# $q$-Schur algebra $S(e,e)$ の Hochschild cohomology group

塚本真由 *

大阪市立大学大学院 理学研究科数物系専攻

本稿は, 第１９回代数学若手会での講演とその内容のその後の進展に関してまとめたものです. １章は主に講演内容についてまとめたもので, ２章はその後の進展についてまとめたものです.

## 1 講演内容

Hochschild cohomology とは Gerhard Hochschild により 1945 年に導入された多元環のコホモロジー群である.
$K$ を可換環とする. $K$ 上の代数 $R$ に対して, $R$ の $n$ 次 Hochschild cohomology group が次で定義される;

$$\mathrm{HH}^n(R) := \mathrm{Ext}^n_{R^{\mathrm{en}}}(R,R).$$

ここで, $R^{\mathrm{en}}:= R\otimes_K R^{\mathrm{op}}$ であり, $R^{\mathrm{en}}$ は両側からの積により $R$ へ作用している. より一般に $R^{\mathrm{en}}$-module $M$ に対して, $R$ の $M$ における $n$ 次 Hochschild cohomology group が次で定義される;
$\mathrm{H}^n(R,M):= \mathrm{Ext}^n_{R^{\mathrm{en}}}(R,M)$ (つまり, $\mathrm{HH}^n(R) = \mathrm{Ext}^n_{R^{\mathrm{en}}}(R,R)$ である. )
また, $R$ の $R^{\mathrm{en}}$-free resolution により $R$ の $M$ における $n$ 次 Hochschild cohomology group は表される.

$$\cdots \xrightarrow{d_3} R^{\otimes 4} \xrightarrow{d_2} R^{\otimes 3} \xrightarrow{d_1} R^{\otimes 2} \xrightarrow{d_0} R \to 0 \tag{1.1}$$

ここで, $d_0$ は multiplication map であり, $i \geq 1$ に対しては次で定義される;

$$d_i(s_0\otimes s_1\otimes\cdots\otimes s_{i+1}) = \sum_{n=0}^{i}(-1)^n s_0\otimes\cdots\otimes s_n s_{n+1}\otimes\cdots\otimes s_{i+1}.$$

(1,1) に $\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{e}}}(-,M)$ をあてると次の complex を得る.

$$0\to \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{en}}}(R^{\otimes 2},M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(d_1,M)} \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{en}}}(R^{\otimes 3},M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(d_2,M)} \mathrm{Hom}_(R^{\otimes 4},M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(d_3,M)} \cdots$$

この時, $\mathrm{HH}^i(R,M) = \mathrm{KerHom}(d_{i+1},M)/\mathrm{ImHom}(d_i,M)$ となる.
次に対象となる代数を導入する. １の原始 $e$ 乗根 $q$ を parameter に持つ rank $e$, degree $e$ の $q$-Schur algebra $S_q(e,e)$ の主ブロックを $A_e$ とすると, $A_e$ は次の quiver と relation で表される代数と森田同値になることが知られている.[1]

$$Q \ := (1) \underset{\alpha^-(1)}{\overset{\alpha(1)}{\rightleftarrows}} (2) \underset{\alpha^-(2)}{\overset{\alpha(2)}{\rightleftarrows}} (3)\cdots(i-1) \underset{\alpha^-(i-1)}{\overset{\alpha(i-1)}{\rightleftarrows}} (i) \underset{\alpha^-(i)}{\overset{\alpha(i)}{\rightleftarrows}} (i+1)\cdots(e-1) \underset{\alpha^-(e-1)}{\overset{\alpha(e-1)}{\rightleftarrows}} (e)$$

relation: $\alpha(i)\alpha(i-1) = 0$

$\alpha^-(i-1)\alpha^-(i) = 0$

*m13sa30M19@ex.media.osaka-cu.ac.jp
[1] この場合は実は主ブロック以外は存在しても simple algebra.

$$\alpha(i-1)\alpha^-(i-1) = \alpha^-(i)\alpha(i) \qquad (2 \le i \le e-1)$$
$$\alpha(e-1)\alpha^-(e-1) = 0$$

$I$ :上の relation で生成された path algebra $\mathbb{C}Q$ の両側 ideal
このとき $A_e = \mathbb{C}Q/I$

**注意 1.1.** gl.dim$A_e = 2(e-1)$.

(1,1) は standard complex と呼ばれる．一般に standard complex を用いて Hochschild cohomology を計算することは難しい．そこで Hochschild cohomology を計算する際によく用いられるのが, 次の結果である.

**定理 1.2.** [1]
$\{e_1, \cdots, e_l\}$ を $A$ の原始冪等元の代表系とし, $P(i) := Ae_i$, $S(i) :=$ top $P(i)$, $P(i,j) := A_e e_i \otimes_{\mathbb{C}} e_j A_e$ とおく.
このとき $Q_m$ を $A_e$ の $A_e^{\mathrm{en}}$-minimal projective resolution の第 $m$ 項とすると

$$Q_m = P(i,j)^{\dim \mathrm{Ext}^m_{A_e}(S(i),S(j))}.$$

**注意 1.3.** この結果は一般に代数閉体上の有限次元代数に対して成り立つ.

この結果から minimal projective resolution の一般項がわかる．特にこの結果から $A_e$ の global dimension と $A_e$ の $A_e^{\mathrm{en}}$ 加群としての projective dimension が一致することがわかるので, $A_e$ の $A_e^{\mathrm{en}}$-projective resolution の長さは有限である.
そこでこの結果を用いて (一般項から推測することによって), $A_e$ の $A_e^{\mathrm{en}}$-minimal projective resolution (特に differential) を構成することができる．(それを $(R_\bullet, d_\bullet)$ とする．）しかしここで問題になるのは, Ker$d_{n+1}$ = Im$d_n$ となるかどうかということである．そこでここからはどの様にして Ker$d_{n+1}$ = Im$d_n$ $(n \ge 0)$ を示したかを概説する.
Ker$d_{n+1} \supset$ Im$d_n$ であることは各 $n$ に対して, $d_n \circ d_{n+1} = 0$ となることを示せばよいので, $\subset$ を考える.

$\boxed{\text{Step.1}}$ $A_e/\mathrm{rad}A_e$ の $A_{\mathrm{en}}$-projective resolution(左 $A_e$ 加群としての projective resolution ) を構成する．(それを $(P_\bullet, \delta_\bullet)$ とする．)

$\boxed{\text{Step.2}}$ 各 $n$ に対し, $R_\bullet \otimes_{A_e} A_e/\mathrm{rad}A_e$ (ここで rad$A_e$ は $A_e$ の根基) が完全列になることを示す.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & R_{n+1} \otimes_{A_e} A_e/\mathrm{rad}A_e \arrow[r, "d_{n+1}\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\psi_{n+1}"'] & R_n \otimes_{A_e} A_e/\mathrm{rad}A_e \arrow[r, "d_n\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\psi_n"'] & R_{n-1} \otimes_{A_e} A_e/\mathrm{rad}A_e \arrow[r, "d_{n-1}\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\psi_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & P_n \arrow[r, "\delta_n"] & P_{n-1} \arrow[r, "\delta_{n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

が可換となる同型写像 $\psi_n$ たちを構成する.

$\boxed{\text{Step.3}}$ Ker$d_{n+1} \subset$ Im$d_n$ を示す.
Ker$d_{n+1} \not\subset$ Im$d_n$ となる $n$ が存在すると仮定する．すると次の自然な全射が存在する;
Ker$d_n \longrightarrow$ Ker$d_n$/Im$d_{n+1}$
ゆえに次のような写像が存在する:
$0 \neq f :$ Ker$d_n \longrightarrow S \otimes_{\mathbb{C}} T$
ここで, $S$ は左 $A_e$ 加群で単純加群, $T$ は右 $A_e$ 加群で単純加群である.

するとこの時,

$$\begin{aligned} R_{n+1}\otimes_{A_e} A_e/\mathrm{rad}A_e &\xrightarrow{d_{n+1}\otimes \mathrm{id}} \mathrm{Im}d_{n+1}\otimes_{A_e} A_e/\mathrm{rad}A_e \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}d_n \otimes_{A_e} A_e/\mathrm{rad}A_e \\ &\xrightarrow{f\otimes \mathrm{id}} S\otimes_{\mathbb{C}} T\otimes A_e/\mathrm{rad}A_e \\ &\xrightarrow{\sim} S\otimes_{\mathbb{C}} T \end{aligned}$$

となる. 一方,

$$R_{n+1}\xrightarrow{d_{n+1}} \mathrm{Ker}d_n \xrightarrow{f} S\otimes_{\mathbb{C}} T$$

に $-\otimes_{A_e} A_e/\mathrm{rad}A_e$ をあてると, 次の写像を得る;

$$(f\otimes \mathrm{id}) : R_{n+1}\otimes_{A_e} A_e/\mathrm{rad}A_e \to S\otimes_{\mathbb{C}} T$$

これより, $(f\otimes \mathrm{id})\circ(d_{n+1}\otimes \mathrm{id}) \neq (f\circ d_{n+1})\otimes \mathrm{id}$ となり, 矛盾.
ゆえに, $\mathrm{Ker}d_{n+1}\subset \mathrm{Im}d_n$

このようにして得た $A_e$ の $A_e^{\mathrm{en}}$-minimal projective resolution から Hochschild cohomology group の次元を計算する.
[1] や [2] を基に計算すると次の結果を得ることが出来る;

**命題 1.4.**

$$\dim\ HH^n(A_e) = \begin{cases} e & \text{if } n=0 \\ 1 & \text{if } 1\le n\le 2(e-1) \\ 0 & \text{if } 2(e-1)<n \end{cases}$$

## 2 その後の進展：$q$-Schur algebra の Hochschild cohomology

講演をさせていただいた時は, $q$-Schur algebra のある特別なブロックの Hochschild cohomology についてお話させて頂きました. その後, この結果から $q$-Schur algebra の任意のブロックの Hochschild cohomology について計算することが出来たので, この章ではその結果について報告します.

まず先の章で述べた $q$-Schur algebra のある特別なブロック ($A_e$ と書いた) の Hochschild cohomology ring の環構造がわかったので, それについて述べる.
$\mathrm{HH}^*(R) := \bigoplus_{i\ge 0}\mathrm{HH}^i(R)$ と置いたとき, Hochschild cohomology ring $\mathrm{HH}^*(R)$ とは, 積を米田積で定義した次数付き代数のことを言う.

**注意 2.1.** (cf. [3], [4]) Hochschild cohomology ring は導来不変量である.

$(Q_\bullet, \delta_\bullet)$ を $R$ の $R^{\mathrm{en}}$-projective resoution とし, $\mathrm{HH}^*(R)$ における米田積を $\star$ と書くと, $\alpha\in \mathrm{HH}^i(R)$, $\beta\in \mathrm{HH}^j(R)$ に対して $\alpha\star\beta$ は次のように定まる.

このとき $\alpha\in \mathrm{KerHom}(Q_i,R)$, $\beta\in \mathrm{KerHom}(Q_j,R)$ とみなすことができて, 次の $R^{\mathrm{en}}$-module としての可換図式を得る;

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & Q_{i+j} \arrow[r, "\delta_{i+j}"] \arrow[d, "\sigma_i"'] & \cdots \arrow[r, "\delta_{j+2}"] & Q_{j+1} \arrow[r, "\delta_{j+1}"] \arrow[d, "\sigma_1"'] & Q_j \arrow[d, "\sigma_0"'] \arrow[dr, "\beta"] & & \\ \cdots \arrow[r] & Q_i \arrow[r, "\delta_i"] & \cdots \arrow[r, "\delta_2"] & Q_1 \arrow[r, "\delta_1"] & Q_0 \arrow[r, "\delta_0"] & S \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ここで $\sigma_l$ $(0\le l\le i)$ は $\beta$ の持ち上げで, このとき $\alpha\star\beta=\alpha\circ\sigma_i$ と定まる.

**注意 2.2.** 米田積は $\alpha$, $\beta$, $\sigma_l$ $(0 \leq l \leq i)$ の取り方に依らない.

米田積を積として, $\mathrm{HH}^*(A_e)$ を次数付き代数とみたとき, 次の同型が成立する.

**命題 2.3.**

$$\mathrm{HH}^*(A_e) \cong \mathbb{C}[t_1, t_2, \cdots, t_{e-1}, u, v]/J$$

ここで $J$ は次の relation が生成する両側 ideal;
$t_i t_j = 0$, $t_i u = 0$, $t_i u = 0$, $u^2 = 0$, $uv^{e-1} = 0$, $v^e = 0$.
また $\mathrm{deg} t_i = 0$, $\mathrm{deg} u = 1$, $\mathrm{deg} v = 2$.

以下, $q$-Schur algebra の Hochschild cohomology に関する計算結果について述べる. そこでまず $q$-Schur algebra について説明する. 但し, $q := \exp[2\pi i/e]$ $(e \geq 2)$ .
$(\rho, E)$ を一般線形群 $GL_n$ の自然表現とする. (すなわち, $E = \mathbb{C}^n$, $\rho(X)v = Xv$ , $X \in GL_n$)
この時, $GL(E)$ はテンソル空間 $E^{\otimes m}$ に対角に作用する. さらに $m$ 次対称群は場所の入れ替えによりこのテンソル空間に作用する.
この２つの作用は可換になり, $S(n, m) := \mathrm{End}_{k\mathfrak{S}_m}(E^{\otimes m})$ を Schur algebra という. これの $q$-類似を $q$-Schur algebra という.
この時, $GL_n$ は量子群 $U_{q^{1/2}}(\mathfrak{gl}_n)$ に置き変わり, 対称群は岩堀- Hecke 環 $\mathcal{H}_{q,m}$ に置き変わり, $S_q(n, m) := \mathrm{End}_{\mathcal{H}_{q,m}}(E^{\otimes m})$ を $q$-Schur algebra という.
次に $q$-Schur algebra の Hochschild cohomology を計算する上で重要な事実を挙げる.

**事実 2.4.** [5], [6]
$C$: $\bigoplus_{l \geq 0} S_q(l, l)$ の任意のブロックとする.
この時, 次を満たすような非負整数 $w$ が存在する;

$$\mathcal{D}^b(C\text{−mod}) \simeq \mathcal{D}^b(B_e^{\otimes w} \rtimes \mathbb{C}\mathfrak{S}_w\text{−mod})$$

ここで, $B_e$ は $q$-Schur algebra $\mathfrak{S}_q(e, e)$ の主ブロックである.

**注意 2.5.** $B_e$ は $A_e$ と森田同値である.

**注意 2.6.** $n \geq l$ となる非負整数 $l$ に対して, $S_q(l, l)$ と $S_q(n, l)$ は森田同値である. ゆえに上の $C$ は $q$-Schur algebra の任意のブロックとして取ることが出来る.

上に挙げた事実と Hochschild cohomology ring が導来不変量であるということから次の結果を得る.

**系 2.7.**
$C$: $\bigoplus_{l \geq 0} S_q(l, l)$ の任意のブロック代数とする.
この時, 次が次数付き代数として同型となる非負整数 $w$ が存在する;

$$\mathrm{HH}^*(C) \cong \mathrm{HH}^*(A_e^{\otimes w} \rtimes \mathbb{C}\mathfrak{S}_w)$$

この結果から $A_e^{\otimes w} \rtimes \mathbb{C}\mathfrak{S}_w$ に着目し, 計算を行った. ここで $\mathrm{HH}^*(A_e)$ の環構造については分かっているので, この結果を拡張することを考える. そこで次の結果を用いる.

**命題 2.8.** [7]

$$\mathrm{HH}^*(A_e^{\otimes w} \rtimes \mathbb{C}\mathfrak{S}_w) = \bigoplus_{\lambda \vdash w} \bigotimes_{i \geq 1} (\mathrm{HH}^*(A_e)^{\otimes p_i(\lambda)})^{\mathfrak{S}_{p_i(\lambda)}}$$

ここで 右辺は対称群の作用による固定点を表し, $\lambda$ は $w$ の分割, $p_i(\lambda)$ は分割 $\lambda$ の中に $i$ が出てくる回数を表すとする.

この結果を用いてを拡張すると次の結果を得る.

**定理 2.9.**

$$\dim \mathrm{HH}^n(A_e^{\otimes w} \rtimes \mathbb{C}\mathfrak{S}_w) = \begin{cases} \sum_{\lambda \in P_w} \prod_{i \geq 1} \begin{pmatrix} p_i(\lambda)+e-1 \\ p_i(\lambda) \end{pmatrix} & (n=0) \\ \sharp P_w & (1 \leq n \leq 2(e-1)) \\ 0 & (2(e-1) < n) \end{cases}$$

## 参考文献

[1] D. Happel, Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras. Lecture Notes in Math,vol. 1404, pp. 108-126. Springer, Berlin (1989)

[2] Erdmann, K, Schroll, S: On the Hochschild cohomology of tame Hecke algebras. Arch. Math. 94, 117-127 (2010)

[3] D. Happel, On the derived category of a finite-dimensional algebra, Comment. Math. Helv. 62 (3), 339-389 (1989).

[4] Rickard, J., Derived equivalences as derived functors. J. Lond. Math. Soc. 43, 37?48 (1991)

[5] Chuang, J., Rouquier, R. Derived equivalences for symmetric groups and sl2-categorification. Ann. Math. (2) 167 , 245-298 (2008)

[6] J. Chuang, H. Miyachi, Runner removal Morita equivalences, in: A. Gyoja, et al. (Eds.), Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups, in: Progr. Math., vol. 284, Birkhauser, 2010, pp. 55-79.

[7] J. Alev, M. A. Farinati, T. Lambre, and A. L. Solotar: Homologie des invariants d ’ une algébre de Weyl sous l ’ action d ’ un groupe fini, J. of Algebra, 232 (2000), 564-577.