Immanant 不等式と Immanantal Polynomials

田端亮　(広島大学大学院理学研究科)*

1. Immanant と不等式

Immanant とは, 行列式 (determinant) や恒久式 (permanent) を一般化するような, 正方行列に対して定まる関数であり, Schur [4] によって導入され, Littlewood-Richardson [3] によって名付けられたとされている.

定義. $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ とする. χ_λ を n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の既約表現の指標であるとする. このとき, immanant d_λ を次で定義する.

$$d_\lambda(A) := \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \chi_\lambda(\sigma) a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}.$$

また, immanant の normalization を $\overline{d}_\lambda := 1/\chi_\lambda(\mathrm{id}) d_\lambda$ と定義する.

注意 1. $\mathfrak{S}_n$ の既約表現は n の分割 (ヤング図形) と一対一対応を持つ. これにより, immanant もまた, ヤング図形でパラメータ付けすることができる.

例 1. $\lambda = \begin{smallmatrix}\square\\ \vdots\\ \square\end{smallmatrix}$ のとき, $\chi_{\begin{smallmatrix}\square\\ \vdots\\ \square\end{smallmatrix}}(\sigma) = \operatorname{sgn}\sigma$ (交代指標) であり,

$$d_{\begin{smallmatrix}\square\\ \vdots\\ \square\end{smallmatrix}}(A) = \det A.$$

例 2. $\lambda = \square\cdots\square$ のとき, $\chi_{\square\cdots\square}(\sigma) = 1$ (自明指標) であり,

$$d_{\square\cdots\square}(A) = \operatorname{per} A.$$

Littlewood-Richardson [3] は, immanant を用い, 次のようにして Schur 関数 s_λ を定義した.

$$s_\lambda = \frac{1}{n!} d_\lambda \begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_2 & p_1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}.$$

ここで, p_i は変数 $x_1, x_2, \cdots$ の, i 次積和対称式である.

Schur 関数については Littlewood-Richardson Rule という性質が知られているが, [3] では immanant もまた, "主小行列に関して" Littlewood-Richardson Rule が成り立つことが指摘されている.

Immanant に関する不等式について, 次のような定理と予想が知られている.

定理 (Schur [4])**.** λ を n の分割とする. 任意の半正値エルミート行列 A に対して, 次が成り立つ.

$$\det A \le \overline{d}_\lambda(A).$$

予想 (Lieb [2])**.** λ を n の分割とする. 任意の半正値エルミート行列 A に対して, 次が成り立つ.

$$\overline{d}_\lambda(A) \le \operatorname{per} A.$$

* e-mail: `tabata-ryo@hiroshima-u.ac.jp`

この 2つを精密化をするために, 次のような問題を設定する.

問題. n の各分割 λ に対して,

$$R(\lambda) := \left\{ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists A : \text{半正値エルミート行列 s.t. } \operatorname{per} A \neq \det A, \\ \overline{d}_\lambda(A) = t \operatorname{per} A + (1-t) \det A. \end{array} \right\}$$

を決定せよ.

現在, $n \leq 4$ で, 全ての λ に対して, $R(\lambda)$ を決定しており, 次のような予想を立てている.

予想. (1) $\lambda \neq \square\cdots\square, \begin{smallmatrix}\square\\ \vdots\\ \square\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}\square&\cdots&\square\\ \square&&\end{smallmatrix}$ とする. 次の行列は, $R(\lambda)$ の最大値を与える.

$$Y_n = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列は, $R(\begin{smallmatrix}\square&\cdots&\square\\ \square&&\end{smallmatrix})$ の最大値を与える.

$$Y_3 \oplus I_{n-3} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & & O & \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & & O \\ & O & & & \ddots & \\ & & & O & & 1 \end{array}\right)$$

命題. $\lambda \neq \square\cdots\square, \begin{smallmatrix}\square\\ \vdots\\ \square\end{smallmatrix}$ とする. 次の行列は, $R(\lambda)$ の最小値 0 を与える.

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Immanantal Polynomials

前章で定義した immanant を用いて, 行列の固有多項式の一般化として, immanantal polynomial を 考える.

定義. Immanantal polynomial を $d_\lambda(xI_n - A)$ で定義する. また, これを展開したときの x^{n-k} の係数を $c_{\lambda,k} = c_{\lambda,k}(A)$ で表す.

$$d_\lambda(xI_n - A) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_{\lambda,k} x^{n-k}.$$

この immanantal polynomial の各係数に関して, 前章と類似の形の不等式を考えてみた.

$$\overline{d}_\lambda(xI_n - A) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \overline{c}_{\lambda,k} x^{n-k}$$

と書く. $2 \le k \le n$ に対して,

$$R_k(\lambda) := \left\{ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists A: \text{半正値エルミート行列 s.t.} \operatorname{per} A \neq \det A. \\ \overline{c}_{\lambda,k} = t \;\; \overline{c}_{\square\cdots\square,k}(A) + (1-t) \;\; \overline{c}_{\begin{smallmatrix}\square\\ \vdots\\ \square\end{smallmatrix},k}(A) \end{array} \right\}$$

と定義する.

定理. λ を n の分割とする. このとき, 次が成り立つ.

$$R_2(\lambda) \subset R_3(\lambda) \subset \cdots \subset R_n(\lambda) = R(\lambda).$$

また, $R_2(\lambda)$ は $\left\{ \dfrac{1}{2} + \dfrac{\chi_\lambda(12)}{\chi_\lambda(\mathrm{id})} \right\}$ の 1 点から成る.

系. λ を n の分割とする. $2 \le k \le n$ に対して, 次が成り立つ.

$$\overline{c}_{\begin{smallmatrix}\square\\ \vdots\\ \square\end{smallmatrix},k} \le \overline{c}_{\lambda,k}.$$

$R_k(\lambda)$ のとりうる範囲を決定するには至っていない. しかし, 各 $R_k(\lambda)$ の最小値は J_n によって与えられることを予想される. 一方の最大値は, 1 章の予想 (2) のような例外が既にいくつか見つかっているが, “多くの場合” には, Y_n という行列が最大値を与えることが予想される.

3. Immanant の極限値

この章では, この行列 Y_n について考察を行う. $n \ge 2$ に対して, $\det Y_n = 0$ であるが, Fischer-Frenzen によって, 次のような結果が与えられている.

定理 (Fischer-Frenzen [1])**.**

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{per} Y_n = \frac{e}{2}.$$

これにより, 他の immanant の極限値も興味深い. 今回は, hook のヤング図形に対応する immanant について, 次の結果を得た.

定理. $k = k(n)$ とする. $\lim_{n\to\infty} k/n = c$ $(0 \le c \le 1)$ であるとき,

$$\lim_{n\to\infty} \overline{d}_{(k,1^{n-k})}(Y_n) = \frac{c}{c+1} e.$$

以下, 定理の証明に用いた補題を紹介する. Immanant の Littlewood-Richardson rule を用いて, 次の等式を得る.

補題 1 (Hook Immanants の Littlewood-Richardson Rule)**.** $Y_{n,k}$ を, Y_n の $k \times k$ 主小行列とする. このとき, 次が成り立つ.

$$d_{(k-1,1^{n-k+1})}(Y_n) + d_{(k,1^{n-k})}(Y_n) \;\; = \;\; \binom{n}{k-1} \operatorname{per} Y_{n,k-1} \det Y_{n,n-k+1}.$$

これにより, hook immanant 以外の部分, つまり $\operatorname{per} Y_{n,k-1}$ と $\det Y_{n,n-k+1}$ を, 次の 2 つの補題によって求めることで, 定理が証明される.

補題 2. I_n を $n \times n$ 単位行列とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \det(tI_n + aJ_n) &= t^{n-1}(t+na), \\ \operatorname{per}(tI_n + aJ_n) &= \int_0^\infty (t+ax)^n \, e^{-x} dx. \end{aligned}$$

補題 3.

$$\operatorname{per} Y_{n,k} = \frac{n-k}{n-1} \operatorname{per} Y_{n,k-1} + \frac{n(k-1)}{(n-1)^2} \operatorname{per} Y_{n,k-2}$$

参考文献

[1] C. L. Frenzen, I. Fischer, On a Conjecture of Pierce for Permanents of Singular Correlation Matrices, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 14(1):74-81 (1993).

[2] E. H. Lieb, Proofs of Some Conjectures on Permanents, J. Math. and Mech. 16:127-134 (1966).

[3] D. E. Littlewood, A. R. Richardson, Group Characters and Algebra, Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A, Math. Phys. 233:99-141 (1934).

[4] I. Schur, Über endliche Gruppen und Hermitische Formen, Math. Z. 1:184-207 (1918).