On association schemes of finite exponent

吉川　昌慶

長野県梓川高等学校

1　Introduction

アソシエーション・スキームは有限群のある種の一般化である。アソシエーション・スキームからは、任意の体上に定義可能な代数である隣接代数が自然に得られる。有限群をアソシエーション・スキームとしてみると、その隣接代数は元の群の群環と同じものである。従って、有限群の表現論における諸結果がどのくらい隣接代数の表現に拡張できるのかを考えることは自然である。また、有限群の表現で成り立っていることが、どのようなアソシエーション・スキームの隣接代数でも成り立つかを考えることも自然であろう。

この論文では、有限群やホップ代数などで最近研究が進んでいる高次フロベニウスーシューア指標とそこから得られる高次指標をアソシエーション・スキームで考えてみたい。

2 次のフロベニウスーシューア指標は Higman によって、アソシエーション・スキームに拡張されており、有名なフロベニウスーシューアの定理に対応するものも成り立つことが知られている ([3])。この指標とホップ代数での高次フロベニウスーシューア指標の定義を参考にし、アソシエーション・スキームの隣接代数に対して、高次フロベニウスーシューア指標を定義した。また、正則表現の高次フロベニウスーシューア指標の値として、アソシエーション・スキームの高次指標を定義する。このとき、任意のアソシエーション・スキームに対して、任意の高次指標の値は有理数であることが分かる。

さて、有限群の高次指標の値は、その位数が次数を割るような元の個数と等しいので、いつでも整数である。従って、任意の高次指標が整数値であるようなアソシエーション・スキームはどのような性質をもつのか興味がある。この問題はまだ未解決であるが、任意の高次指標が整数値であるようなアソシエーション・スキームのあるクラスを紹介し、その特徴を述べる。

2　記号など

アソシエーション・スキームの詳細については、Zieschang の本 ([7]) を見てほしい。

X を有限集合とし、S を $X \times X$ の空集合を含まない分割とする。$s \in S$ に対して、行と列を X の要素によって添え字づけられた行列 σ_s を次のように定義する。

$$(\sigma_s)_{x,y} = \begin{cases} 1 & (x,y) \in s, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

このとき、組 (X,S) が

1. $1 := \{(x,x) \mid x \in X\} \in S$,

2. $s \in S$ ならば、$s^* := \{(y,x) \mid (x,y) \in s\} \in S$,
3. $s,t,u \in S$ に対して、$\sigma_s\sigma_t = \sum_{u\in S} a_{stu}\sigma_u$ となるような整数 a_{stu} が存在する

を満たすとき、アソシエーション・スキームであるという。$s \in S$ に対して, $n_s := a_{ss^*1}$ を s の valency という。$C \subset S$ に対して, $\sigma_C := \sum_{c\in C}\sigma_c$, $n_C := \sum_{c\in C} n_c$ とおく。アソシエーション・スキーム (X,S) の閉部分集合 C による剰余スキームを $(X,S)^C = (X/C, S/\!\!/C)$ とかく。任意の $s,\ell,\ell' \in S$ と $n \geq 2$ に対して、$a_{s^n\ell} = a_{\underbrace{s\cdots s}_{n}\ell}$, $a_{\ell' s^n \ell} = a_{\ell'\underbrace{s\cdots s}_{n}\ell}$ とおく。

$\{\sigma_s \mid s \in S\}$ によって生成される複素数体上の行列環を (X,S) の隣接代数といい、$\mathbb{C}S$ とかく。$\mathrm{Irr}(S)$ を $\mathbb{C}S$ のすべての既約指標の集合とし、既約指標 χ に対して、m_χ をその重複度とする。

3 高次フロベニウスーシューア指標

有限群の高次フロベニウスーシューア指標を考える。([4])。

G を有限群とし、$\mathbb{C}G$ を複素数体上の群環とする。$\mathrm{Irr}(G)$ を $\mathbb{C}G$ のすべての既約指標の集合とする。任意の既約指標 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して、n 次フロベニウスーシューア指標 $\nu_n(\chi)$ を

$$\nu_n(\chi) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^n)$$

と定義し、G の n 次指標 $\nu_n(G)$ を

$$\nu_n(G) = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)}\chi(1)\nu_n(\chi)$$

と定義する。

一般に、$\nu_n(G) = \#\{g \in G \mid o(g)|n\}$ であることが知られている。ここで、$o(g)$ は g の位数である。任意の自然数 n に対して、$\nu_n(G)$ は整数値であることに注意する。

アソシエーション・スキームに対して、高次フロベニウスーシューア指標を考えたい。(X,S) をアソシエーション・スキームとし、$\mathbb{C}S$ を隣接代数とする。また、$\mathrm{Irr}(S)$ を $\mathbb{C}S$ のすべての既約指標の集合とする。論文 [3] において, Higman はアソシエーション・スキームに対する 2 次フロベニウスーシューア指標を次のように定義した。$\chi \in \mathrm{Irr}(S)$ に対して、

$$\nu_2(\chi) = \frac{m_\chi}{n_S\chi(\sigma_1)}\sum_{s\in S}\frac{1}{n_s}\chi({\sigma_s}^2).$$

さらに、

$$\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(S)}\chi(\sigma_1)\nu_2(\chi) = \#\{s \in S \mid s \text{ は対称 }\}.$$

であることを示した。

さて、この Higman の 2 次フロベニウスーシューア指標を参考にして、n 次フロベニウスーシューア指標 $\nu_n(\chi)$ を

$$\nu_n(\chi) = \frac{m_\chi}{n_S\chi(\sigma_1)}\sum_{s\in S}\frac{1}{{n_s}^{n-1}}\chi({\sigma_s}^n) \quad \text{for} \quad \chi \in \mathrm{Irr}(S)$$

と定義し、また、n 次指標 $\nu_n(S)$ を

$$\nu_n(S) = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(S)}\chi(\sigma_1)\nu_n(\chi)$$

と定義する。任意のアソシエーション・スキームに対して、

$$\nu_n(S) = \sum_{s \in S} \frac{1}{{n_s}^{n-1}} a_{s^n 1} \in \mathbb{Q}$$

が成り立つことが分かる。有限群では、すべての自然数 n に対して、$\nu_n(G)$ は整数値である。しかし、次の定理によって、ある n 次指標が整数値ではないアソシエーション・スキームが存在することが分かる。

Theorem 1. (X, S) をランク *2* のアソシエーション・スキームとする。このとき、

$$\nu_n(S) = \frac{2|X|-1}{|X|} + (-1)^n \frac{1}{|X|(|X|-1)^{n-2}}$$

が成り立つ。

こうして、任意の自然数 n に対して、n 次指標 $\nu_n(S)$ が整数値をとるようなアソシエーション・スキームはどのようなスキームであるかという問題が自然に生じる。この問題に対して、次のような予想を提案する。

Conjecture 2. (X, S) をアソシエーション・スキームとする。任意の自然数 n に対して n 次指標 $\nu_n(S)$ が整数値をとるならば、(X, S) は有限群の拡大を繰り返すことによって得られる。

§5 において、任意の自然数 n に対して $\nu_n(S)$ が整数値をとるようなアソシエーション・スキームのあるクラスを紹介する。

4 Girth と strong girth と exponent

アソシエーション・スキームに対して、*girth* と *strong girth* と *exponent* を定義する。

Definition 3. S の非単位元 s に対して、*girth* $\mathrm{g}(s)$ を

$$\mathrm{g}(s) = \min\{e \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \mid a_{s^e 1} \neq 0\}$$

で定義する。このとき、$\mathrm{g}(s)$ は正整数であることが知られている。また、S の非単位元 s に対して、*strong girth* $\mathrm{sg}(s)$ を

$$\mathrm{sg}(s) = \min\{e \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \mid a_{s^e 1} = n_s^{e-1}\}$$

と定義し、もしそのような自然数が存在しないならば、$\mathrm{sg}(s) = \infty$ とする。単位元 1 に対しては、$\mathrm{g}(1) = \mathrm{sg}(1) = 1$ とする。

任意の $s \in S$ に対して、$\mathrm{sg}(s) < \infty$ のとき、(X, S) の *exponent* $\exp(S)$ を

$$\exp(S) = \mathrm{l.c.m}\{\mathrm{sg}(s) \mid s \in S\}$$

と定義する。ここで、l.c.m は最小公倍数である。$\mathrm{sg}(s) = \infty$ であるような元が存在するときは、$\exp(S) = \infty$ とする。

Girth, strong girth, exponent に関するいくつかの性質を挙げておく。

Lemma 4. (X, S) が *thin* アソシエーション・スキームとする。このとき、任意の $s \in S$ に対して、$\mathrm{g}(s) = \mathrm{sg}(s)$ が成り立つ。特に、$\mathrm{sg}(s) < \infty$ である。

Lemma 5. (X,S) をアソシエーション・スキームとし、s を S の元とする。

1. $\mathrm{g}(s) \le \mathrm{sg}(s)$.
2. 次は同値である。
   (a) $\mathrm{g}(s) = 2$,
   (b) $\mathrm{sg}(s) = 2$,
   (c) s が対称.
3. (X,S) が対称スキームであることと、$\exp(S) = 2$ は同値である。

つぎの定理は strong girth の重要な性質である。

Theorem 6. *[5]* $s \in S$ が $\mathrm{sg}(s) < \infty$ を満たすとき、$\mathrm{sg}(s) = \mathrm{g}(s)$ が成り立つ。

Corollary 7. s を S の元とする。$a_{s^t 1} = {n_s}^{t-1}$ となる自然数 t が存在するとき、$\mathrm{sg}(s) \mid t$ が成り立つ。

この corollary の逆は、一般に成り立たない。

5 有限な exponent をもつアソシエーション・スキーム

この章では、有限な exponent をもつアソシエーション・スキームの n 次指標を考える。

5.1 Exponent 3 のアソシエーション・スキーム

Theorem 8. (X,S) を *exponent 3* のアソシエーション・スキームとする。任意の非単位元 $s \in S$ に対して、

$$a_{s^n 1} = \begin{cases} {n_s}^{n-1} & \textit{if } 3 \mid n, \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ。

Theorem 8 から、明らかに

$$\nu_n(S) = \begin{cases} |S| & \text{if } 3 \mid n, \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ。従って、任意の自然数 n に対して n 次指標 $\nu_n(S)$ は整数値である。予想が成り立つとすると、exponent 3 のアソシエーション・スキームは有限群の拡大を繰り返すことによって得られることが期待される。

Exponent 3 の可換アソシエーション・スキームに対しては成り立つことが分かる。

Theorem 9. *[5]* (X,S) を *exponent 3* のアソシエーション・スキームとする。このとき、S は位数 *3* の巡回群に同型な正規閉部分集合 N をもつ。さらに、N による剰余スキームの *exponent* は *3* を割る。

5.2 有限な exponent をもつアソシエーション・スキーム

Corollary 7 において、$a_{s^n 1} = {n_s}^{n-1}$ ならば $\mathrm{sg}(s) \mid n$ である。一般に、この逆は成り立たない。従って、exponent 3 のスキームで成り立っている Theorem 8 のようなきれいな状況ではない。Corollary 7 の逆が成

り立つ条件を考えたい。

s を有限 strong girth e をもつ元とする。すなわち、$a_{s^e 1} = {n_s}^{e-1}$ と $a_{s^{e-1}\ell} = \delta_{\ell s^*} {n_s}^{e-2}$ が成り立っている。このとき、

$$\begin{aligned} a_{s^{2e}1} &= \sum_{\ell \in S} a_{s^{e-1}\ell} a_{\ell s^{e+1} 1} = {n_s}^{e-2} a_{s^* s^{e+1} 1} \\ &= {n_s}^{e-2} \sum_{\ell \in S} a_{s^* \ell 1} a_{s^{e+1} \ell} = {n_s}^{e-1} a_{s^{e+1} s} \\ &= {n_s}^{e-1} \sum_{\ell \in S} a_{s^{e-1}\ell} a_{\ell s^2 s} = {n_s}^{2e-3} a_{s^* sss}. \end{aligned}$$

が成り立つ。このことから、少なくとも $n = 2\mathrm{sg}(s)$ に対して、Corollary 7 が成り立つためには $a_{s^* sss} = {n_s}^2$ である必要がある。

Proposition 10. 次は同値である。

1. $a_{s^* sss} = {n_s}^2$,
2. $\sigma_{s^*} \sigma_s \sigma_s = {n_s}^2 \sigma_s$,
3. $s^* ss = s$.

s が上の *3* つの条件のうちの一つを満たすとき、s は正則元であるという。

Theorem 11. 正則元の *strong girth* は有限である。

すべての元が正則であるようなアソシエーション・スキームを正則なアソシエーション・スキームという。

Theorem 12. 任意の正則なアソシエーション・スキームの *exponent* は有限である。

正則元に対して、Theorem 8 に対応することが成り立つ。

Theorem 13. s を正則元とする。このとき、

$$a_{s^n 1} = \begin{cases} {n_s}^{n-1} & \textit{if } \mathrm{sg}(s) | n, \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ。

従って、正則なアソシエーション・スキームの n 次指標を計算することができる。

Theorem 14. (X, S) を正則なアソシエーション・スキームとする。このとき、

$$\nu_n(S) = \#\{s \in S \mid \mathrm{sg}(s) | n\}$$

が成り立つ。特に、任意の自然数 n に対して、n 次指標は整数値である。

正則な可換アソシエーション・スキームに対して、次が成り立つことが分かる。

Theorem 15. *[6]* (X, S) を正則な可換アソシエーション・スキームとする。このとき、S はある素数位数巡回群に同型な正規閉部分集合 N をもつ。さらに、N による剰余スキームの *exponent* は元のスキームの *exponent* を割る。

参考文献

[1] A. Hanaki, Representations of association schemes and their factor schemes, Graphs Combin. **19**, 195-201 (2003).

[2] A. Hanaki and I. Miyamoto, The classification of association schemes with small vertices, http://kissme.shinshu-u.ac.jp/as/.

[3] D. G. Higman, Coherent configurations. I. Part I: Ordinary representation theory, Geom. Dedicata **4**, 1-32 (1975).

[4] I. M. Isaacs, "Character Theory of Finite Groups", Academic Press, New York, 1976.

[5] M. Yoshikawa, On association schemes of exponent three, preprint.

[6] M. Yoshikawa, On association schemes of finite exponent, preprint.

[7] P. -H. Zieschang, "An Algebraic Approach to Association Schemes", Lecture Notes in Math. vol. 1628, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1996.

[8] P. -H. Zieschang, "Theory of Association schemes", Springer Monographs in Mathematics, Berlin-Heidelberg-New York, 2005.

Masayoshi Yoshikawa
Nagano Prefecture Azusagawa Senior High School,
10000-1 Hata, Matsumoto, Nagano, 390-1401, Japan
E-mail : yosikawa@nagano-c.ed.jp