定義される。この $\mathcal{C}$ 上のモナドを T' と書くことにすると、定義より $K \circ T' \cong T \circ K$ である。K は単なる圏同値ではなく、$\mathcal{C}^{\mathsf{env}}$-加群圏の同値であったことを思い出すと

$$K(T'(V)) \cong T(K(V)) = A \otimes K(V) \cong K(A \ominus V)$$

が得られる。故に $T'(V) = A \ominus V$ であるとしてよい。本来は $\mathcal{C}^{\mathsf{env}}$ の作用と余エンドを意味する積分記号との整合性を確かめなければならないが、ここでは省略して乱暴に計算すると、補題 2.1 より

$$T'(V) = A \ominus V = \int^{X \in \mathcal{C}} (X^* \boxtimes X) \ominus V = \int^{X \in \mathcal{C}} X^* \otimes V \otimes X$$

を得る。これは前節で言及した central monad Z である（正確には、これまでの議論だけでは同じ関手が現れるというだけのことしか言えないが、注意深く計算するときちんとモナドとして同じものが現れていることが示せるのである）。

まとめると、圏同値 $K : \mathcal{C} \to \mathcal{H}$ のもとで、$\mathcal{H}$ 上のモナド $T = A \otimes (-)$ は $\mathcal{C}$ 上の central monad Z に対応しているということである。したがって K は T-加群の圏 ($= {}_A(\mathcal{C}^{\mathsf{env}})_A$) と Z-加群の圏 ($\cong \mathcal{Z}(\mathcal{C})$) の間の同値を誘導する。この同値を $\widetilde{K} : \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \to {}_T\mathcal{H}$ と書くと、定義より可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Z}(\mathcal{C}) \arrow[r, "\widetilde{K}"] \arrow[d, "U"'] & {}_T\mathcal{H} \arrow[r, equal] & {}_A(\mathcal{C}^{\mathsf{env}})_A \arrow[d, "U'"] \\
\mathcal{C} \arrow[r, "K"'] & \mathcal{H} \arrow[r, equal] & (\mathcal{C}^{\mathsf{env}})_A
\end{tikzcd}$$

を得る。ただし、U と U' はモナドの作用を忘れる関手である。

ここで $\widetilde{K}^{-1}$ を $\widetilde{K}$ の擬逆 (quasi-inverse) とする。我々は U の左随伴 L や右随伴 R を良く知りたい。もし G が U' の右 (左) 随伴ならば、上の可換図式より、$\widetilde{K}^{-1} \circ G \circ K$ は U の右 (左) 随伴となる。U に比べて U' の方は分かりやすく、例えばその左随伴が $A \otimes (-)$ で与えられることはすぐに分かる。よって

$$L(V) \cong \widetilde{K}^{-1}(A \otimes K(V)) \cong \widetilde{K}^{-1}(A \otimes (V \boxtimes \mathbf{1}) \otimes A) \quad (V \in \mathcal{C}). \tag{2.10}$$

一般に右 A-加群 M の右随伴 ${}^*M$ は自然に左 A-加群となる (*cf.* (2.5))。A 自身を右 A-加群と見て、その右双対をとることで、左 A-加群 ${}^*A$ が得られる。U' の右随伴は ${}^*A \otimes (-)$ で与えられ、(2.6) などより

$$R(V) \cong \widetilde{K}^{-1}({}^*A \otimes K(V)) \cong \widetilde{K}^{-1}(A \otimes (D \boxtimes \mathbf{1}) \otimes (V \boxtimes \mathbf{1}) \otimes A) \quad (V \in \mathcal{C}). \tag{2.11}$$

ここで (2.10) と (2.11) を比較して、

$$R(V) \cong L(D \otimes V) \tag{2.12}$$

という関係式を得る。つまり**忘却関手 $U : \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ の右随伴と左随伴の差は D によって記述される**（少し議論を深めると、逆にこの性質を以って D を特徴付けることも可能であることが分かる）。以上の準備の下、主結果は次のようにして示される。

定理. 次の条件はすべて同値である。

(1) $\mathcal{C}$ はユニモジュラー。
(2) U はフロベニウス関手、すなわちその左随伴 L と右随伴 R は同型である。
(3) 自然同型 $L(V^*) \cong L(V)^*$ が存在する。
(4) 同型 $L(\mathbf{1}) \cong L(\mathbf{1})^*$ が存在する。
(5) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(\mathbf{1}, L(\mathbf{1})) \neq 0$
(6) 自然同型 $R(V^*) \cong R(V)^*$ が存在する。
(7) 同型 $R(\mathbf{1}) \cong R(\mathbf{1})^*$ が存在する。
(8) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(R(\mathbf{1}), \mathbf{1}) \neq 0$

Proof. (1) ⇒ (2): $\mathcal{C}$ がユニモジュラーなら定義より $D \cong \mathbf{1}$ である。(2.12) より $L \cong R$ を得る。

(2) ⇒ (3): $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ の定義より U はテンソル積を保つ。このことから U の随伴もテンソル積および関連する構造とある種の整合性を持つのではないかと予想されるだろう。実際そのような結果が数多く知られており、今回はその中でも右随伴、左随伴と双対性をつなぐ自然同型

$$R(V^*) \cong L(V)^* \tag{2.13}$$

を用いる（実はこの証明はそう難しくない。例えば Bruguières-Virelizier [BV12, Lemma3.5] を見よ）。この関係式を用いれば証明は直ちに終わる。実際 $L \cong R$ なら $L(V^*) \cong R(V^*) \cong L(V)^*$ である。

(3) ⇒ (4): $V = \mathbf{1}$ とせよ。$\mathbf{1}^* \cong \mathbf{1}$ に注意して (2.13) より $L(\mathbf{1}) \cong L(\mathbf{1}^*) \cong L(\mathbf{1})^*$ を得る。

(4) ⇒ (5): $L(\mathbf{1}) \cong L(\mathbf{1})^*$ であると仮定すると

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(\mathbf{1}, L(\mathbf{1})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(\mathbf{1}, L(\mathbf{1})^*) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(L(\mathbf{1}), \mathbf{1}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, U(\mathbf{1})) = \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}) \neq 0.$$

(5) ⇒ (1): $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(\mathbf{1}, L(\mathbf{1})) \neq 0$ と仮定すると

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D, \mathbf{1}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(L(D), \mathbf{1}) &\underset{(2.12)}{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(R(\mathbf{1}), \mathbf{1}) \\ &\underset{(2.13)}{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(L(\mathbf{1})^*, \mathbf{1}) \underset{(1.1)}{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(\mathbf{1}, L(\mathbf{1})) \neq 0.\end{aligned}$$

D と $\mathbf{1}$ は単純対象であるため、Schur の補題より $D \cong \mathbf{1}$ である。よって $\mathcal{C}$ はユニモジュラー。

最後に (3) ⇒ (6) ⇒ (7) ⇒ (8) ⇒ (1) を同様にして示せば、証明が完了する。 □

3 トポロジーへの応用

3.1 ハンドル体絡み目の不変量の構成

有限個のソリッドトーラス（中身の詰まったトーラス）の連結和を**ハンドル体**と呼ぶ。**ハンドル体絡み目**とは、有限個のハンドル体を三次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ に埋め込んだものである。有限個のソリッドトーラス

を埋め込んだものは通常の絡み目と思うことができ、このような意味でハンドル体絡み目の理論は通常の絡み目の理論を包括するようなものであると言える。

結び目・絡み目の理論においてその不変量の研究が大きなウェイトを占めているように、ハンドル体絡み目の理論においても不変量の研究が重要である。最近、石井・増岡 [IM13] により、組みひも圏（若手会セミナーのほうの報告集を参照されたい）におけるある種の代数からハンドル体絡み目の不変量を構成する方法が得られた。まずその結果について簡単に解説しよう。既に例 2.2 の中でモノイダル圏における代数の概念については紹介した。A をモノイダル圏における代数であって、左双対対象を持つようなものとする。このとき A の**トレース**とは、射 $t: A \to \mathbf{1}$ であって

$$A \xrightarrow{\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{coev}_A} A \otimes A \otimes A^* \xrightarrow{m \otimes \mathrm{id}_{A^*}} A \otimes A^* \xrightarrow{t \otimes \mathrm{id}_{A^*}} A^*$$

が同型となるようなものである。トレースを持つような代数 A を**フロベニウス代数**と呼ぶ。次に、A が組みひも圏における代数であると仮定する。等式 $m \circ \sigma_{A,A} = m$ が成り立つとき、A は**可換**であると言われる（ただし σ は組みひも構造である）。以上によって**可換フロベニウス代数**の概念が定義されるが、石井・増岡 [IM13] で与えられているのは、組みひも圏における可換フロベニウス代数からハンドル体絡み目の不変量を構成する手続きである[*2]。

なお、ベクトル空間の圏は組みひも圏であり、この圏における可換フロベニウス代数は通常の意味のそれと一致する。残念ながら、そのようなものはある意味で自明なハンドル体絡み目の不変量しか生み出さない。良い不変量を作るには、ある程度複雑な構造を持った組みひも圏における可換フロベニウス代数が必要なようである。[IM13] で考察されているのは、有限次元ホップ代数 H 上の Yetter-Drinfeld 圏 ${}^H_H\mathcal{YD}$ と呼ばれる組みひも圏におけるある可換代数である。その可換代数は、圏論的な視点からは次のように捉えられる。まず $\mathcal{C}$ を条件 (2.2) を満たす有限的テンソル圏とし、その中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ を考える。忘却関手 $U: \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ は右随伴 R を持つが、これは強モノイダル関手の右随伴としてモノイダル関手となる。したがって $B = R(\mathbf{1})$ は代数 $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$ のモノイダル関手による像としてまた代数となる。さらに B が可換代数であることも分かる（自明ではないがよく知られている）。そこでフロベニウス性が気になるところであるが、本稿で紹介した $\mathcal{C}$ のユニモジュラー性の特徴づけを用いると、次を示すことができる：

定理 3.1 ([Shi14])**.** B がフロベニウス代数 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ がユニモジュラー

$\mathcal{C}$ が有限次元ホップ代数 H の表現圏である場合、組みひも圏として $\mathcal{Z}(\mathcal{C}) \cong {}^H_H\mathcal{YD}$ であることが知られている。この圏同型による同一視の元、[IM13] で用いられている ${}^H_H\mathcal{YD}$ の可換代数は我々の B に対応する。したがって、上の定理は、ユニモジュラーな有限次元ホップ代数から ${}^H_H\mathcal{YD}$ における可換フロベニウス代数を構成する [IM13] の手法の圏論的な一般化を与えていると言える。

上の定理と [IM13] の結果により、ユニモジュラーな有限的テンソル圏からハンドル体絡み目の不変量が得られるということになる。しかしながら、このようにして得られた不変量を計算するための実効的な手法は分かっていない（不変量を計算するためには、例えば代数 B を具体的に表示する必要があるように思えるが、そのためには U の右随伴 R の存在を示すだけではなく、それを**構成**しなくてはならない）。一方で、膨大な種類の新しい不変量が定義できたことだけは確かである。今後の研究によりこの中から良い不変量が見つかることを期待したい。

[*2] 実際には [IM13] で quantum-commutative quantum-symmetric algebra と呼ばれている、可換フロベニウス代数のようなものだが単位元を持たなくても良いようなある種の代数が与えられれば十分である。

3.2 三次元多様体の不変量の構成

最後に、ユニモジュラーな有限次元リボンホップ代数から構成される三次元多様体（正確には向き付け可能な閉三次元多様体）の Hennings-Kauffman-Radford (HKR) 不変量の圏論的な理解について簡単に述べることにする。まず $\mathcal{C}$ を有限的リボン圏、すなわち有限的テンソル圏であって、なおかつリボン圏（若手会セミナーの報告集を参照されたい）であるようなものとする。このとき余エンド

$$F := \int^{X \in \mathcal{C}} X^* \otimes X$$

が存在するが、実はこの対象は $\mathcal{C}$ におけるホップ代数の構造を持つ [KL01]。次に、各自然数 n に対し、$\mathcal{T}_n$ で ribbon n-handle [Vir06, §2.1] (= n-component bottom tangle [Hab06, §1.1]) の集合を表す。余エンドの普遍性とリボン圏における射の図式的計算のテクニックを用いることで、写像

$$\phi_n : \mathcal{T}_n \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F^{\otimes n}, \mathbf{1})$$

が定義できる。さらに射 $\alpha : \mathbf{1} \to F$ が与えられれば

$$F_\alpha : \mathcal{T} = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n \xrightarrow{\ \bigsqcup \phi_n\ } \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F^{\otimes n}, \mathbf{1}) \xrightarrow{\ \bigsqcup \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha^{\otimes n}, \mathbf{1})\ } \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) \cong k$$

という写像が定義できる。

さて、三次元多様体 M が与えられたとする。このとき M はある $\mathcal{T}$ の元（正確にはそれを閉じたリボン）から手術という操作によって得られることが知られている。そこで M を与えるような $T \in \mathcal{T}$ をとり

$$\tau_{\mathcal{C}}(M; \alpha) := \Theta_\alpha(T) \cdot F_\alpha(T)$$

とおく（ここで $\Theta_\alpha(T) \in k$ は T を閉じて得られるリボンの絡み行列を用いて記述されるある補正項であり、ともすれば『分母にゼロを持つ』ような well-defined ではないかもしれないものである)。一般には $\tau_{\mathcal{C}}(M; \alpha)$ は M の不変量とはならないが、異なる 2 つの $\mathcal{T}$ の元がいつ同じ多様体を生み出すのかは良く理解されているため、α にどのような条件を課せば $\tau_{\mathcal{C}}(-; \alpha)$ が三次元多様体の不変量となるのかを調べることができる。このような考察の元、Virelizier [Vir06] は**代数的カービー元** (algebraic Kirby element) およびその**正規化可能性**の概念を導入した。正規化可能性は補正項 $\Theta_\alpha(T)$ が well-defined であることを保障する条件である。もし α が正規化可能な代数的カービー元ならば、$\tau_{\mathcal{C}}(-; \alpha)$ は三次元多様体の不変量となる。

実は HKR 不変量は、この非常に一般的な構成法の特殊例となっている。実際 $\mathcal{C}$ がユニモジュラーな有限次元リボンホップ代数 H の表現圏であったと仮定しよう。そのとき余エンド F はベクトル空間としては H の双対空間と同一視でき、さらに H 上の右積分を用いて F の非自明な（=ゼロでない）両側積分 $\Lambda : \mathbf{1} \to F$ を構成することができる。実はこの射 Λ は代数的カービー元であり、その正規化可能性は HKR 不変量がきちんと定義されるための条件と同値である。そして Λ が正規化可能であるときには $\tau_{\mathcal{C}}(-; \Lambda)$ は HKR 不変量と一致するのである [Vir06, Corollary 4.16]。

このような意味で、HKR 不変量には既に圏論的理解が与えられていると言って良い。ここではさらにもう一歩進めて、一般の有限的リボン圏 $\mathcal{C}$ から HKR 不変量の一般化が得られるのかどうかを考えてみよう。上の議論で重要だったのは、ホップ代数 F の非自明な両側積分が代数的カービー元になるという事実である。一般の場合、F の非自明な両側積分は存在するとは限らないが、もし存在すれば代数的カービー元となる。そこ

で、そのようなものが存在するのはいつかということが問題となるが、本稿の主結果であるユニモジュラー性の特徴づけを用いると：

定理 3.2. 非自明な両側積分 $\Lambda : \mathbf{1} \to F$ が存在する $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ がユニモジュラー

証明の詳細は現在準備中である [Shi14] の改訂版を待たれたい。なお、この結果はユニモジュラーな有限的リボン圏から HKR 不変量の一般化が得られるということを主張しているが、ハンドル体絡み目の話でもそうだったように、このようにして得られる不変量の実効的な計算方法は知られていない（そのためには、余エンド F を**構成**する必要があるだろう）。最近 HKR 不変量の構成がユニモジュラーな有限次元リボン準ホップ代数に対して拡張されたが [Geo13]、上の議論はその圏論的理解を与えるのではないかと期待している。

参考文献

[AFS09] N. Andruskiewitsch and W. Ferrer Santos. The beginnings of the theory of Hopf algebras. *Acta Appl. Math.*, 108(1):3–17, 2009.

[BLV11] A. Bruguières, S. Lack, and A. Virelizier. Hopf monads on monoidal categories. *Adv. Math.*, 227(2):745–800, 2011.

[BV07] A. Bruguières and A. Virelizier. Hopf monads. *Adv. Math.*, 215(2):679–733, 2007.

[BV12] A. Bruguières and A. Virelizier. Quantum double of Hopf monads and categorical centers. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364(3):1225–1279, 2012.

[CMZ02] S. Caenepeel, G. Militaru, and S. Zhu. *Frobenius and separable functors for generalized module categories and nonlinear equations*, volume 1787 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[Del90] P. Deligne. Catégories tannakiennes. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, volume 87 of *Progr. Math.*, pages 111–195. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[DS07] B. Day and R. Street. Centres of monoidal categories of functors. In *Categories in algebra, geometry and mathematical physics*, volume 431 of *Contemp. Math.*, pages 187–202. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[DSPS14] C. L. Douglas, C. Schommer-Pries, N. Snyder. The balanced tensor product of module categories. `arXiv:1406.4204`.

[EGNO] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, and V. Ostrik. Tensor categories. Lecture notes for MIT 18.769, 2009. `http://www-math.mit.edu/~etingof/tenscat1.pdf`.

[ENO04] P. Etingof, D. Nikshych, and V. Ostrik. An analogue of Radford's S^4 formula for finite tensor categories. *Int. Math. Res. Not.*, (54):2915–2933, 2004.

[EO04] P. Etingof and V. Ostrik. Finite tensor categories. *Mosc. Math. J.*, 4(3):627–654, 782–783, 2004.

[Fra13] I. L. Franco. Tensor products of finitely cocomplete and abelian categories. *Journal of Algebra*, 396(0):207 – 219, 2013.

[Geo13] J. George. A Hennings TQFT Construction for Quasi-Hopf Algebras. `arXiv:1311.5650`.

[Hab06] K. Habiro. Bottom tangles and universal invariants. *Algebr. Geom. Topol.*, 6:1113–1214 (electronic), 2006.

[Hen96] M. Hennings. Invariants of links and 3-manifolds obtained from Hopf algebras. *J. London Math. Soc. (2)*, 54(3):594–624, 1996.

[IM13] A. Ishii and A. Masuoka. Handlebody-knot invariants derived from unimodular Hopf algebras. `arXiv:1307.5632`.

[Kas95] C. Kassel. *Quantum groups*, volume 155 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[KL01] T. Kerler and V. V. Lyubashenko. *Non-semisimple topological quantum field theories for 3-manifolds with corners*, volume 1765 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[KR95] L. H. Kauffman and D. E. Radford. Invariants of 3-manifolds derived from finite-dimensional Hopf algebras. *J. Knot Theory Ramifications*, 4(1):131–162, 1995.

[Lor97] M. Lorenz. Representations of finite-dimensional Hopf algebras. *J. Algebra*, 188(2):476–505, 1997.

[ML98] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.

[Mon93] S. Montgomery. *Hopf algebras and their actions on rings*, volume 82 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1993.

[Ost03] V. Ostrik. Module categories, weak Hopf algebras and modular invariants. *Transform. Groups*, 8(2):177–206, 2003.

[Rad76] D. E. Radford. The order of the antipode of a finite dimensional Hopf algebra is finite. *Amer. J. Math.*, 98(2):333–355, 1976.

[Rad94] D. E. Radford. The trace function and Hopf algebras. *J. Algebra*, 163(3):583–622, 1994.

[Shi14] K. Shimizu. A characterization of unimodular finite tensor categories. *In preparation*, 2014.

[Vir06] A. Virelizier. Kirby elements and quantum invariants. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 93(2):474–514, 2006.