Stanley–Reisner 環とその環論的性質

木村杏子 (静岡大学大学院理学研究科)

はじめに

Stanley–Reisner 環は, 単体的球面に対する上限予想の解決の際 Stanley によって考えられたものである. Stanley は組合せ論的問題に環という道具を用いたのである. Stanley–Reisner 環は, その発生から想像できるように, 組合せ論的情報と環論的情報をうまくつないでいる. 本報告書では, Stanley–Reisner 環について知られていることをまとめる. より詳しくは, [2, 12, 15, 18] 等を参照されたい.

最初に第 1 節で Stanley–Reisner 環の基本事項を解説する. 次に第 2 節で Stanley–Reisner 環の環論的性質, 特に Cohen–Macaulay 性, sequentially Cohen–Macaulay 性について解説する. 講演では時間切れで割愛したが, Alexander 双対性についても述べたい. 最後に第 3 節で, エッジイデアルの Cohen–Macaulay 性や sequentially Cohen–Macaulay 性について知られている結果を紹介する.

1 Stanley–Reisner 環の基礎

この節では, Stanley–Reisner 環を定義し, その基本的性質を述べる.

1.1 単体的複体

$V = [n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ とする.

定義 1.1.1. V の部分集合の集まり $\Delta \subset 2^V$ が V 上の単体的複体であるとは, 任意の $F \in \Delta$ と任意の $G \subset F$ に対して $G \in \Delta$ なるときにいう.

注意 1.1.2. 単体的複体の定義に, 「任意の $i \in V$ に対し $\{i\} \in \Delta$」という条件を付すこともあるが, 本報告書では仮定しない.

$\Delta \neq \emptyset$ のとき, $\emptyset \in \Delta$ である. 以下, $\Delta \neq \emptyset$ を仮定する.

単体的複体 Δ の元 F を Δ の面という. また, その次元を $\dim F := \#F - 1$ と定める. $F \in \Delta$ の次元が i のとき, F を Δ の i-面という. また, Δ の次元を $\dim \Delta := \max\{\dim F : F \in \Delta\}$ で定める. 包含関係に関して極大な面を facet という. 一般に, F が Δ の facet であっても $\dim F = \dim \Delta$ となるとは限らない. これが Δ の任意の facet F について正しいとき, Δ は pure であるという. 定義から, (頂点集合を固定したとき) 単体的複体はその facet の集合により一意的に定まる. $F_1, \ldots, F_q$ を Δ のすべての facet とするとき, $\Delta = \langle F_1, \ldots, F_q \rangle$ と表す.

$\dim \Delta = d-1$ とする. Δ の i-面の個数を $f_i(\Delta)$ で表す.

$$f(\Delta) := (f_0(\Delta), f_1(\Delta), \ldots, f_{d-1}(\Delta))$$

を Δ の f 列という. $\Delta \neq \emptyset$ であるので, $f_{-1}(\Delta) = 1$ であることを注意しておく.

例 1.1.3.

$$\Delta = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{2,3,4\}\}$$

は頂点集合 [5] 上の単体的複体である (図 1). Δ を facet で表せば,

$$\Delta = \langle \{1,2\}, \{1,3\}, \{4,5\}, \{2,3,4\} \rangle$$

である. Δ は次元 2 の pure でない単体的複体で, その f 列は $f(\Delta) = (5,6,1)$ である.

また, Δ から面 $\{2,3,4\}$ を除いて得られる単体的複体 $\Delta' := \Delta \setminus \{\{2,3,4\}\}$ (図 2) は pure な 1 次元単体的複体である.

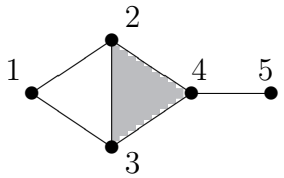


図 1: 単体的複体 Δ (例 1.1.3)

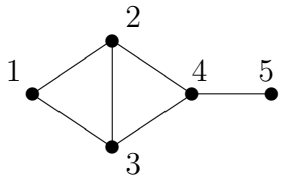


図 2: 単体的複体 Δ' (例 1.1.3)

1.2 Stanley–Reisner 環

K を体とする.

定義 1.2.1. Δ を $V = [n]$ 上の単体的複体とする. 次の単項式で生成される $K[x_1, \ldots, x_n]$ のイデアルを Δ の Stanley–Reisner イデアルと呼び, I_Δ で表す:

$$x_{i_1} \cdots x_{i_r}, \qquad 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n, \quad \{i_1, \ldots, i_r\} \notin \Delta.$$

また,

$$K[\Delta] := K[x_1, \ldots, x_n]/I_\Delta$$

を Δ の Stanley–Reisner 環と呼ぶ.

$G \subset [n]$ に対し, $P_G = (x_i : i \in G)$ と定める. Stanley–Reisner 環は次の性質をもつ.

命題 1.2.2. Δ を $[n]$ 上の単体的複体とする．このとき次が成り立つ．

(1) $I_\Delta = \bigcap_{F \in \Delta\text{: facet}} P_{[n]\setminus F}$.

(2) $\dim K[\Delta] = \dim \Delta + 1$.

$K[\Delta]$ が Cohen–Macaulay ならば I_Δ は height unmixed であるので, 命題 1.2.2 (1) から次が得られる．

系 1.2.3. $K[\Delta]$ が Cohen–Macaulay ならば Δ は pure である．

例 1.2.4. 例 1.1.3 の単体的複体 Δ について調べてみよう．Δ の頂点集合は $[5]$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned} I_\Delta &= (x_1x_4, x_1x_5, x_2x_5, x_3x_5, x_1x_2x_3) \\ &= (x_3, x_4, x_5) \cap (x_2, x_4, x_5) \cap (x_1, x_2, x_3) \cap (x_1, x_5) \end{aligned}$$

であることが分かる．また $\dim \Delta = 2$ より $\dim K[\Delta] = 3$, さらに Δ が pure でないことから, $K[\Delta]$ は Cohen–Macaulay でないことが分かる．

Δ を $d-1$ 次元単体的複体とする．各変数の次数を 1 と定めることで, $K[\Delta]$ には自然に $\mathbb{Z}$-grading の構造が入る．$K[\Delta]$ の Hilbert 級数は

$$F(K[\Delta], t) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_K K[\Delta]_i t^i$$

により定義されるが, それは次のように表されることが知られている:

$$F(K[\Delta], t) = \sum_{i=-1}^{d-1} \frac{f_i t^{i+1}}{(1-t)^{i+1}} \tag{1.1}$$

$$= \frac{h_0 + h_1 t + \cdots + h_d t^d}{(1-t)^d}. \tag{1.2}$$

ここで (1.2) の分子に現れる列 $h(\Delta) := (h_0, h_1, \ldots, h_d)$ を Δ の h 列という．Hilbert 級数の (1.1) の表示から, Δ の h 列を知ることと Δ の f 列を知ることは同値であることが従う．f 列と h 列に関して, 例えば次が成り立つ．

命題 1.2.5. Δ を $d-1$ 次元単体的複体とし, $f(\Delta) = (f_0, f_1, \ldots, f_{d-1})$, $h(\Delta) = (h_0, h_1, \ldots, h_d)$ をそれぞれ Δ の f 列, h 列とする．このとき, 次が成り立つ．

(1) $h_0 = 1$.

(2) $h_1 = f_0 - d$.

(3) $\sum_{i=0}^{d} h_i = f_{d-1}$.

命題 1.2.5 (3) は $K[\Delta]$ の重複度と呼ばれる量である.

h 列は $K[\Delta]$ の環論的性質を表すものであり, 一方 f 列は Δ の組合せ論的不変量である. これは, Stanley–Reisner 環を介して, 組合せ論的性質と環論的性質が行き来する一例である.

さらに, 次のことが知られている.

事実 1.2.6. Δ を $d-1$ 次元単体的複体とし, $h(\Delta) = (h_0, h_1, \ldots, h_d)$ を Δ の h 列とする.

(1) $K[\Delta]$ が Cohen–Macaulay であるとき, $h(\Delta)$ は非負整数列である.

(2) (Dehn–Sommervill 方程式) Δ が単体的 $d-1$ 球面であるとき, すなわち, Δ の幾何学的実現が $d-1$ 次球面 S^{d-1} に同相であるとき,

$$h_i = h_{d-i}, \qquad 0 \leq i \leq d$$

が成り立つ. (これは $K[\Delta]$ の Gorenstein 性によるものである.)

例 1.2.7. 例 1.1.3 と同じ単体的複体 Δ を考える. Δ の f 列は $(5, 6, 1)$ であったが, h 列は $(1, 2, -1, -1)$ であることが計算により分かる. $K[\Delta]$ が Cohen–Macaulay でないことは, すでに例 1.2.4 で見たが, h 列が非負整数列でないことからも分かる. また, $K[\Delta]$ の重複度は 1 である.

2 Stanley–Reisner 環の環論的性質

この節では, Stanley–Reisner 環の Cohen–Macaulay 性や sequentially Cohen–Macaulay 性について述べる.

2.1 Cohen–Macaulay 性

可換環論において, Cohen–Macaulay 性は基本的な概念である. 以下, $K[\Delta]$ には $\mathbb{Z}$-grading が入っているものとする. 次元 ($\dim K[\Delta]$) と深度 ($\operatorname{depth} K[\Delta]$) が一致するとき, $K[\Delta]$ は Cohen–Macaulay であるといわれる. この二つの不変量を調べよう. (次元については, Δ のそれから分かる (命題 1.2.2 (2)) ので, 深度の方が本質的である.) 以下, $K[\Delta]$ が Cohen–Macaulay であるとき, Δ は (K 上) Cohen–Macaulay であるという.

次元や深度を調べる時に便利な道具が local cohomology $H^i_{\mathfrak{m}}(K[\Delta])$ である. 詳細は省くが, local cohomology から次元と深度が読み取れる:

$$\operatorname{depth} K[\Delta] = \min\{i \ : \ H^i_{\mathfrak{m}}(K[\Delta]) \neq 0\},$$
$$\dim K[\Delta] = \max\{i \ : \ H^i_{\mathfrak{m}}(K[\Delta]) \neq 0\}.$$

このことから, 特に次が従う.

命題 2.1.1. Δ を $d-1$ 次元の単体的複体とする．このとき，$K[\Delta]$ が Cohen–Macaulay であることと

$$H^i_{\mathfrak{m}}(K[\Delta]) = 0 \qquad \text{for all } i \neq d$$

なることは同値である．

Stanley–Reisner 環の local cohomology に関して, Hochster による公式がある．それを述べるために, いくつか言葉を準備しよう．

Δ を頂点集合 $[n]$ 上の $d-1$ 次元単体的複体とする．C_i $(i = -1, 0, 1, \ldots, d-1)$ を Δ の i-面を基底とする K 上のベクトル空間とする:

$$C_i = \bigoplus_{\substack{F \in \Delta \\ \dim F = i}} KF.$$

写像 $\partial_i \colon C_i \to C_{i-1}$ を次で定める: $F = [\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_i]$ を Δ の i-面とする．ただし, 記号は $1 \leq \ell_0 < \ell_1 < \cdots < \ell_i \leq n$ を意味する．

$$F_j := [\ell_0, \ldots, \widehat{\ell_j}, \ldots, \ell_i]$$

と定める．このとき,

$$\partial_i(F) := \sum_{j=0}^{i} (-1)^j F_j.$$

これにより, $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ は複体を成す．そのホモロジー群 $H_i(C_\bullet)$ を Δ の被約ホモロジー群といい, $\widetilde{H}_i(\Delta; K)$ で表す．

Δ を単体的複体, F を Δ の面とする．このとき,

$$\operatorname{link}_\Delta F := \{G \in \Delta \ : \ G \cap F = \emptyset,\ G \cup F \in \Delta\}$$

と定める．$\operatorname{link}_\Delta F$ も単体的複体である．

例 2.1.2. 例 1.1.3 と同じ Δ について $\operatorname{link}_\Delta\{4\} = \langle \{2,3\}, \{5\} \rangle$ である (図 3).

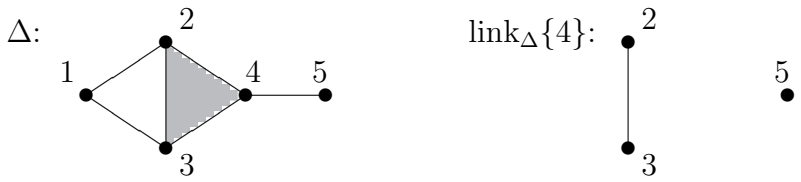


図 3: $\operatorname{link}_\Delta\{4\}$ (例 2.1.2)

さて, local cohomology に関する Hochster の公式を述べよう．

定理 2.1.3 (Hochster)**.** 単体的複体 Δ について,

$$F(H^i_{\mathfrak{m}}(K[\Delta],t) = \sum_{F\in\Delta} \dim_K \widetilde{H}_{i-\#F-1}(\mathrm{link}_\Delta F; K)\left(\frac{t^{-1}}{1-t^{-1}}\right)^{\#F}.$$

Hochster の公式から, Reisner による $K[\Delta]$ の Cohen–Macaulay 性の判定法が導かれる.

定理 2.1.4 (Reisner [17])**.** 単体的複体 Δ について, 次は同値である.

(1) $K[\Delta]$ は Cohen–Macaulay である.

(2) 任意の $F \in \Delta$, および任意の $i < \dim \mathrm{link}_\Delta F$ に対して

$$\widetilde{H}_i(\mathrm{link}_\Delta F; K) = 0.$$

Reisner の判定法から, 次元の低い単体的複体の Cohen–Macaulay 性を特徴付けられる.

例 2.1.5. Δ を単体的複体とする.

$\dim \Delta = 0$ のとき, $K[\Delta]$ は Cohen–Macaulay である.

$\dim \Delta = 1$ のとき, $K[\Delta]$ が Cohen–Macaulay であることと Δ が連結であることは同値である.

$\dim \Delta = 2$ のとき, $K[\Delta]$ が Cohen–Macaulay であるための必要十分条件は, 次の 3 つの条件が満たされることである:

- Δ は pure かつ連結である.
- $\widetilde{H}_1(\Delta; K) = 0$.
- $\{i\} \in \Delta$ ならば $\mathrm{link}_\Delta\{i\}$ は連結である.

Reisner の判定法の応用として, Stanley による単体的球面に関する上限予想の解決がある. その概略を簡単に述べよう.

単体的球面に関する上限予想とは, 単体的球面の面の個数に関するものである. すなわち, f 列に関する予想である. f 列を知ることと h 列を知ることは同値であるから, それは h 列を用いて書きかえることができる. 単体的球面の h 列に関しては Dehn–Sommerville 方程式が成り立つ (事実 1.2.6 (2)). これを用いて示すべきことを書きかえると, 結局, 単体的球面が Cohen–Macaulay であることを示すことに帰着する. そして実際それは, Reisner の判定法 (定理 2.1.4) を用いることにより示すことができるのである.

最後に, $K[\Delta]$ が Cohen–Macaulay であるような単体的複体を紹介する.

定義 2.1.6. Δ を pure な単体的複体とする. Δ の facet の間の全順序 $F_1, \ldots, F_q$ で次の条件 ($\flat$) を満たすものが存在するとき, Δ は shellable であるといわれる. また, そのときの順序を shelling という:

$$(\flat) \qquad \begin{array}{l} \langle F_i \rangle \cap \langle F_1, \ldots, F_{i-1} \rangle \text{ は} \\ \langle F_i \rangle \text{ の極大な proper face たちで生成される.} \end{array}$$

事実 2.1.7. Δ が shellable であれば, $K[\Delta]$ は Cohen–Macaulay である.

例 2.1.8. 図 4 の単体的複体は shellable である (図のような facet の番号付けが shelling となっている). 一方, 図 5 の単体的複体は shellable でない (Cohen–Macaulay でもない).

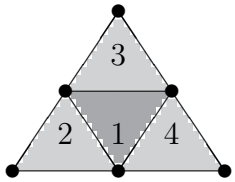


図 4: shellable な単体的複体の例

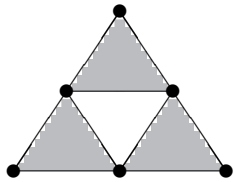


図 5: shellable でない単体的複体の例

2.2 Sequentially Cohen–Macaulay 性

$K[\Delta]$ の深度について, もう少し詳しく調べてみよう.

定義 2.2.1. Δ を $d-1$ 次元の単体的複体とする. $0 \leq r \leq d-1$ に対し,

$$\Delta^{(r)} := \{F \in \Delta \ : \ \dim F \leq r\}$$

を Δ の r-skeleton という.

$K[\Delta]$ の深度は次のように表される.

定理 2.2.2 (D. E. Smith)**.** Δ を $d-1$ 次元の単体的複体とするとき,

$$\operatorname{depth} K[\Delta] = \max\{r \ : \ K[\Delta^{(r)}] \text{ は Cohen–Macaulay}\} + 1$$

が成り立つ. 特に, $K[\Delta]$ が Cohen–Macaulay であることと任意の r $(0 \leq r \leq d-1)$ に対して $K[\Delta^{(r)}]$ が Cohen–Macaulay であることは同値である.

r-skeleton がどういうものであるか, 例を見てみよう.

例 2.2.3. 例 1.1.3 と同じ Δ を考えよう．このとき Δ は 2 次元であるから $\Delta^{(2)} = \Delta$ である．また例 1.1.3 と同じ記号を用いれば, $\Delta^{(1)} = \Delta'$ である．さらに $\Delta^{(0)}$ は 5 個の孤立点からなる単体的複体である．

単体的複体が pure でないとき, 一般にその skeleton も pure でない．そこで pure skeleton というものを考える．

定義 2.2.4. Δ を $d-1$ 次元の単体的複体とする．$0 \leq r \leq d-1$ に対し,

$$\Delta^{[r]} := \langle \{F \in \Delta \ : \ \dim F = r\} \rangle$$

を Δ の pure r-skeleton という．

例 2.2.3 をもとに, r-skeleton と pure r-skeleton を比較してみよう．

例 2.2.5. 例 1.1.3 と同じ単体的複体 Δ を考える．このとき, $r = 0, 1$ ならば $\Delta^{[r]} = \Delta^{(r)}$ であるが, $\Delta^{[2]} = \langle \{2, 3, 4\} \rangle$ となり, $\Delta^{(2)} = \Delta$ とは異なる．

任意の skeleton が Cohen–Macaulay であることと, もとの単体的複体が Cohen–Macaulay であることは同値であった．では, 任意の pure skeleton が Cohen–Macaulay であるときには, もとの単体的複体について何がいえるであろうか．実は, sequentially Cohen–Macaualy であるといえるのだが, まずその定義を述べよう．

定義 2.2.6. $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ とする．次数付き S-加群 M が sequentially Cohen–Macaulay であるとは, ある次数付き S-加群の有限 filtration

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M$$

で, 各 i $(1 \leq i \leq r)$ について M_i/M_{i-1} は Cohen–Macaulay であり,

$$\dim(M_1/M_0) < \dim(M_2/M_1) < \cdots < \dim(M_r/M_{r-1})$$

をみたすものが存在するときにいう．

定理 2.2.7 (Duval [4])**.** Δ を次元 $d-1$ の単体的複体とする．このとき, $K[\Delta]$ が sequentially Cohen–Macaulay であることと, 任意の $0 \leq r \leq d-1$ に対して $K[\Delta^{[r]}]$ が Cohen–Macaulay であることは, 同値である．

Δ が shellable のとき, $K[\Delta]$ は Cohen–Macaulay であった．sequentially Cohen–Macaulay についても同様のことがいえる．

単体的複体 Δ が non-pure の意味で shellable であるとは, shellable の定義から pure 性の仮定を落としたものを満たすときにいう．

事実 2.2.8. Δ が (non-pure) shellable であれば, $K[\Delta]$ は sequentially Cohen–Macaulay である．

2.3 Alexander 双対性

頂点集合 $[n]$ 上の単体的複体 Δ に対し, Alexander 双対複体 Δ^* が次で定義される:

$$\Delta^* := \{F \subset [n] \ : \ [n] \setminus F \notin \Delta\}.$$

Δ^* も $[n]$ 上の単体的複体である.

例 2.3.1. Δ を例 1.1.3 (例 1.2.4) のものとするとき,

$$\Delta^* = \langle \{2,3,5\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,4\}, \{4,5\} \rangle$$

である (図 6). また,

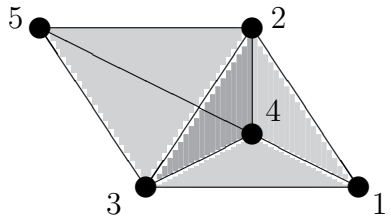


図 6: Δ^* (例 2.3.1)

$$\begin{aligned} I_{\Delta^*} &= (x_1, x_4) \cap (x_1, x_5) \cap (x_2, x_5) \cap (x_3, x_5) \cap (x_1, x_2, x_3) \\ &= (x_3x_4x_5, x_2x_4x_5, x_1x_2x_3, x_1x_5) \end{aligned}$$

である.

例 1.1.3, 例 1.2.4 と例 2.3.1 を見比べると, Δ と Δ^* の見た目からは, その関係性は捉えにくい. 一方, それらの Stanley–Reisner イデアルには関係性が読み取れるであろう. この節では, Alexander 双対性でうつりあう Stanley–Reisner 環の環論的性質を紹介する.

$G \subset [n]$ に対し, $x^G := \prod_{i \in G} x_i$ と定める. まず, Alexander 双対複体の簡単な性質を見よう.

命題 2.3.2. Δ を $V = [n]$ 上の単体的複体とする.

(1) $\Delta^{**} = \Delta$.

(2) $I_{\Delta^*} = (x^{V \setminus F} : F \in \Delta$ は Δ の facet$)$.

命題 1.2.2(1) と命題 2.3.2 (2) から, I_Δ の極小素因子と I_{Δ^*} の極小生成元との関係が見える.

Alexander 双対性でうつりあう他の環論的性質を見るために, いくつか言葉を準備しておく.

Δ を $[n]$ 上の単体的複体とし, S を体 K 上の n 変数多項式環とする. S には標準的な $\mathbb{Z}$-grading が入っているものとする.

$$0 \to \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{pj}} \to \cdots \to \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{1j}} \to S \to K[\Delta] \to 0$$

を $K[\Delta]$ の次数付極小自由分解とする. $\beta_{ij}(K[\Delta]) := \beta_{ij}$ を $K[\Delta]$ の第 (i,j) Betti 数という. Betti 数は $K[\Delta]$ について定義したが, I_Δ に対しても同様に定義される.

$$\operatorname{pd}_S K[\Delta] := \max\{i \ : \ \beta_{ij}(K[\Delta]) \neq 0 \text{ for some } j\}(= p)$$

を $K[\Delta]$ の射影次元という. また,

$$\operatorname{reg} K[\Delta] := \max\{j - i \ : \ \beta_{ij}(K[\Delta]) \neq 0\}$$

を $K[\Delta]$ の Castelnuovo–Mumford regularity という. $\operatorname{pd}_S I_\Delta = \operatorname{pd}_S K[\Delta] - 1$, $\operatorname{reg} I_\Delta = \operatorname{reg} K[\Delta] + 1$ であることを注意しておく. ($\operatorname{reg} I_\Delta = \max\{j - i \ : \ \beta_{ij}(I_\Delta) \neq 0\}$.)

$$\operatorname{indeg} I_\Delta := \min\{j \ : \ \beta_{0j}(I_\Delta) \neq 0\}$$

を I_Δ のイニシャル次数という. $\operatorname{indeg} I_\Delta = q$ とする. I_Δ が q-線型自由分解をもつとは, $j \neq i + q$ のとき, $\beta_{ij}(I_\Delta) \neq 0$ なるときにいう.

Alexander 双対性を用いると, Betti 数に関する Hochster の公式が示される (詳細は [2] を参照のこと). Δ を V 上の単体的複体とし, $W \subset V$ とする. Δ の W への制限を $\Delta_W := \{F \in \Delta : F \subset W\}$ で定める.

定理 2.3.3. Δ を V 上の単体的複体とすると,

$$\beta_{ij}(K[\Delta]) = \sum_{\substack{W \subset V \\ \# W = j}} \dim_K \widetilde{H}_{j-i-1}(\Delta_W; K).$$

$K[\Delta]$ (または I_Δ) と $K[\Delta^*]$ (または I_{Δ^*}) との環論的性質の関係を順に見ていこう. 命題 1.2.2 (1) と命題 2.3.2 (2) から $\operatorname{indeg} I_{\Delta^*} = \operatorname{height} I_\Delta$ が従う. また, Eagon and Reiner [5] は次を示した.

定理 2.3.4 (Eagon and Reiner [5])**.** $K[\Delta]$ が Cohen–Macaulay であるための必要十分条件は I_{Δ^*} が線型自由分解を持つことである.

一般に,

Δ: (pure) shellable
$\Longrightarrow K[\Delta]$: Cohen–Macaulay
$\Longrightarrow K[\Delta]$: sequentially Cohen–Macaulay

が正しい. 定理 2.3.4 は, 第 2 行のものに対応する. 次の二つの概念が残りの 2 つの行にそれぞれ対応するものである.

定義 2.3.5. 単項式イデアル I が linear quotient をもつとは, I の単項式からなる極小生成系の全順序 $m_1, m_2, \ldots, m_\mu$ で, 任意の $i = 2, 3, \ldots, \mu$ に対し

$$(m_1, \ldots, m_{i-1}) : m_i$$

が変数で生成されるものが存在するときにいう.

定義 2.3.6. I を S の squarefree monomial ideal とする.

$$I_{\langle j \rangle} := (m \in I \ : \ m \in I_j)$$

と定める. I が componentwise linear であるとは, 任意の j に対して $I_{\langle j \rangle}$ が線型自由分解をもつときにいう.

$$I_{[j]} := (m \in I \ : \ m \text{ は squarefree monomial}, \ \deg m = i)$$

と定める.

命題 2.3.7 (Herzog and Hibi [10])**.** squarefree monomial ideal I が componentwise linear であるための必要十分条件は, 任意の j に対して $I_{[j]}$ が線型自由分解をもつことである.

さて, Alexander 双対性に関して次が成り立つ.

定理 2.3.8 (Herzog, Hibi, and Zheng [13])**.** Δ が shellable であることと I_{Δ^*} が linear quotient をもつことは同値である.

定理 2.3.9 (Herzog and Hibi [10])**.** $K[\Delta]$ が sequentially Cohen–Macaulay であることと I_{Δ^*} が componentwise linear であることは同値である.

Alexander 双対性について知られている結果をもう少し紹介しよう.
定理 2.3.4 より一般に, 次が成り立つ.

定理 2.3.10 (Terai)**.** 単体的複体 Δ について, 次が成り立つ:

$$\dim K[\Delta] - \operatorname{depth} K[\Delta] = \operatorname{reg} I_{\Delta^*} - \operatorname{indeg} I_{\Delta^*}.$$

特に, $\operatorname{pd}_S K[\Delta] = \operatorname{reg} I_{\Delta^*}$ が成り立つ.

I を squarefree monomial ideal とする. Betti 数 $\beta_{ij}(I) \neq 0$ が extremal であるとは, 任意の $r \geq i$, 任意の $s \geq j+1$ に対して $\beta_{rs}(I) = 0$ となるときにいう.

定理 2.3.11 (Bayer, Charalambous, and Popescu [1])**.** $\beta_{ij}(I_{\Delta^*})$ が extremal ならば

$$\beta_{ij}(I_{\Delta^*}) = \beta_{j-i-1\ j}(I_\Delta)$$

が成り立つ.

3　エッジイデアル

この節では, 2 次の単項式で生成された Stanley–Reisner イデアルを考える. そのイデアルは (有限単純) グラフに対応する. 逆に, 有限単純グラフが与えられたとき, それに付随する squarefree monomial ideal が生ずる. それをエッジイデアルとよぶ. どのようなエッジイデアルが Cohen–Macaulay となるか, または sequentially Cohen–Macaulay となるかについて考察しよう.

3.1　エッジイデアルとは

G を頂点集合 $V = [n]$ 上の有限単純グラフとする, すなわち, G はループも多重辺ももたないグラフとする. $E(G)$ で G の辺集合を表す.

$$I(G) := (x_i x_j \ : \ \{i, j\} \in E(G)) \subset K[x_1, \ldots, x_n]$$

を G のエッジイデアルとよぶ.

3.2　Cohen–Macaulay エッジイデアル

まず, Cohen–Macaulay エッジイデアルについて考察しよう. 今, 基礎体 K を固定する. $I(G)$ が Cohen–Macaulay であるとき, G を Cohen–Macaulay グラフということにする.

G を $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 上の任意の有限単純グラフとする. $\{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{y_1, \ldots, y_n\}$ 上の, 次の集合を辺集合とするグラフを $W(G)$ で表す:

$$E(W(G)) = E(G) \cup \{\{x_1, y_1\}, \ldots, \{x_n, y_n\}\}.$$

$W(G)$ を G の whisker グラフという. (言い換えると, $W(G)$ は G の各頂点に whisker を付けたグラフである.

例 3.2.1. 三角形 C_3 を考えよう (図 7):

$$V(C_3) = \{x_1, x_2, x_3\}, \qquad E(C_3) = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}\}.$$

このとき $W(C_3)$ は $\{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3\}$ 上のグラフで, その辺集合は

$$\{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_3, y_3\}\}$$

である (図 8).

命題 3.2.2 (Villarreal [21])**.** 任意の有限単純グラフ G に対し, $W(G)$ は Cohen–Macaulay である.

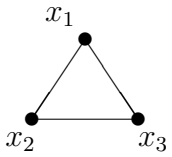


図 7: C_3

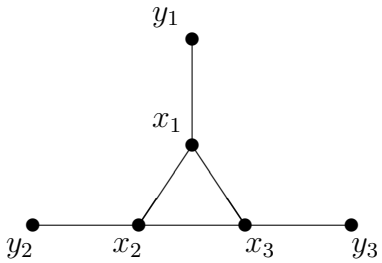


図 8: $W(C_3)$

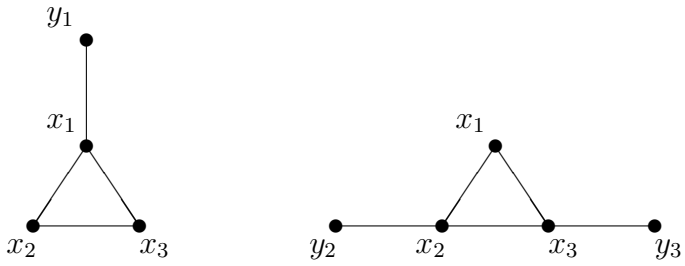


図 9: C_3 の頂点の一部に whisker を付けたグラフ

whisker を付けない頂点があるときには Cohen–Macaulay となるとは限らない.

例 3.2.3. 三角形 C_3 について, C_3 は Cohen–Macaulay であり, すべての頂点に whisker を付けたグラフ $W(C_3)$ も Cohen–Macaulay である. しかし, 1 個でも whisker を付けない頂点がある場合 (図 9) には Cohen–Macaualy ではない.

cycle を含まないグラフを forest という. 基本的なグラフのクラスに, 二部グラフと弦グラフがある: V 上のグラフ G が二部グラフであるとは, 頂点集合 V の $V = V_1 \cup V_2$ $(V_1 \cap V_2 = \emptyset)$ という分解で, $E(G) \subset V_1 \times V_2$ となるものがあるときにいう. また, G が弦グラフであるとは, G に含まれる長さが 3 より大きい任意のサイクルが弦をもつときにいう. 二部グラフと弦グラフの共通部分が forest である. whisker グラフを用いて forest の Cohen–Macaulay 性が特徴づけられる.

定理 3.2.4 (Villarreal [21])**.** forest G が Cohen–Macaulay であるための必要十分条件は, ある forest H が存在して $G = W(H)$ となることである.

命題 3.2.2 は, Cook and Nagel [3] による拡張がある. それを紹介するために, いくつか言葉を準備しよう. G を頂点集合 V 上の有限単純グラフとする. $W \subset V$ に対し, G の W への制限を, $\{e \in E(G) : e \subset W\}$ を辺集合とする W 上のグラフと定め, G_W で表す. $W \subset V$ が G の clique であるとは, G_W が完全グラフであるときにいう. $\pi = \{W_1, \ldots, W_t\}$ が G の clique decomposition であるとは, 次の 3 つの条件を満たすときにいう.

(i) $V = W_1 \cup \cdots \cup W_t$.

(ii) $i \neq j$ のとき $W_i \cap W_j = \emptyset$.

(iii) 各 i について, W_i は G の clique である.

ただし, $W_i = \emptyset$ も許す.

さて, G を V 上の有限単純グラフ, $\pi = \{W_1, \ldots, W_t\}$ を G の clique decomposition とする. このとき, G^π を, $V \cup \{w_1, \ldots, w_t\}$ ($w_1, \ldots, w_t$ は新しい頂点) 上の, 次の集合を辺集合とするグラフとする:

$$E(G^\pi) := E(G) \cup \bigcup_{i=1}^{t} \{\{x, w_i\} \ : \ x \in W_i\}.$$

G の whisker グラフ $W(G)$ は, 各 W_i を一点集合としたときの G^π である.

例 3.2.5. 例 3.2.1 と同じ三角形 C_3 を考えよう. $W_1 = \{x_1, x_2\}$, $W_2 = \{x_3\}$ とすると $\pi = \{W_1, W_2\}$ は C_3 の clique decomposition であり, $(C_3)^\pi$ は $\{x_1, x_2, x_3, w_1, w_2\}$ 上の

$$\{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, w_1\}, \{x_2, w_2\}, \{x_3, w_2\}\}$$

を辺集合とするグラフである (図 10).

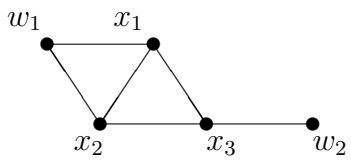


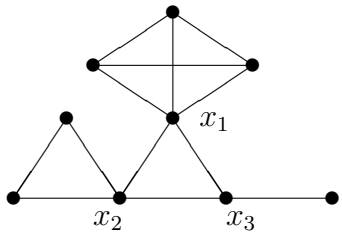
図 10: $(C_3)^\pi$ (例 3.2.5)

定理 3.2.6 (Cook and Nagel [3])**.** G を任意の有限単純グラフとし, π を G の clique decomposition とする. このとき G^π は Cohen–Macaulay である.

系 3.2.7 (Hibi, Higashitani, Kimura, and O'Keefe [16])**.** G を任意の有限単純グラフとする. G の各頂点に完全グラフをくっつけたグラフは Cohen–Macaulay である.

系 3.2.7 に現れるグラフはどのようなものであるか, 例を一つ挙げておく.

例 3.2.8. 再び三角形 C_3 を考える. 各頂点にそれぞれ, 4, 3, 2 頂点の完全グラフをくっつけたグラフは



である. 系 3.2.7 より, このグラフは Cohen–Macaulay である.

その他, グラフの Cohen–Macaulay 性について既知の結果のいくつかをまとめておく. グラフ G が unmixed であるとは, 付随するエッジイデアルが unmixed であるときにいう. エッジイデアルに付随する単体的複体の言葉でいえば, その単体的複体が pure である, ということである. 特に, グラフについて, Cohen–Macaulay ならば unmixed である.

- Cohen–Macaulay 二部グラフの特徴付け (Herzog and Hibi [11], Estrada and Villarreal [6]).
- 弦グラフについて, Cohen–Macaulay であることと unmixed であることは同値である (Herzog, Hibi, and Zheng [14]).
- unmixed な二部グラフの特徴付け (Villarreal [22]).

定理 2.3.4 で見たように, 線型自由分解をもつということは, Cohen–Macaulay 性の Alexander 双対に相当する. 最後に 2-線型自由分解をもつエッジイデアルの特徴づけを紹介する. V 上の有限単純グラフ G について, その補グラフ $\overline{G}$ を, G と同じ V を頂点集合とし,

$$E(\overline{G}) := \{\{i,j\} \subset V \ : \ \{i,j\} \notin E(G)\}$$

を辺集合とするグラフと定める.

定理 3.2.9 (Fröberg [9])**.** G を有限単純グラフとする. $I(G)$ が 2-線型自由分解をもつための必要十分条件は $\overline{G}$ が弦グラフであることである.

3.3 Sequentially Cohen–Macaulay エッジイデアル

先に, whisker グラフ $W(G)$ が Cohen–Macaulay になることを紹介した (定理 3.2.2). しかし, whisker を付けない頂点があるときには, 必ずしも Cohen–Macaulay にならないことも見た (例 3.2.3). whisker を付ける頂点を減らしたときのグラフの性質について, sequentially Cohen–Macaulay 性に注目して調べてみることにする.

G を頂点集合 V 上のグラフとし, S を V の部分集合とする. $G \setminus S$ で, 制限グラフ $G_{V \setminus S}$ を表すことにする. また, $G \cup W(S)$ で, G の S に属する頂点のみに whisker を付けて得られるグラフを表すことにする. 正確には, $S = \{s_1, \ldots, s_u\}$ とするとき, $G \cup W(S)$ は, $V \cup \{y_1, \ldots, y_u\}$ を頂点集合とし,

$$E(G) \cup \bigcup_{i=1}^{u} \{\{y_i, s_i\}\}$$

を辺集合とするグラフである.

定理 3.3.1 (Francisco and Hà [7])**.** G を頂点集合 V 上の有限単純グラフとし, S を V の部分集合とする.

(1) $G \setminus S$ が弦グラフならば $G \cup W(S)$ は sequentially Cohen–Macaulay である.

(2) $G \setminus S$ が sequentially Cohen–Macaulay でないならば $G \cup W(S)$ も sequentially Cohen–Macaulay でない.

最後に sequentially Cohen–Macaulay エッジイデアルについて, 既知の結果をいくつかまとめておく. グラフが shellable とは, 対応するエッジイデアルに付随する単体的複体が shellable であるときにいう.

- 弦グラフは (non-pure) shellable である (Van Tuyl and Villarreal [20]). 特に, sequentially Cohen–Macaulay である (Francisco and Van Tuyl [8]).
- より一般に, 長さ 3 または 5 以外の chordless cycle のないグラフは (non-pure) shellable である. 特に, sequentially Cohen–Macaulay である (Woodroofe [23]).
- 二部グラフについて, sequentially Cohen–Macaualy であることと (non-pure) shellable であることは同値である (Van Tuyl and Villarreal [20]).
- sequentially Cohen–Macaulay cycle は, 長さ 3 および 5 のもののみである. 特に, これらは shellable である. (Francisco and Van Tuyl [8]).

参考文献

[1] D. Bayer, H. Charalambous, and S. Popescu, *Extremal Betti numbers and applications to monomial ideals*, J. Algebra **221** (1999), 497–512.

[2] W. Bruns and J. Herzog, Cohen–Macaulay rings, revised edition, Cambridge studies in advanced mathematics **39**, Cambridge University Press, 1998.

[3] D. Cook II and U. Nagel, *Cohen–Macaulay graphs and face vectors of flag complexes*, SIAM J. Discrete Math. **26** (2012), 89–101.

[4] A. M. Duval, Algebraic shifting and sequentially Cohen–Macaulay simplicial complexes, Electron. J. Combin. **3** (1996), 14 pp.

[5] J. A. Eagon and V. Reiner, *Resolutions of Stanley–Reisner rings and Alexander duality*, J. Pure Appl. Algebra **130** (1998), 265–275.

[6] M. Estrada and R. H. Villarreal, *Cohen–Macaulay bipartite graphs*, Arch. Math. (Basel) **68** (1997), 124–128.

[7] C. A. Francisco and H. T. Hà, *Whiskers and sequentially Cohen–Macaulay graphs*, J. Combin. Theory Ser. A **115** (2008), 304–316.

[8] C. A. Francisco and A. Van Tuyl, *Sequentially Cohen–Macaulay edge ideals*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 2327–2337.

[9] R. Fröberg, *On Stanley–Reisner rings*, in: Topics in algebra, part 2 (Warsaw, 1988), Banach Center Publ. **26**, Part 2. PWN, Warsaw, 1990, pp. 55–70.

[10] J. Herzog and T. Hibi, *Componentwise lienar ideals*, Nagoya Math. J. **153** (1999), 141–153.

[11] J. Herzog and T. Hibi, *Distributive lattices, bipartite graphs and Alexander duality*, J. Algebraic Combin. **22** (2005), 289–302.

[12] J. Herzog and T. Hibi, Monomial ideals, GMT 260, Springer-Verlag London, 2011.

[13] J. Herzog, T. Hibi, and X. Zheng, *Dirac's theorem on chordal graphs and Alexander duality*, European J. Combin. **25** (2004), 949–960. ??

[14] J. Herzog, T. Hibi, and X. Zheng, *Cohen–Macaulay chordal graphs*, J. Combin. Theory Ser. A **113** (2006), 911–916.

[15] 日比孝之, 可換代数と組合せ論, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1995.

[16] T. Hibi, A. Higashitani, K. Kimura, and A. B. O'Keefe, *Algebraic study on Cameron–Walker graphs*, preprint, arXiv:1308.4765v3.

[17] G. Reisner, *Cohen–Macaulay quotients of polynomial rings*, Advances in Math. **21** (1976), 30–49.

[18] R. P. Stanley, Combinatorics and Commutative Algebra, second edition, Progress in Math. **41**, Birkhäuser, 1996.

[19] A. Van Tuyl, *Sequentially Cohen–Macaulay bipartite graphs: vertex decomposability and regularity*, Arch. Math. (Basel) **93** (2009), 451–459.

[20] A. Van Tuyl and R. H. Villarreal, *Shellable graphs and sequentially Cohen–Macaulay bipartite grpahs*, J. Combin. Theory Ser. A **115** (2008), 799–814.

[21] R. H. Villarreal, *Cohen–Macaulay graphs*, Manuscripta Math. **66** (1990), 277–293.

[22] R. H. Villarreal, *Unmixed bipartite graphs*, Rev. Colombiana Mat. **41** (2007), 393–395.

[23] R. Woodroofe, *Vertex decomposable graphs and obstructions to shellability*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 3235–3246.

〒 422-8529
静岡市駿河区大谷 836
静岡大学大学院理学研究科数学専攻
E-mail: `skkimur@ipc.shizuoka.ac.jp`