Ample group actions on AS-regular algebras

上山 健太 *

静岡大学大学院理学研究科

本稿は第 19 回代数学若手研究会において，上記のタイトルで講演した内容をまとめたものであり，毛利出氏との共同研究 [9] に基づいて構成されたものである．

可換環論において，孤立特異点は重要な環のクラスである．それに倣い，[7] において非可換次数付き孤立特異点を定義し，その代数がいくつかの良い性質を持つことを示した．例えば，AS-Cohen-Macaulay algebra（というある種の非可換次数付き Cohen-Macaulay 環）が有限 Cohen-Macaulay 表現型ならば非可換次数付き孤立特異点になることがすでに示されている（[8] 参照）．一方で，可換環論や表現論において，多項式環 $S = k[x_1, \dots, x_d]$ に有限群 $G \leq \mathrm{GL}(d, k)$ が作用し得られる不変式環 S^G も盛んに研究されている．非可換代数幾何学において重要な研究対象である AS-regular algebra は多項式環の非可換拡張なので，この講演では，AS-regular algerbra S に有限群 G が作用して得られる不変式環 S^G を考察する（関連結果として [3], [4], [5] 等がある）．特に S^G の孤立特異点性を研究するのが目的である．

目的のため，次数付き環への群作用に対し，ample という概念を導入する．本稿では，群 G の ample 性は不変式環が次数付き孤立特異点になることと深く関係していることを述べ，さらに AS-regular algebra S に ample な群 G が作用しているとき，S^G の非可換射影スキームの導来圏がある有限次元代数の加群圏の導来圏で実現されることを述べる．

k を体とし，A をネーター $\mathbb{N}$ 次数付き k 代数 $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i$ で $A_0 = k$ を満たすものとする．

定義 1. A が次を満たすとき次元 d，Gorenstein parameter ℓ の AS-Gorenstein algebra (resp. AS-regular algebra) であるという：

1. $\mathrm{injdim}_A A = \mathrm{injdim}_{A^{\mathrm{op}}} A = d < \infty$ (resp. $\mathrm{gldim}\, A = d < \infty$),
2. $\mathrm{Ext}^i_A(k, A) \cong \mathrm{Ext}^i_{A^{\mathrm{op}}}(k, A) \cong \begin{cases} k(\ell) & \text{if } i = d, \\ 0 & \text{if } i \neq d. \end{cases}$

* e-mail: skueyam@ipc.shizuoka.ac.jp　web: http://www.ipc.shizuoka.ac.jp/~skueyam/

例えば

$$k\langle x,y\rangle/(xy-\alpha yx)\ (\alpha\neq 0),\qquad k\langle x,y\rangle/(xy-yx+x^s)\ (s\in\mathbb{N})$$

は次元 2，Gorenstein parameter $\deg x+\deg y$ の AS-regular algebra である．

AS-regular algebra は多項式環の非可換類似である．実際，可換な AS-regular algebra は多項式環に同型になる．しかし非可換の高次元 AS-regular algebra はたくさんあり，AS-regular algebra の分類は非可換代数幾何学において盛んに行われてきた．現在，AS-regular algebra の研究は様々な方向へ分岐しているが，その一つに非可換不変式論がある．

非可換不変式論における素晴らしい結果として，Jørgensen-Zhang による AS-Gorenstein 性に関しての次の定理がある．

定理 2. [3] S を AS-regular algebra とし，G を $\operatorname{GrAut} S$ の有限部分群とする．また，k の標数は G の位数を割り切らないと仮定する．このとき，もし任意の $\sigma\in G$ に対し，ホモロジカル行列式 $\operatorname{hdet}\sigma$ が 1 ならば，不変式環 S^G は AS-Gorenstein algebra である．

ホモロジカル行列式は局所コホモロジーを使って定義される（定義に関しては [3] を参照せよ）．S が次数 1 の元で生成された多項式環 $k[x_1,\dots,x_d]$ のとし，$\sigma\in\operatorname{GrAut} S$ とする（$\operatorname{GrAut} k[x_1,\dots,x_d]\cong \mathrm{GL}_d(k)$ であることより，σ は行列の形で表せることに注意する）．このときホモロジカル行列式 $\operatorname{hdet}\sigma$ は σ の通常の行列式 $\det\sigma$ で与えられる．これがホモロジカル行列式と名付けられた由来である．S が非可換の場合，σ の見かけの行列式とホモロジカル行列式は異なることがあること注意しておく．ホモロジカル行列式 hdet の観点から，ホモロジカル特殊線型群という対象を定義できる．つまり

$$\mathrm{HSL}(S)=\{\sigma\in\operatorname{GrAut} S\mid \operatorname{hdet}\sigma=1\}$$

とする．これにより，Jørgensen-Zhang の定理の主張は「もし G が $\mathrm{HSL}(S)$ の有限部分群であれば，…」と言い換えることができる．

次に，本稿の中心である ample 性について紹介する．

$\mathsf{grmod}\,A$ で有限生成次数付き右 A 加群のなす圏を表し，$\mathsf{tors}\,A$ で有限次元加群からなる $\mathsf{grmod}\,A$ の充満部分圏を表すこととする．このとき Serre 商圏

$$\mathsf{tails}\,A:=\mathsf{grmod}\,A/\mathsf{tors}\,A$$

は非可換射影スキームと呼ばれる，非可換代数幾何学の中心的な研究対象である [1]．

以降，G は $\operatorname{GrAut} A$ の有限部分群とし，k の標数は G の位数を割り切らないと常に仮定する．このとき $A*G$ で次数付きの捩れ群環を表す．つまり，ベクトル空間としては $A*G=A\otimes_k kG$ であり，積を $(a*\sigma)(a'*\sigma')=a\sigma(a')*\sigma\sigma'$ によって定まるものとし，

次数を $(A*G)_i = A_i \otimes kG$ で定義した次数付き代数である．今，$A*G$ から次の元

$$e = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G} 1*\sigma$$

を取ってくるとする．このとき e は $A*G$ の冪等元であり，

$$(-)e := - \otimes_{A*G} (A*G)e : \mathsf{grmod}\, A*G \to \mathsf{grmod}\, e(A*G)e$$

を導く．また，次の同型

$$A^G \xrightarrow{\sim} e(A*G)e; \quad c \to e(c*1)e$$

が存在する．上記のことと $(-)e$ が有限次元性を保つことを考慮することにより，次の ample の定義が可能となる．

定義 3. $\mathrm{GrAut}\, A$ の有限部分群 G が A に対して ample であるとは，関手

$$(-)e : \mathsf{tails}\, A*G \to \mathsf{tails}\, A^G$$

が圏同値関手であることをさす．

ample という名前の由来は Artin-Zhang [1] によって定義された ample と，非常に似ている状況であることにある．（もともと Artin-Zhang による ample という概念の由来は代数幾何学の ample にあることを注意しておく．）

ample についての定理を述べるために，非可換次数付き孤立特異点の定義をしておく．

定義 4. [2] [7] A が非可換次数付き孤立特異点であるとは，$\mathrm{gldim}(\mathsf{tails}\, A) < \infty$ を満たすときをいう．

A が次数 1 の元で有限生成された可換次数付き代数のとき，上の定義は通常の次数付き孤立特異点の概念と一致する．非可換次数付き孤立特異点の詳細については [7] や [8] を参照せよ．

次の結果により，G の ample 性と不変式環の次数付き孤立特異点性には密接な関係があることが分かる．

定理 5. [9] S を次元が $d \geq 2$ の AS-regular algebra とし，G を $\mathrm{HSL}(S)$ の有限部分群とする．このとき次が同値：

1. G が S に対して ample である．
2. S^G が非可換次数付き孤立特異点，かつ

$$S*G \to \mathrm{End}_{S^G}(S); \quad s*\sigma \mapsto [t \mapsto s\sigma(t)]$$

が次数付き代数同型.

3. $S * G/(e)$ が k 上有限次元代数.

さらに G が ample であれば，非常に良い三角圏同値が存在する.

定義 6. [6] Grenstein parameter ℓ の AS-regular algebra S の Beilinson algebra ∇S を次で定義する:

$$\nabla S := \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & \cdots & S_{\ell-1} \\ 0 & S_0 & \cdots & S_{\ell-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_0 \end{pmatrix}.$$

定義より ∇S は有限次元代数である．群 G が AS-regular algebra S に作用しているとき，G は自然に Beilinson algebra ∇S に作用する.

定理 7. [9] S を AS-regular algebra とし，G を $\operatorname{GrAut} S$ の有限部分群とする．このとき G が S に対して ample ならば，次の三角圏同値

$$\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{tails}\, S^G) \cong \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathrm{mod}(\nabla S) * G)$$

が存在する.

この定理の例を挙げる．以下,

- k を標数 0 の代数的閉体,
- $S = k\langle x, y\rangle/(xy - \alpha yx) \quad \alpha \neq 0, \deg x = 1, \deg y = 3$ （次元 2，G.p.4 の AS-regular algebra),
- $G = \left\langle \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle \leq \operatorname{GrAut} S$，但し ω は 1 の原始 3 乗根

とする.

このとき G が S に対して ample であるということが調べられる（[9]）. S の次元が 2 であることより ∇S が大域次元 1 であるということが分かり，quiver Q_S が存在し，$\nabla S \cong kQ_S$ とわかる．また G が巡回群であることより，quiver $Q_{S,G}$ が存在し，$(\nabla S) * G \cong kQ_{S,G}$ とわかる．上記の例の場合，Q_S と $Q_{S,G}$ は次で与えられる：

$$Q_S = \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[rrr, bend right] & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3, \end{tikzcd}$$

$$Q_{S,G} = \begin{tikzcd} (0,0) \arrow[dr] \arrow[ddrrr] & (1,0) \arrow[dr] & (2,0) \arrow[dr] & (3,0) \\ (0,1) \arrow[dr] \arrow[urrr] & (1,1) \arrow[dr] & (2,1) \arrow[dr] & (3,1) \\ (0,2) \arrow[uur] \arrow[urrr] & (1,2) \arrow[uur] & (2,2) \arrow[uur] & (3,2). \end{tikzcd}$$

これより，

$$\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{tails}\, S^G) \cong \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathrm{mod}\, kQ_{S,G})$$

という三角圏同値を得る．

参考文献

[1] M. Artin and J. J. Zhang, Noncommutative projective schemes, *Adv. Math.* **109** (1994), 228–287.

[2] P. Jørgensen, Finite Cohen-Macaulay type and smooth non-commutative schemes, *Canad. J. Math.* **60** (2008), 379–390.

[3] P. Jørgensen and J. J. Zhang, Gourmet's guide to Gorensteinness, *Adv. Math.* **151** (2000), 313–345.

[4] E. Kirkman, J. Kuzmanovich, and J. J. Zhang, Shephard-Todd-Chevalley Theorem for skew polynomial rings, *Algebr. Represent. Theory* **13** (2010), 127–158.

[5] E. Kirkman, J. Kuzmanovich, and J. J. Zhang, Invariant theory of finite group actions on Down-Up algebras, Preprint.

[6] H. Minamoto and I. Mori, The structure of AS-Gorenstein algebras, *Adv. Math.* **226** (2011), 4061-4095.

[7] K. Ueyama, Graded maximal Cohen-Macaulay modules over noncommutative graded Gorenstein isolated singularities, *J. Algebra* **383** (2013), 85–103.

[8] K. Ueyama, Noncommutative graded algebras of finite Cohen-Macaulay representation type, *Proc. Amer. Math. Soc.*, to appear.

[9] I. Mori and K. Ueyama, Ample group action on AS-regular algebras and noncommutative graded isolated singularities, Preprint, arXiv: 1404.5045.