

リボン圏の話

清水健一 *

2014年6月30日

概要. 本稿は、2014年3月1日に開催された第6回代数学若手セミナー（於・信州大学）における私の発表『リボン圏の話』を元に、時間の都合上話すことができなかった話題を追加してまとめたものである。リボン圏と呼ばれるある種の圏論的な枠組みを用いて結び目・絡み目の不変量を構成する方法を概説することがその主たる目的である。

序

私の専門分野は**ホップ代数** (Hopf algebra) と呼ばれる代数系である。数学において対称性を記述する概念が**群** (group) であるが、ホップ代数はその『非可換幾何学』的な意味での一般化であると思える（歴史的な背景に関しては Andruskiewitsch-Santos [AFS09] を参照されたい）。ホップ代数の重要な例として、1980年代に Drinfeld と神保によって発見された**量子群** (quantum group) がある。それらはある種の Lie 群（正確には対応する Lie 代数の包絡環）を『量子変形』したもものとして定義される。量子群は最早通常の意味の群ではなく、ホップ代数として捉えなければならないものとなっているのであった。

量子群がこれほどまでに注目されているのは、それが非常に多くの分野と関係しているからであろう。本稿で主に解説するのは、量子群と結び目理論との関わりである。結び目理論において最も基本的な問題は結び目や絡み目の同値性判定であるが、このような問題に有用なのが絡み目不変量である。なかでも**ジョーンズ多項式**と呼ばれるものは有名であるが、実はジョーンズ多項式は量子群を用いて構成することができる。量子群の理論から結び目不変量を構成するために必要な構造を取り出したものが**リボンホップ代数** (ribbon Hopf algebra) および**リボン圏** (ribbon category) の概念であり、最終的には『量子群はリボンホップ代数であり、リボンホップ代数の表現圏はリボン圏であり、さらにリボン圏からは結び目不変量が構成できる』という理論的な枠組みに整理された。結果的には、ジョーンズ多項式はこの非常に一般的な構成の一例として理解できるようになったのである。

このような結果はホップ代数の研究に非常に大きな影響を与えている。実際、量子群の発見以降、ホップ代数の純代数的な研究においても上述したようなトポロジーに由来する構造が重要であると認識されるようになったのである。私が近年興味を持っているのは、ホップ代数の代数的な性質がトポロジーの言葉でどのように理解できるかという問題である。今回の代数学若手セミナーではこの方面への展望を話すべきかとも考えたが、むしろ『リボン圏という代数的な概念とトポロジーがどのように結びつくのか』という聴講者の興味に答えることが重要だと考え、Turaev の教科書 [Tur94] や Kassel の教科書 [Kas95] で解説されているようなリボン圏およびリボンホップ代数の結び目理論への応用について解説した。本稿の内容も基本的にはセミナーで話

* 名古屋大学多元数理科学研究科・日本学術振興会特別研究員 (PD)

✉ x12005i@math.nagoya-u.ac.jp

した内容に沿うが、時間の都合上話すことのできなかつた話題も含めてある。

予備知識. 本稿を読む上での予備知識としては、学部レベルの代数学の話と圏論に関する非常に基本的な事柄(圏・関手・自然変換の定義)を仮定する。必要に応じて Mac Lane の教科書 [ML98] を参照されたい。

本稿の構成. 第 1 章では、モノイダル圏の定義とそれらを取り扱う上での注意点と心構えについて述べる。組みひも圏やリボン圏といった本稿で取り扱う概念は、すべて幾何学的な意味を持つ付加構造を持ったモノイダル圏として定義されており、その意味でこの章は重要である。しかしながら、第 2 章以降を読み進めるにあたってはモノイダル圏の特別な場合である『厳格なモノイダル圏』(strict monoidal category) の定義さえ知っておけばよい。この章の内容は、モノイダル圏を扱う論文に散見される『モノイダル圏はすべて厳格であると仮定してよい』というような決まり文句の意味するところを理解することが主目的であり、第 2 章以降では実際にそのような仮定が置かれるからである。

第 2 章では、まずモノイダル圏の理論において非常に重要かつ基本的なテクニックである射の図式的表示の方法を導入する。モノイダル圏の射に対しては合成とテンソル積という 2 つの演算が定義されているが、これらの組み合わせとして非常に複雑な式が現れることがある。そのようなものをヴィジュアル的に理解するテクニックが図式的表示である。さらに第 2 章では、このテクニックを用いてモノイダル圏における双対の概念を説明する。この概念は一見飲み込みにくいかもしれないが、図式を用いればその意味は非常に分かりやすいものとなる。

続く第 3 章では、組みひも圏とリボン圏の概念を導入する。組みひも圏やリボン圏はいくつかの付加構造を持ったモノイダル圏として定義されるが、それらの構造は非常に明確な幾何学的意味を持っている。そもそも絡み目とは有限個の円周 S^1 を三次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 に埋め込んだものであるが、円周の代わりにアニュラス $A = S^1 \times [0, 1]$ を埋め込んだものがリボンである。 \mathcal{C} をリボン圏とするとき、第 2 章で紹介した射の図式的表示のテクニックを用いることで、各対象 $V \in \mathcal{C}$ から $\text{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1})$ に値を持つリボンの不変量 $\langle - \rangle_V$ を定義できる。さらに \mathcal{C} と V に (表現論的には V の既約性があれば満たされるような) いくつかの条件を課すと、この $\langle - \rangle_V$ を使って絡み目不変量を定義することができるのである。

このような一般的な構成から得られる絡み目不変量の例については、第 4 章で紹介する。この章では、まずリボンホップ代数を導入し、その表現圏がリボン圏となっていることを説明する。量子群がある意味でリボンホップ代数であり、そのリボン構造を用いてジョーンズ多項式やアレクサンダー多項式が構成されるという話は最も重要であると思われるが、これらを詳しく説明することは筆者の手に余るため、参考文献を挙げるに留めている。最後に、比較的取り扱いやすいリボンホップ代数の例として、1 のべき根における量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の商として得られるものと、有限次元半単純ホップ代数の Drinfeld double として得られるものを紹介する。特に後者は『それから良い絡み目不変量が得られるか』という観点からは面白い例とは言えないかもしれないが、一方である絡み目の不変量が元のホップ代数の既約表現の数と関係しているなど、ホップ代数の理論の観点からは非常に面白い例である。

謝辞. 第 6 回代数学若手セミナーにおいて講演の機会を与えていただいた、研究会の世話人である信州大学の内藤貴仁氏、亀山統胤氏、前川悠氏、沼田泰英氏には、この場を借りて御礼申し上げます。

1 モノイダル圏

1.1 モノイダル圏の定義

ベクトル空間のテンソル積、あるいはその一般化である両側加群のテンソル積は現代数学においては常識的な概念であり、幅広い分野で有効に使われている。体 k 上のベクトル空間のテンソル積の基本性質として、次のようなものがよく知られている：

$$(U \otimes_k V) \otimes_k W \cong U \otimes_k (V \otimes_k W), \quad k \otimes_k V \cong V \cong V \otimes_k k.$$

同型 \cong を $=$ だと思つくと、これはまさにモノイドの公理である。はじめの式が結合律 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ であり、次の式が単位律 $1 \cdot a = a = a \cdot 1$ というわけである。標語的には『すべてのベクトル空間のあつまり』はテンソル積 \otimes_k に関してモノイドをなす、とすることができる。

このような状況は、何もテンソル積に限ったことではない。例えば『すべての集合のあつまり』は直積によってモノイドとなっている（この場合の単位元にあたるものは1点集合である）。また『すべての位相空間のあつまり』や『すべての群のあつまり』なんかも同様にしてモノイドとなっている。我々はこのような状況を形式的に取り扱いたい。まず、上で何度も登場した『ある種の数学的対象のあつまり』という部分は圏 (category) で置き換える。その対象の間に何か二項演算が定義されており、対象の全体がモノイドとなっているようなものをモノイダル圏、すなわち**モノイダル圏** (monoidal category) と呼びたい。この気持ちを直接的に書き下して、それを仮に次のように定義する。モノイダル圏とは、圏 \mathcal{C} であつて、**テンソル積** (tensor product) と呼ばれる関手 $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ と**単位対象** (unit object) と呼ばれる対象 $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$ が定義されており、さらに次の条件を満たすようなものである：

$$(1.1) \quad (X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z), \quad \mathbf{1} \otimes X = X = X \otimes \mathbf{1} \quad (X, Y, Z \in \mathcal{C})$$

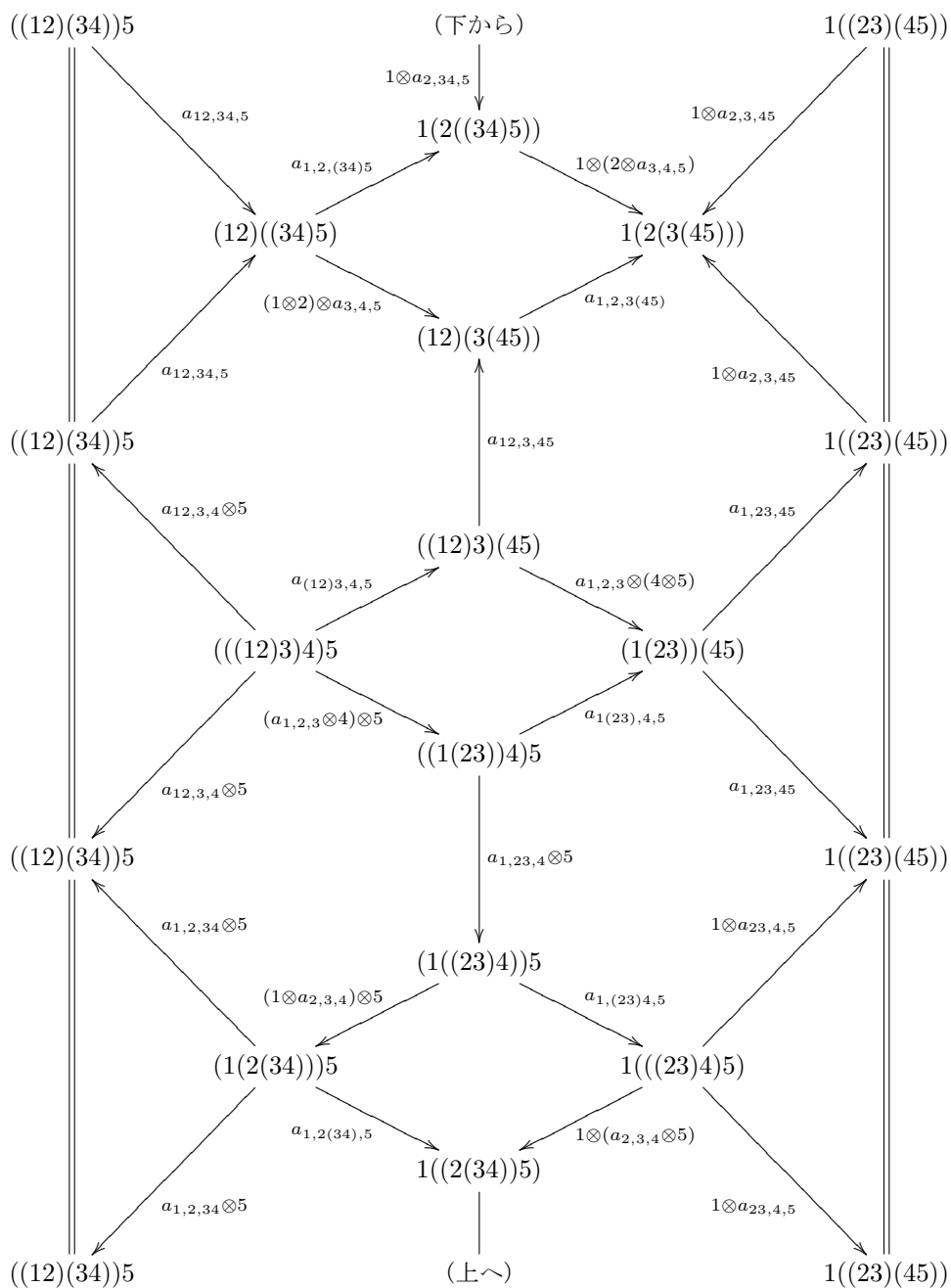
さて仮にと述べたが——この定義を実際に採用した場合、いくつかの問題が生じることであろう。まず『すべてのベクトル空間のあつまり』はモノイダル圏の例として取り扱うことはできない。そもそもテンソル積と呼ばれるものはある種の普遍性によって定義されるものであり、等しいかどうか問うことはできないからである。ベクトル空間 V と W のテンソル積を直積集合 $V \times W$ の元を基底とするベクトル空間の商空間として具体的に構成する方法もあるが、このような立場をとれば尚更等号 $(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z)$ は成り立たないであろう。少なくとも『すべてのベクトル空間のあつまり』をモノイダル圏の例とするためには、上の定義は強すぎるのである。そこで条件 (1.1) の等号 $=$ を同型 \cong に置き換える。それらの同型には次のように名前をつけておくことにしよう：

$$(1.2) \quad a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes Z), \quad l_X : \mathbf{1} \otimes X \xrightarrow{\cong} X, \quad r_X : X \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\cong} X.$$

対応 $(X, Y, Z) \mapsto (X \otimes Y) \otimes Z$ や $(X, Y, Z) \mapsto X \otimes (Y \otimes Z)$ は $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ から \mathcal{C} への関手になっていることに注意せよ。我々は $a_{X,Y,Z}$ が X, Y, Z に関して自然な同型となっていることを要請しておく。同様に l_X および r_X も X に関して自然な同型であることを要請しておく。

さて、自然同型 (1.2) に対してどのような条件を課すべきであろうか？ 対象の列 X_1, \dots, X_n が与えられたとき、例えば $(X_1 \otimes ((X_2 \otimes \mathbf{1}) \otimes X_3)) \otimes (((\mathbf{1} \otimes X_4) \otimes X_5) \otimes \dots)$ のような X_1, \dots, X_n と単位対象 $\mathbf{1}$ のテンソル積によって構成される対象が無数に考えられる。例えば $n = 5$ として

$$(1.3) \quad A = (X_1 \otimes X_2) \otimes (X_3 \otimes (X_4 \otimes X_5)), \quad B = (X_1 \otimes ((X_2 \otimes X_3) \otimes X_4)) \otimes X_5$$



例えば $((X_1 \otimes X_2) \otimes (X_3 \otimes X_4)) \otimes X_5 = ((12)(34))5$ のように、対象 X_i を数字 i で表し、さらに対象の間のテンソル積の記号を省略している。このように5つの文字の間に括弧を適当に入れて得られる文字列はちょうど14個あり(カタラン数)、その全てがこの図には現れている。上下を繋ぎ、さらに $=$ で繋がれている部分を1点にまとめることで、3つの四角形と6つの五角形を面とし、14個の頂点を持つ立体として表示できる。

図1 5つの対象からなるテンソル積の間の同型

という2つの対象を考えてみよう。もし \otimes がベクトル空間のテンソル積ならば、我々はこれらの対象を区別せず、単に “ $X_1 \otimes X_2 \otimes X_3 \otimes X_4 \otimes X_5$ ” のように書くであろう。そのような表記が正当性を持つのは、それらの間に標準的な同型が存在するからである。我々が今考えている一般的な状況下では、図1を見れば分かるように、自然同型 (1.2) を用いて同型 $A \cong B$ を構成する方法は非常に多くあり、その中から標準的なものを選ぶことはできない。そこで我々は、自然同型 (1.2) に対し次の条件を要求したい：

コヒーレンス条件. 恒等射、自然同型 (1.2) とそれらの逆射からテンソル積と合成をとる操作によって構成される射は、定義域と値域が同一である限り、等しい。

この条件を仮定すれば、例えば (1.3) のような対象たちを同一視することが可能になる。これをモノイダル圏の定義として採用したいところではあるが、一方で、この条件を確認するのは容易なことではない。そこで重要になるのが次のマックレーンの**コヒーレンス定理** (coherence theorem) である：

定理 1.1 (コヒーレンス定理). コヒーレンス条件 \iff 次の五角形公理と三角形公理が成り立つ。

(1) **五角形公理** : 任意の $W, X, Y, Z \in \mathcal{C}$ に対し、次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc}
 & ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z & \\
 a_{W, X, Y} \otimes \text{id}_Z \swarrow & & \searrow a_{W \otimes X, Y, Z} \\
 (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z & & (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \\
 a_{W, X \otimes Y, Z} \downarrow & & \downarrow a_{W, X, Y \otimes Z} \\
 W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) & \xrightarrow{\text{id}_W \otimes a_{X, Y, Z}} & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z))
 \end{array}$$

(2) **三角形公理** : 任意の $X, Y \in \mathcal{C}$ に対し、次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc}
 (X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y & \xrightarrow{a_{X, \mathbf{1}, Y}} & X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \\
 r_X \otimes \text{id}_Y \searrow & & \swarrow \text{id}_X \otimes l_Y \\
 & X \otimes Y &
 \end{array}$$

定義 1.2. **モノイダル圏**とはテンソル積 $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, 単位対象 $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$ および自然同型

$$a_{X, Y, Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes Z), \quad l_X : \mathbf{1} \otimes X \xrightarrow{\cong} X, \quad r_X : X \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\cong} X.$$

が与えられているような圏 \mathcal{C} であって、それらが五角形公理と三角形公理を満たす（したがって上の定理よりコヒーレンス条件も満たす）ようなものである。

コヒーレンス条件から五角形公理と三角形公理が従うのは自明であるが、逆の証明は簡単ではない（興味の有る読者は、雰囲気をつかむため、図1の可換性が五角形公理のみから従うことを確認してみよ）。マックレーンの圏論の教科書 [ML98, VII.2] では非常に直接的な証明が与えられている。個人的には、後で紹介する厳格化定理（定理 1.7）の系として間接的に証明するほうが分かりやすいように思える。

例 1.3. 体 k 上のベクトル空間の圏 Vec は k 上のテンソル積 \otimes_k によってモノイダル圏となる。**テンソル圏** (tensor category) といった場合、このように何らかの線型構造が入ったモノイダル圏を指すことが多いのであるが、文献によって異なった意味で使われているため注意が必要である。テンソル圏という言葉は印象的で分かりやすいのだが、混乱を避けるため、本稿では使わないことにする。

例 1.4. 集合の圏 \mathbf{Set} は直積をテンソル積、一点集合 $\{*\}$ を単位対象とするモノイダル圏である。このように (圏論的な意味での) 有限直積が存在する圏はすべてモノイダル圏となる。

例 1.5. $(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z)$ および $\mathbf{1} \otimes X = X = X \otimes \mathbf{1}$ が成り立ち、さらに自然同型 a, l, r がすべて恒等射であるようなモノイダル圏は**厳格なモノイダル圏** (strict monoidal category) と呼ばれる。上で挙げた \mathbf{Set} や \mathbf{Vec} は厳格なモノイダル圏ではない。厳格なモノイダル圏の例として、固定された圏 \mathcal{C} 上の自己関手の圏を挙げよう。 \mathcal{C} を (小さな) 圏とし、 $\mathbf{End}(\mathcal{C})$ で \mathcal{C} から \mathcal{C} への関手のなす圏を表す。 $\mathbf{End}(\mathcal{C})$ は関手の合成をテンソル積、恒等関手 $\text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ を単位対象とするモノイダル圏となる。

1.2 モノイダル関手

モノイダル圏の間の構造を保つような関手として、モノイダル関手を導入する：

定義. \mathcal{C} と \mathcal{D} をモノイダル圏とする。 \mathcal{C} から \mathcal{D} への**モノイダル関手** (monoidal functor) とは、自然変換 $\varphi_{X,Y} : F(X) \otimes F(Y) \rightarrow F(X \otimes Y)$ および射 $\varphi_0 : \mathbf{1} \rightarrow F(\mathbf{1})$ を持つ関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ であって、次の条件を満たすようなものである。

(1) 任意の $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ に対し、次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc}
 (F(X) \otimes F(Y)) \otimes F(Z) & \xrightarrow{a_{F(X), F(Y), F(Z)}} & F(X) \otimes (F(Y) \otimes F(Z)) \\
 \downarrow \varphi_{X,Y} \otimes \text{id}_{F(Z)} & & \downarrow \text{id}_{F(X)} \otimes \varphi_{Y,Z} \\
 F(X \otimes Y) \otimes F(Z) & & F(X) \otimes F(Y \otimes Z) \\
 \downarrow \varphi_{X \otimes Y, Z} & & \downarrow \varphi_{X, Y \otimes Z} \\
 F((X \otimes Y) \otimes Z) & \xrightarrow{F(a_{X,Y,Z})} & F(X \otimes (Y \otimes Z))
 \end{array}$$

(2) 任意の $X \in \mathcal{C}$ に対し、次の2つの図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} \otimes F(X) & \xrightarrow{l_{F(X)}} & F(X) \\
 \downarrow \varphi_0 \otimes \text{id}_{F(X)} & & \uparrow F(l_X) \\
 F(\mathbf{1}) \otimes F(X) & \xrightarrow{\varphi_{\mathbf{1}, X}} & F(\mathbf{1} \otimes X)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 F(X) \otimes \mathbf{1} & \xrightarrow{r_{F(X)}} & F(X) \\
 \downarrow \text{id}_{F(X)} \otimes \varphi_0 & & \uparrow F(r_X) \\
 F(X) \otimes F(\mathbf{1}) & \xrightarrow{\varphi_{X, \mathbf{1}}} & F(X \otimes \mathbf{1})
 \end{array}$$

モノイダル関手のことを lax monoidal functor と呼ぶこともある。自然変換 φ および射 φ_0 が同型であるようなとき、 F は**強モノイダル関手** (strong monoidal functor) であるという。単にモノイダル関手と言った場合、強モノイダル関手のことを意味している文献もあるため、注意が必要である。

自然変換 $\psi : F(X \otimes Y) \rightarrow F(X) \otimes F(Y)$ ($X, Y \in \mathcal{C}$) と射 $\psi_0 : F(\mathbf{1}) \rightarrow \mathbf{1}$ を持ち、上と類似の公理を満たすものは comonoidal functor だとか colax monoidal functor だとか呼ばれる。本稿では強モノイダル関手しか考えないので、これらのことは気にしなくて良い。

モノイダル関手の間の自然変換であって φ や φ_0 と整合的なものを**モノイダル自然変換** (monoidal natural transformation) と呼ぶ。モノイダル関手とモノイダル自然変換の概念が準備されれば、モノイダル圏の同値が『いつものやりかた』で定義される。すなわち、まずモノイダル自然変換を用いてモノイダル関手の同型を

定義する。次にモノイダル関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ がモノイダル同値 (monoidal equivalence) であることを

$$G \circ F \cong \text{id}_{\mathcal{C}}, \quad F \circ G \cong \text{id}_{\mathcal{D}} \quad (\text{as monoidal functors})$$

となるようなモノイダル関手 $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ が存在することとして定義する (さらにこのとき、 \mathcal{C} と \mathcal{D} はモノイダル同値であるとも言う)。この定義は 2-圏的な考え方に基づいており、そのような考え方に慣れた人から見れば自然であるが、実用上は次の特徴づけを用いたほうがよいであろう：

定理 1.6. F がモノイダル同値 $\iff F$ は強モノイダル関手であり、通常の間手として圏同値。

ここで紹介したい重要な定理は：

定理 1.7 (厳格化定理). どんなモノイダル圏も、ある厳格なモノイダル圏にモノイダル同値である。

証明. 与えられたモノイダル圏 \mathcal{C} に対し、厳格なモノイダル圏 \mathcal{C}^{str} を次のように定義する。まず \mathcal{C}^{str} の対象は \mathcal{C} の対象の有限列である (ここで有限列には \emptyset で表す長さ 0 の列も含めている)。射を定義するために、対象 $S \in \mathcal{C}^{\text{str}}$ に対する $F(S) \in \mathcal{C}$ を次のように帰納的に定義する：

$$F((V_1, \dots, V_n)) = F((V_1, \dots, V_{n-1})) \otimes V_n \quad (n \geq 2), \quad F((V_1)) = V_1, \quad F(\emptyset) = \mathbf{1}.$$

この記号を用いて射の集合を $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{str}}}(S, S') := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(S), F(S'))$ で定める。射の合成は \mathcal{C} のそれをそのまま用いる。以上によって圏 \mathcal{C}^{str} が定義されることは明らかであろう。

次に \mathcal{C}^{str} のテンソル積を定義する。対象 $S, S' \in \mathcal{C}^{\text{str}}$ に対し、それらのテンソル積 $S * S'$ を単純に列の結合によって定義する。問題は射のテンソル積をどのように定義するかである。まず $S, S' \in \mathcal{C}^{\text{str}}$ に対し、射

$$\varphi_{S, S'} : F(S) \otimes F(S') \rightarrow F(S * S')$$

をコヒーレンス条件によって一意的に定まる同型とする。 \mathcal{C}^{str} の射 $f : S \rightarrow T$ と $g : S' \rightarrow T'$ に対し

$$f * g = \varphi_{T, T'} \circ (f \otimes g) \circ \varphi_{S, S'}^{-1}$$

によってそれらのテンソル積 $f * g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{str}}}(S * S', T * T') (= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(S * S'), F(T * T')))$ を定める。実際に \mathcal{C}^{str} が厳格なモノイダル圏となることは、コヒーレンス条件から容易に確かめられる。

このようにして定義された \mathcal{C}^{str} は、実は \mathcal{C} とモノイダル同値である。実際、対象の間の対応 $S \mapsto F(S)$ は関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{str}}$ へと自然に拡張することができるが、コヒーレンス条件より、この関手は上で定めた φ および $\varphi_0 = \text{id}_{\mathbf{1}} : \mathbf{1} \rightarrow F(\emptyset) = \mathbf{1}$ によって強モノイダル関手となる。さらにこの関手は忠実充満かつ本質的全射であるから、圏同値でもある。したがって、定理 1.6 より \mathcal{C} と \mathcal{C}^{str} はモノイダル同値である。 \square

見て分かるように、証明の難しいところはコヒーレンス条件によって煙に巻かれている。そのブラックボックスの内部が気になる読者は [Kas95, XI] を参照されたい。そこでは射 $\varphi_{S, S'}$ を明示的な方法で定義することにより、 \mathcal{C}^{str} が \mathcal{C} とモノイダル同値であることが非常に直接的に示されている。その証明中の計算が、実質的にコヒーレンス定理の証明に対応すると思って良い。逆に厳格化定理を認めれば、コヒーレンス定理を簡単に証明することができる。

注意 1.8. モノイダル圏 \mathcal{C} の骨格 \mathcal{C}_0 が与えられていると仮定する。このとき \mathcal{C}_0 と \mathcal{C} は圏同値であるから、それを用いて \mathcal{C} のテンソル積を \mathcal{C}_0 に移植することで \mathcal{C}_0 を \mathcal{C} と同値なモノイダル圏にすることが可能である。骨格の定義より等号 $(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z)$ と $\mathbf{1} \otimes X = X = X \otimes \mathbf{1}$ が任意の $X, Y, Z \in \mathcal{C}_0$ に対して成

立しているが、モノイダル圏 \mathcal{C}_0 は厳格であるとは限らない（すなわち、圏同値を通じて移植された自然同型 a, l, r が恒等射になっているとは限らない）。Isbell による $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ の場合の議論が [ML98, VII.1] にある。

注意 1.9. モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ が構造を持った集合の圏（正確な定式化は [Sch01b, Definition 4.1] を見よ）であったと仮定する。このとき、ある関手 $\odot : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ が存在し $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ は厳格なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \odot, \mathbf{1}, \text{id}, \text{id}, \text{id})$ とモノイダル同値である [Sch01b, Theorem 4.3]。つまり \mathcal{C} の厳格化はそのテンソル積を上手く取り替えるだけで得られる。非常に興味深い結果であるが、新しいテンソル積 \odot を具体的に記述することはできないように思われる。

2 射の図式的表示

2.1 射の図式的表示

これまでの議論により、モノイダル圏は厳格であると仮定してよいことが分かった。以降、特に断りの無い限り、そのような仮定が置かれる。

本章では、まず、モノイダル圏の理論において非常に重要かつ基本的なテクニックである、射の図式的表示について説明する。基本的には、下向きの矢印によってモノイダル圏 \mathcal{C} の対象を表し、矢印の間に置かれた『箱』に貼られたラベルによって \mathcal{C} の射を表す。例えば $f : V \rightarrow W$ は図 2 のように表す。なお、我々の記法では定義域が上側に来るが、逆（射の定義域が下側）になっている文献も多いので注意されたい。また、線の無い、単なる線分によって対象を表す流儀もある。そのようなやり方が便利な場合も多いのだが、結び目理論への応用という観点からは、矢印を用いた記法が良いように思われる。

射 $f : V \rightarrow W$ および $g : W \rightarrow X$ が与えられたとき、それらの合成を、それぞれを表す図式を上下に並べたものによって表す（図 3）。この規則のもとで等式 $f \circ \text{id}_V = f = \text{id}_W \circ f$ を表したものが図 4 である。左右の図と真ん中の図を比べてみると、対象を表す下向きの矢印は恒等射を表しているようにも思える。このことは、圏の対象はその対象の上の恒等射と同一視できるという圏論における事実と対応している。

対象 $V, W \in \mathcal{C}$ のテンソル積は、図 5 のように、それぞれを表す図を横に並べて表す。対応して、 \mathcal{C} の射 $f : V \rightarrow W$ と $g : X \rightarrow Y$ のテンソル積は図 6 のように表す。このような規則の下では、図 7 は図 8 の右辺と左辺のような 2 通りの解釈を持つ（簡単のため、図 7 と図 8 では矢印のラベルを省略している）。しかし、テンソル積が直積圏 $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ から \mathcal{C} への関手であることにより

$$(2.1) \quad (g_1 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ f_2) = (g_1 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes f_2)$$

が成り立つから、どちらの解釈を採用しても結果は変わらない（図 8 の等号）。まとめると、テンソル積が射の合成を保つということが、図 7 が well-defined であることを保障しているということができる。一方でテンソル積が恒等射を保つということは、図 5 に対応している。矢印は恒等射と同一視できると述べたが、この同一視の下、図 5 は等式 $\text{id}_{V \otimes W} = \text{id}_V \otimes \text{id}_W$ に読み替えられるからである。

単位対象 $\mathbf{1}$ は、必要が無い限り図には描かない。 $\mathbf{1} \otimes V = V = V \otimes \mathbf{1}$ であるから、そのようにしても特に問題は生じない。練習として図 9 を \mathcal{C} の射として解釈してみよう。規則より p と q は \mathcal{C} の射であり、図の上半分は $p \otimes \text{id}_X$ を表し、下半分は $\text{id}_V \otimes q$ を表す。ここで p と記された箱に注目してみよう。箱の上辺には矢印が無いので、 p の定義域は $\mathbf{1}$ であると解釈できる。また箱の底辺には V と記された矢印と W と記された矢印が左からこの順に並んで接続されているため、 p の値域は $V \otimes W$ であることが分かる。同様にして q は

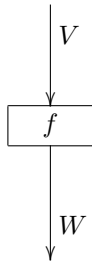


図2 $f: V \rightarrow W$

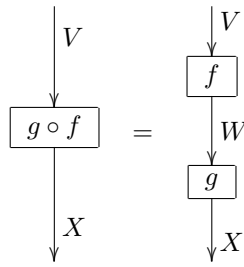


図3 射の合成

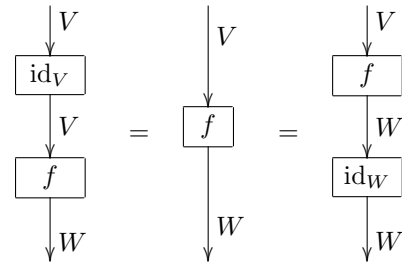


図4 $f \circ \text{id}_V = f = \text{id}_W \circ f$

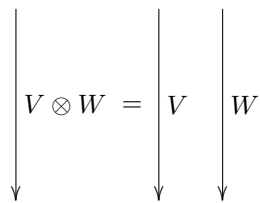


図5 テンソル積 $V \otimes W$

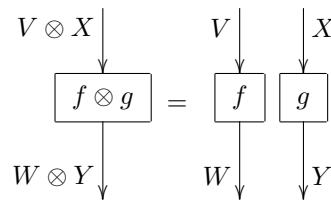


図6 $f \otimes g: V \otimes X \rightarrow W \otimes Y$

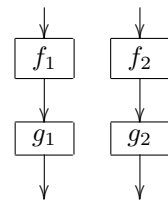


図7 テンソル積の関手性 (1)

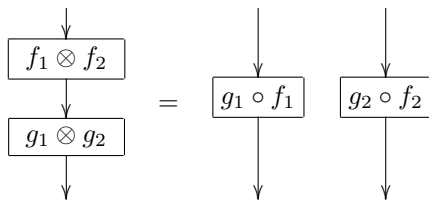


図8 テンソル積の関手性 (2)

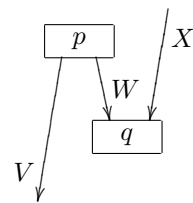


図9 練習問題

射 $W \otimes X \rightarrow \mathbf{1}$ を表していることが分かる。結局、この図は

$$X = \mathbf{1} \otimes X \xrightarrow{p \otimes \text{id}_X} V \otimes W \otimes X \xrightarrow{\text{id}_V \otimes q} V \otimes \mathbf{1} = V$$

という合成として得られる射 $X \rightarrow V$ を表していることになる。

2.2 モノイダル圏における双対

次に、モノイダル圏における『双対』の概念を導入し、その図式的な意味について説明しよう。

定義 2.1. X と Y をモノイダル圏 \mathcal{C} の対象、 $e: Y \otimes X \rightarrow \mathbf{1}$ と $c: \mathbf{1} \rightarrow X \otimes Y$ を \mathcal{C} の射とする。等式

$$(2.2) \quad (\text{id}_X \otimes e) \circ (c \otimes \text{id}_X) = \text{id}_X, \quad (e \otimes \text{id}_Y) \circ (\text{id}_Y \otimes c) = \text{id}_Y$$

が成り立つとき (Y, e, c) は X の左双対象 (left dual object) であるといい、また (X, e, c) は Y の右双対象 (right dual object) であるとも言う。任意の \mathcal{C} の対象が左双対を持つとき、 \mathcal{C} は左リジッド (left rigid) であると言う。 \mathcal{C} が右リジッドであることも同様に定義される。左リジッドかつ右リジッドなモノイダル圏はリジッドであると言われる (後の用語に関する注意 2.2 も見よ)。

さて (V'_i, e_i, c_i) ($i = 1, 2$) が $V \in \mathcal{C}$ の左双対象であったと仮定する。このとき $e_2 = e_1 \circ (\phi^{-1} \otimes \text{id}_V)$ および $c_2 = (\text{id}_V \otimes \phi) \circ c_1$ を満たすような同型 $\phi: V'_1 \rightarrow V'_2$ が一意に存在する (**左双対象の一意性**)。同様に、右双対象も存在すれば同型を除いて一意である。証明は [BK01, §2.1] などを見よ。

以降 \mathcal{C} は左リジッドであると仮定する。さらに各 $V \in \mathcal{C}$ に対し、その左双対象 $(V^*, \text{ev}_V, \text{coev}_V)$ があらかじめ固定されていると仮定する。射 $\text{ev}_V: V^* \otimes V \rightarrow \mathbf{1}$ と $\text{coev}_V: \mathbf{1} \rightarrow V \otimes V^*$ を

$$\text{ev}_V = \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \end{array} \quad \text{coev}_V = \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{---} \\ \uparrow \end{array}$$

のように表す。これに対応して、対象 V^* およびその上の恒等射 id_{V^*} は V でラベル付けされた上向きの矢印で表す。すると条件 (2.2) は次のように表される：

$$(2.3) \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{---} \\ \downarrow \end{array} = \downarrow \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \end{array} = \uparrow$$

\mathcal{C} の射 $f: V \rightarrow W$ に対し、その**左双対射** $f^*: W^* \rightarrow V^*$ を

$$(2.4) \quad \begin{array}{c} W \\ \uparrow \\ \boxed{f^*} \\ \uparrow \\ V \end{array} := \begin{array}{c} W \\ \uparrow \\ \boxed{f} \\ \downarrow \\ V \end{array}$$

で定義する。これにより $V \mapsto V^*$ は反変関手 $(-)^*: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ に拡張される (実際に $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ の両辺を表す図を描いて、比較してみよ)。

注意 2.2 (用語に関する注意). 私が良く用いる文献において、等式 (2.2) が成立している状況下において Y がどのような名前と呼ばれ、どのような記号で表されているか、また我々の反変関手 $X \mapsto X^*$ がどのような名前と呼ばれているかをまとめたものが次の表である：

文献	Y を X の…と呼ぶ	Y を…と表す	反変関手 $X \mapsto X^*$ を…と呼ぶ
Bakalov-Kirillov [BK01]	right dual object	X^*	—
Kassel [Kas95]	—	X^*	left duality
Kerler-Lyubashenko [KL01]	dual object	$\vee X$	—
Majid [Maj95]	left dual	X^*	duality functor

(表中の『—』は、対応する用語が見当たらないもの)。このように、双対に関する記法と用語法にはかなりの混乱が見られる。我々は、基本的には Kassel の教科書 [Kas95] に従っている。

注意 2.3 (厳格とは限らないモノイダル圏における双対). 厳格なモノイダル圏において定義される概念を、厳格とは限らないモノイダル圏に対して拡張する方法を、双対に関する概念を例にとって説明する。もし \mathcal{C} が厳格ではなかったとすると、式 (2.2) は意味を持たない。例えば $(\text{id}_X \otimes e) \circ (c \otimes \text{id}_X) = \text{id}_X$ の左辺は

$$\mathbf{1} \otimes X \xrightarrow{c \otimes \text{id}_X} (X \otimes Y) \otimes X, \quad X \otimes (Y \otimes X) \xrightarrow{\text{id}_X \otimes e} X \otimes \mathbf{1}$$

という2つの射の合成となっているが、定義域と値域が異なるためにこれらは合成できないのである。しかしながら、定義域と値域が違うとは言っても、それらの間の同型を a, l, r を用いて構成することができる。射の

間にそのような同型を適宜挿入してやることにより条件 (2.2) は

$$r_X \circ (\text{id}_X \otimes e) \circ a_{X,Y,X} \circ (c \otimes \text{id}_X) \circ l_X^{-1} = \text{id}_X, \quad l_Y \circ (e \otimes \text{id}_Y) \circ a_{Y,X,Y}^{-1} \circ (\text{id}_Y \otimes c) \circ r_Y^{-1} = \text{id}_Y$$

を意味していると捉えることができる。両辺の定義域と値域を決めておく限り、コヒーレンス条件により、条件の解釈に曖昧さは生じない！

例 2.4. 環 R 上の両側加群のなすモノイダル圏 ${}_R\mathfrak{M}_R$ を考えよう。 $M \in {}_R\mathfrak{M}_R$ が右 R -加群として有限生成射影的であると仮定する。このとき $M^* := \text{Hom}(M_R, R_R)$ は

$$(a \cdot f \cdot b)(m) := f(b \cdot m \cdot a) \quad (f \in M^*, a, b \in R, m \in M)$$

によって両側 R -加群となるが、これは M の左双対対象となる。実際、いわゆる双対基底の補題より、有限個の $m_1, \dots, m_r \in M$ と同じ個数の $f_1, \dots, f_r \in M^*$ が存在し、任意の $m \in M$ に対して

$$m_1 \cdot f_1(m) + \dots + m_r \cdot f_r(m) = m$$

が成り立つ。そこで $\text{ev} : M^* \otimes_R M \rightarrow R$ と $\text{coev} : R \rightarrow M \otimes_R M^*$ を

$$\text{ev}(f \otimes m) = f(m), \quad \text{coev}(a) = \sum a \cdot m_i \otimes f_i \quad (f \in M^*, m \in M, a \in R)$$

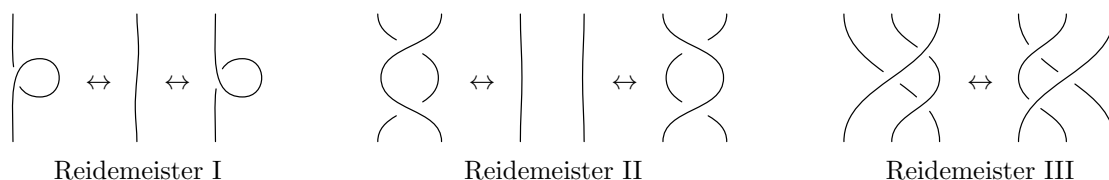
で定める。すると $(M^*, \text{ev}, \text{coev})$ が M の左双対対象であることが確かめられる。少し難しいが、逆も成り立つ（すなわち、 M が左双対対象を持てば、 M は右 R -加群として有限生成射影的）。

例 2.5. 圏 \mathcal{C} 上の自己関手のモノイダル圏 $\text{End}(\mathcal{C})$ を考える。 $\varepsilon : F \circ G \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$ と $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$ を $\text{End}(\mathcal{C})$ の射（すなわち自然変換）とすると、条件 (2.2) はいわゆる counit-unit identity と等価である。したがって $\text{End}(\mathcal{C})$ の対象の左双対対象はその左随伴関手であり、また右双対対象は右随伴関手である。

3 リボン圏

3.1 絡み目不変量の構成 —— 基本的なアイデア

有限個の向きを付いた円周 S^1 を三次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 に埋め込んだものを絡み目 (link) という（正確には有向絡み目 (oriented link) と言うべきであるが、本稿では、特に断りの無い限り、向きを付いたものだけを考えることにする）。連結成分の数が 1 つの絡み目を、特に結び目 (knot) という。連続変形によって互いに移り合う絡み目は同値であると言われる。絡み目を 3 つ以上の点が変わらないように平面に射影したものをその絡み目図式（あるいは単に図式）という。絡み目図式の局所的な変形



をライデマイスター移動と呼ぶ（ただし、絡み目の向きは略して描いてある）。2 つの絡み目の同値性は、それらを表す絡み目図式がライデマイスター移動を有限回繰り返して移りあうか否かで判定できることが知られている（ライデマイスターの定理）。したがって、絡み目不変量とは絡み目図式に対する何らかの量であって、ライデマイスター移動に関して不変であるものであると考えられる。

さて、任意の絡み目図式は、必要があれば微妙に変形することにより

(3.1)

のような基本的な部品に分解できる (ただし、最後の2つに関しては、各成分の向き付けによるバリエーションがある)。このような意味で、絡み目の全体はこれらの部品で『生成』されていると言える。ライデマイスターの定理は、これらの『生成元』の間の『基本関係式』を与えるものとして理解できる。きちんとした定式化はここでは行わないが、このような考察により絡み目の全体の『生成元と関係式』による記述が得られ、結果的に絡み目に関する理論はある意味で完全に代数化されるのである。

ここで \mathcal{C} を左リジッドなモノイダル圏とする。各成分が対象 $V \in \mathcal{C}$ でラベル付けられていると思ったとき、上の部品の中の最初の4つはそれぞれ射 $\text{id}_V, \text{id}_{V^*}, \text{coev}_V, \text{ev}_V$ であると解釈できる。残りの部品は解釈できないが、もしそれらの解釈も与えられれば、どんな絡み目図式も \mathcal{C} の射として解釈できるようになる。さらに各部品に対応する \mathcal{C} の射が (3.1) の間の『基本関係式』を満たしていれば、絡み目図式を \mathcal{C} の射として解釈したものはそのまま対応する絡み目の不変量となる。このやり方では実際には絡み目ではなく『リボン』の不変量できてしまい、最後に若干の修正を行うことが必要になるのだが、いずれにしろ『リボン圏』を用いた絡み目不変量の構成の基本的なアイデアは以上の通りである。

3.2 組みひも圏

リボン圏を導入する前段階として、まず組みひも圏を導入する。

定義 3.1 (組みひも圏). モノイダル圏 \mathcal{C} の**組みひも構造** (braiding) とは、任意の $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ に対して次の条件を満たすような自然同型 $\sigma_{X,Y} : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$ ($X, Y \in \mathcal{C}$) である :

(3.2)
$$\sigma_{X \otimes Y, Z} = (\sigma_{X, Z} \otimes \text{id}_Y) \circ (\text{id}_X \otimes \sigma_{Y, Z}), \quad \sigma_{X, Y \otimes Z} = (\text{id}_Y \otimes \sigma_{Z, X}) \circ (\sigma_{X, Y} \otimes \text{id}_Z)$$

組みひも構造を持つモノイダル圏を**組みひもモノイダル圏** (braided monoidal category)、あるいは単に**組みひも圏** (braided category) という。

\mathcal{C} を組みひも構造 σ を持つ組みひも圏とする。射 $\sigma_{X,Y}$ およびその逆射 $\sigma_{X,Y}^{-1}$ を

$$\sigma_{X,Y} = \begin{array}{c} X \quad Y \\ \diagdown \quad \diagup \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} \quad \sigma_{X,Y}^{-1} = \begin{array}{c} Y \quad X \\ \diagup \quad \diagdown \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array}$$

のような交差するひもの図で表すとき、条件 (3.2) は

(3.3)

のように読み替えられる。 $X \otimes Y$ を『ラベル X とラベル Y がついたひもを並列に束ねたもの』だと思えば、これらの図の言わんとするところは理解しやすいだろう。

さて、組みひも構造がライデマイスター移動 II と III に対応する関係式を満たすことを示そう。II の方は、逆射の定義そのものである：

$$\begin{array}{c} X \quad Y \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \\ X \quad Y \end{array} = \sigma_{X,Y}^{-1} \circ \sigma_{X,Y} = \text{id}_{X \otimes Y} = \begin{array}{c} X \quad Y \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad \\ \downarrow \quad \downarrow \\ X \quad Y \end{array} \quad \text{同様に:} \quad \begin{array}{c} X \quad Y \quad X \quad Y \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ X \quad Y \quad X \quad Y \end{array} = \begin{array}{c} X \quad Y \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad \\ \downarrow \quad \downarrow \\ X \quad Y \end{array}$$

ライデマイスター移動 III に対応する関係式を示すために、組みひも構造が自然変換であることを図式的に解釈しておく。自然性より、射 $f: V \rightarrow W$ と $g: X \rightarrow Y$ に対して $\sigma_{X,Y} \circ (f \otimes g) = (g \otimes f) \circ \sigma_{V,W}$ が成り立つが、この等式を図で描いてみると

$$(3.4) \quad \begin{array}{c} V \quad X \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \boxed{f} \quad \boxed{g} \\ \diagdown \quad \diagup \\ Y \quad W \end{array} = \begin{array}{c} V \quad X \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{g} \quad \boxed{f} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ Y \quad W \end{array}$$

のようになる。特に f や g が恒等射の場合を考えると、この図は射を表す箱は交差点を自由に通過できるということを意味している。このような解釈を用いると、ライデマイスター移動 III に対応する関係式が

$$\begin{array}{c} X \quad Y \quad Z \\ \diagdown \quad \diagup \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \\ X \quad Y \quad Z \end{array} \stackrel{(3.3)}{=} \begin{array}{c} X \otimes Y \quad Z \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \boxed{\sigma_{X,Y}} \\ \diagdown \quad \diagup \\ Y \otimes X \quad Z \end{array} \stackrel{(3.4)}{=} \begin{array}{c} X \otimes Y \quad Z \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{\sigma_{X,Y}} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ Y \otimes X \quad Z \end{array} \stackrel{(3.3)}{=} \begin{array}{c} X \quad Y \quad Z \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ X \quad Y \quad Z \end{array}$$

のようにして得られる。

最後に \mathcal{C} が左リジッドである場合を考える。ここまでに見えた交差点 $\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}$ は、すべて上から下へ向かう方向に向き付けられていたが、左双対対象が存在する場合には各成分がいろいろな方向に向き付けられているようなものも考えるべきである。 V^* を V でラベル付けられた上向きの矢印で現すことに対応して、

$$\sigma_{V^*,W} = \begin{array}{c} V \quad W \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \\ V \quad W \end{array} \quad \sigma_{V,W^*} = \begin{array}{c} V \quad W \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \\ V \quad W \end{array} \quad \sigma_{V^*,W^*} = \begin{array}{c} V \quad W \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \\ V \quad W \end{array}$$

のように表すことにする。

3.3 リボン圏

まずリボン圏の定義を与えよう：

定義 3.2. 左リジッドな組みひも圏 \mathcal{C} の捻り同型 (twist) とは、自然同型 $\theta_V: V \rightarrow V$ であって

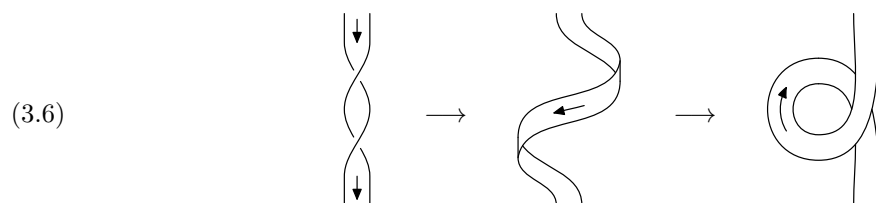
$$(3.5) \quad \theta_{V \otimes W} = \sigma_{W,V} \circ \sigma_{V,W} \circ (\theta_V \otimes \theta_W), \quad (\theta_V)^* = \theta_{V^*} \quad (V, W \in \mathcal{C})$$

を満たすようなものである。捻り同型を持つ左リジッドな組みひも圏をリボン圏 (ribbon category) と言う。

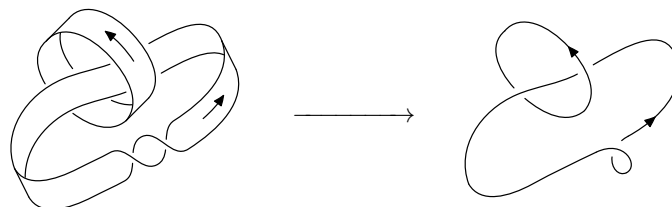
条件 (3.5) の意味を説明するために、まずリボンの数学的定義を与え、それに関して知られていることをまとめておくことにする。リボンとは、いくつかのアニュラス $A := S^1 \times [0, 1]$ を \mathbb{R}^3 に埋め込んだものである。

埋め込みのもとで $S^1 \times \{1/2\} \subset A$ に対応している部分をリボンの芯と呼ぶことにする。リボンの芯は（向き付けられていない）絡み目であるが、これに向きが与えられているとき、そのリボンは向き付けられているという。本稿では、特に断りの無い限り、向きの付いたリボンのみを考える。なお、有限個のアニュラスを埋め込んだものであるから、メビウスの輪のようなものはリボンとは呼ばないことに注意しておく。

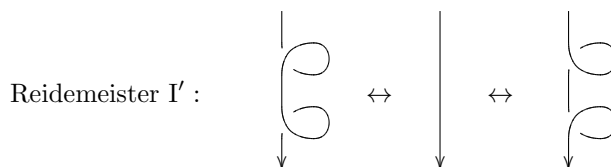
実はリボンは黒板上の枠付け (blackboard framing) などと呼ばれる方法により絡み目を表すために用いられる図式と同様なものを用いて表すことができる。その方法は、まず



ようにリボンが捻られている部分を変形し、こちら側からはリボンの片面だけが見えているようにした後で、リボンの芯の部分の絡み目図式を考えるのである（ただし図中の矢印はリボンの向きを表す）。例えば：



ライデマイスター移動 II や III で互いに変形できる絡み目図式が同じリボンを表していることは明らかであろう。一方でライデマイスター移動 I はその成分の捻り具合を変えてしまうため、リボンとしては違うものを表す図になってしまう。そこでこの変形を修正した



という変形を導入する。すると、次のことが成り立つ：2つのリボンに対し、それらが同値であるための必要十分条件は、それらを表す絡み目図式がライデマイスター移動 I', II, III の繰り返しによって互いに変形できることである。

以降 \mathcal{C} をリボン圏とする。捻り同型の幾何学的意味を説明するために、各 $V \in \mathcal{C}$ に対して

$$\text{ev}'_V = \text{ev}_V \circ \sigma_{V,V^*} \circ (\theta_V \otimes \text{id}_{V^*}), \quad \text{coev}'_V = (\text{id}_{V^*} \otimes \theta_V) \circ \sigma_{V,V^*} \circ \text{coev}_V$$

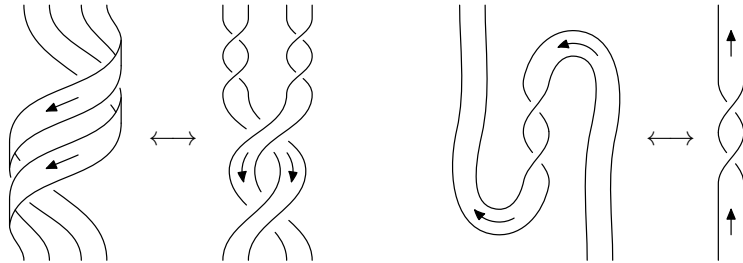
とおき、これらの射を

$$\text{ev}'_V = \text{cup} \quad \text{coev}'_V = \text{cap}$$

のように表す。このとき（証明は少し技術的になるが）次の等式が成立する：

$$(3.7) \quad \text{cup} = \theta_V = \text{cap} \quad \text{cap} = \theta_V^{-1} = \text{cup}$$

リボン圏の射を図式的に表示したものは、リボンを絡み目図式で表したものであり、捻り同型はその部分でリボンが1回捻られているものと思うと良い。すると、例えば式(3.7)の中の最初の等号は(3.6)のようなリボンの変形に対応していると思える。また(3.5)は



のような変形に対応していると思える。

3.4 絡み目不変量の構成

最終的な目標は絡み目不変量の構成であるが、先にリボン圏 \mathcal{C} の対象 $V \in \mathcal{C}$ からリボンの不変量を構成する方法について説明しておく。まず、与えられたリボン L を、先ほど述べたような方法によって絡み目図式で表し、その図式を D とする。すると D は(3.1)のような部品に分解できる。各部品が V でラベル付けられていると考えると、リボン L を表した図式 D は \mathcal{C} の射 $\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{1}$ と解釈できる。このようにして得られた射を $F_V(D) \in \text{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1})$ と書くことにする。例えば：

$$\begin{aligned}
 F_V \left(\text{Diagram of a trefoil knot} \right) &= \begin{array}{c} \text{Diagram of a trefoil knot decomposed into ribbons} \\ \hline \text{coev}_V \otimes \text{coev}_V \\ \hline \text{id}_V \otimes \sigma_{V^*,V} \otimes \text{id}_{V^*} \\ \hline \sigma_{V,V}^{-1} \otimes \text{id}_{V^*} \otimes \text{id}_{V^*} \\ \hline \text{id}_V \otimes \sigma_{V,V^*} \otimes \text{id}_{V^*} \\ \hline \text{ev}'_V \otimes \text{ev}'_V \end{array} \\
 &= (\text{ev}'_V \otimes \text{ev}'_V) \circ (\text{id}_V \otimes \sigma_{V,V^*} \otimes \text{id}_{V^*}) \circ (\sigma_{V,V}^{-1} \otimes \text{id}_{V^*} \otimes \text{id}_{V^*}) \\
 &\quad \circ (\text{id}_V \otimes \sigma_{V^*,V} \otimes \text{id}_{V^*}) \circ (\text{coev}_V \otimes \text{coev}_V).
 \end{aligned}$$

この射 $F_V(D)$ は図式 D をライデマイスター移動 II や III で変形したとしても変化しない。また、(3.7) より、ライデマイスター移動 I' で変形したとしても変化しない。そこで $\langle L \rangle_V := F_V(D)$ と書くと：

定理 3.3. $\langle L \rangle_V$ はリボン L の不変量である*1。

*1 本当は、上の議論だけでは $\langle L \rangle_V := F_V(D)$ が L の不変量であることを言うことはできない。例えば



のような、これまで図示したライデマイスター移動を紙面に対して回転させたような変形や、図式自体を回転したり、連続変形したりするようなことに関する不変性は考察から漏れている。不変性を厳密に証明するには(3.1)のような部品の間の基本関係式を完全に決定し、さらに $F_V(D)$ がその関係式に対して不変であることを述べる必要がある。興味のある読者は Turaev [Tur94] を参照されたい。そこでは各成分が \mathcal{C} の対象でラベル付けられているようなリボンを含む “ \mathcal{C} -colored ribbon graph” の圏が導入されており、さらにその圏の生成系とその間の基本関係式も完全に決定されている。基本関係式はライデマイスター移動 I', II, III に対応するものを含むが、それよりも少し多い。

リボン圏 \mathcal{C} および対象 $V \in \mathcal{C}$ に適当な条件を課せば、リボンの不変量 $\langle L \rangle_V = F_V(D)$ を修正して絡み目の不変量を構成することができる。以降、 \mathcal{C} は体 k 上の線形圏 (linear category)、すなわち $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ は k 上のベクトル空間であり、さらに射の合成とテンソル積は k -双線形であると仮定する。さらに $V \in \mathcal{C}$ は

$$(3.8) \quad \theta_V = \lambda \cdot \text{id}_V \quad (\exists \lambda \in k)$$

を満たすと仮定する。可能な限り一般的な設定にしたが、これらの仮定は、 \mathcal{C} が体 k 上で定義された代数的な何かの表現のなす圏であり、 V がその既約表現であるような場合を念頭においている。実際にそのような場合には、上の条件はシューアの補題によって保障されるであろう。

さて L を絡み目とする。その図式 D を固定し、上で定義した $F_V(D) \in \text{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1})$ を考える。この量は D に対するライデマイスター移動 II と III に対しては不変であるが、ライデマイスター移動 I に対してはそうとは限らない。ここで、便宜上

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = \text{正の交差点} \quad \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} = \text{負の交差点}$$

と呼ぶことにし、さらに

$$w(D) = (\text{図式 } D \text{ に現れる正の交差点の数}) - (\text{負の交差点の数})$$

とおく。ここで D の \downarrow となっているような部分ひとつを選び、 \downarrow のように変形した図式を D' とすると

$$F_V(D') = \lambda \cdot F_V(D), \quad w(D') = w(D) + 1$$

が成り立つ。つまり、 $F_V(D)$ も $w(D)$ もライデマイスター移動 I に関して変化してしまうが、その変化の仕方は良く似ているのである。このような観察に基づいて、これらの量を上手く組み合わせて変化を打ち消すようにしてやることができ、結果として絡み目の不変量を得ることができる：

定理 3.4. \mathcal{C} と V は上記のとおりとする。絡み目 L に対し、それを表す図式 D をひとつ選び、

$$P_V(L) := \lambda^{-w(D)} \cdot F_V(D) \in \text{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1})$$

とおくと、これは絡み目 L の不変量である。

4 組みひも圏とリボン圏の例

4.1 リボンホップ代数

まず、モノイダル圏を生み出すための非常に基本的な枠組みである、ホップ代数の概念を導入しよう。本章を通して、特に断りの無い限り、ベクトル空間やテンソル積はすべて体 k 上で考える。 H を体 k 上の代数 (ここでは単位的かつ結合的な多元環を意味する) とし、代数射 $\Delta : H \rightarrow H \otimes H$ と $\varepsilon : H \rightarrow k$ が与えられていると仮定する。簡単のため $\Delta(h) = h_{(1)} \otimes h_{(2)}$ と書くことにしよう (Sweedler notation)。このとき左 H -加群 V と W のベクトル空間としてのテンソル積 $V \otimes W$ は

$$h \cdot (v \otimes w) = h_{(1)}v \otimes h_{(2)}w \quad (h \in H, v \in V, w \in W)$$

によってまた H -加群となる。また k は ε によって左 H -加群となることにも注意せよ。任意の $h \in H$ に対し

$$\Delta(h_{(1)}) \otimes h_{(2)} = h_{(1)} \otimes \Delta(h_{(2)}), \quad \varepsilon(h_{(1)})h_{(2)} = h = \varepsilon(h_{(2)})h_{(1)}$$

が成り立つとき、 $H = (H, \Delta, \varepsilon)$ は**双代数** (bialgebra) であるという。 H が双代数であるとき、左 H -加群の圏 ${}_H\mathfrak{M}$ は k を単位対象とするモノイダル圏となる。

双代数 H の**対合射**とは、線形写像 $S : H \rightarrow H$ であって、任意の $h \in H$ に対して

$$S(h_{(1)})h_{(2)} = \varepsilon(h)1_H = h_{(1)}S(h_{(2)})$$

が成り立つようなものである。双代数 H が対合射を持つとき、**ホップ代数** (Hopf algebra) と呼ばれる。もし H がホップ代数ならば、有限次元左 H -加群の圏 ${}_H\mathfrak{M}_{fd}$ は左リジッドとなる。実際 $V \in {}_H\mathfrak{M}_{fd}$ に対し、その双対空間 $V^* := \text{Hom}_k(V, k)$ は

$$(h \cdot f)(v) = f(S(h)v) \quad (h \in H, f \in V^*, v \in V)$$

によってまた有限次元左 H -加群となるが、これが V の左双対対象になる。

さて H を双代数とし、可逆元 $R = \sum a_i \otimes b_i \in H \otimes H$ をひとつ固定する。左 H -加群 V と W に対し

$$(4.1) \quad \sigma_{V,W} : V \otimes W \rightarrow W \otimes V, \quad \sigma_{V,W}(v \otimes w) = \sum b_i w \otimes a_i v \quad (v \in V, w \in W)$$

という可逆な線形写像を考えよう。すると $\sigma = \{\sigma_{V,W}\}$ が ${}_H\mathfrak{M}$ となるための必要十分条件として

$$R \cdot (h_{(1)} \otimes h_{(2)}) \cdot R^{-1} = h_{(2)} \otimes h_{(1)} \quad (\forall h \in H), \quad (\Delta \otimes \text{id})(R) = R_{13}R_{23}, \quad (\text{id} \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}$$

が得られる (ここで $R_{12} = \sum a_i \otimes b_i \otimes 1$, $R_{13} = \sum a_i \otimes 1 \otimes b_i$, $R_{23} = \sum 1 \otimes a_i \otimes b_i$ である)。この条件を満たすような R を**普遍 R -行列** (universal R -matrix) と呼ぶ。

リボンホップ代数 (ribbon Hopf algebra) とは、普遍 R -行列 $R = \sum a_i \otimes b_i$ を持つようなホップ代数 H であって、さらに**リボン元**と呼ばれる、次の条件を満たす可逆な中心元 $\theta \in H$ を持つようなものである：

$$(4.2) \quad S(\theta) = \theta, \quad \Delta(\theta) = R_{21}R(\theta \otimes \theta) \quad (R_{21} = \sum b_i \otimes a_i).$$

このとき有限次元左 H -加群の圏 ${}_H\mathfrak{M}_{fd}$ は (4.1) で定義される組みひも構造と

$$(4.3) \quad \theta_V(v) = \theta \cdot v \quad (v \in V \in {}_H\mathfrak{M}_{fd})$$

によって定義される捻り同型によってリボン圏となる。なお条件 (4.2) は自然同型 (4.3) が条件 (3.5) を満たすことに対応しており、 H が有限次元であればこれらの条件は同値になる。

例 4.1. q を不定元とする。量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ は生成元 K, K^{-1}, E, F とその間の関係式 $KK^{-1} = 1 = K^{-1}K$, $KEK^{-1} = q^2E$, $KFK^{-1} = q^{-2}F$, $EF - FE = (q - q^{-1})^{-1}(K - K^{-1})$ で定義される $\mathbb{C}(q)$ 上の代数である。この代数は $\Delta(E) = E \otimes K + 1 \otimes E$, $\Delta(F) = F \otimes 1 + K^{-1} \otimes F$, $\Delta(K) = K \otimes K$, $\varepsilon(E) = \varepsilon(F) = 0$, $\varepsilon(K) = 1$ によって定義される双代数の構造を持ち、さらにホップ代数であることが知られている (対合射の記述は省略)。 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ は上で述べた意味ではリボンホップ代数ではないが、 $q = e^{h/2}$ なるパラメータ h に関して完備化された空間の中に普遍 R -行列やリボン元と呼んでよいものが存在する。有限次元加群の上ではこれらの元の作用は well-defined であり、有限次元左 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -加群の圏はリボン圏となる。自然表現と呼ばれる 2 次元の既約表現をとり、それを用いて第 3 章で紹介した方法によって絡み目不変量を構成すると、ジョーンズ多項式が得られる。

例 4.2. 超 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(1|1)$ の量子化 $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$ は有る意味で『リボンホップ超代数』であり、その有限次元表現の圏はリボン圏となる。第 3 章で紹介した方法を $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$ の有限次元既約表現にそのまま適用すると、どんな絡み目に対してもゼロになってしまう役に立たない不変量が出てしまうが、少し工夫することで意味のある量を取り出せる。その方法を $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$ の自然表現に対して適用すると、アレクサンダー多項式を得ることができる。文献 [Sar14] では、この事実が self-contained に解説されている。

4.2 リボンホップ代数の構成法

例 4.1 や例 4.2 は、長い間研究されてきた由緒正しい絡み目不変量に対して統一的な説明を与えるものであり、非常に重要な例であると言わざるを得ない。しかしながら、ある種の完備化操作が必要になるなど、その取り扱いが技術的に面倒である。ここでは、実際に手にとって遊んでみることができそうな、手ごろな大きさの有限次元リボンホップ代数を紹介したい。

中心構成. まず与えられたモノイダル圏 \mathcal{C} に対して定義される、 \mathcal{C} の中心と呼ばれる組みひも圏 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ を紹介しよう。その対象は \mathcal{C} の対象 V と自然同型 $e_X : X \otimes V \rightarrow V \otimes X$ ($X \in \mathcal{C}$) の組 (V, e) であって

$$e(X \otimes Y) = (\text{id}_X \otimes e_Y) \circ (e_X \otimes \text{id}_Y) \quad (X, Y \in \mathcal{C})$$

となるようなものである (cf. (3.2))。圏 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ の射 $f : (V, e) \rightarrow (W, e')$ は、 \mathcal{C} の射 $f : V \rightarrow W$ であって e や e' と整合的なものであり、そのような射の合成は \mathcal{C} における射の合成によって定義される。この圏におけるテンソル積は、対象の間では

$$(V, e) \otimes (W, e') := (V \otimes W, \tilde{e}), \quad \tilde{e}(X) = (\text{id}_V \otimes e'_X) \circ (e_X \otimes \text{id}_W) \quad (X \in \mathcal{C})$$

によって定義され、射に対しては \mathcal{C} の射のテンソル積によって定義される。以上によって $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ はモノイダル圏となるが、このモノイダル圏は $\sigma_{(V, e), (W, e')} = e'_V$ によって定義される組みひも構造を持つ。

与えられたモノイダル圏の中心を決定するのは、一般には難しい。一方で複雑なモノイダル圏の中心が複雑な組みひも圏になるとは限らない。例えば k -代数 R に対する両側 R -加群のなすモノイダル圏の中心は \mathbf{Vec} と (組みひも圏として) 同値になってしまうという著しい結果がある (Schauenburg [Sch01a])。

Drinfeld double. 次に \mathcal{C} がある有限次元ホップ代数の表現圏であるような場合を考えよう。有限次元ホップ代数 H に対し、その Drinfeld double と呼ばれる有限次元ホップ代数 $D(H)$ が、ベクトル空間 $H^* \otimes H$ の上に明示的に構造を定義することにより構成される。 $D(H)$ は標準的な普遍 R -行列を持ち、さらに ${}_{D(H)}\mathfrak{M}$ の中心は ${}_{D(H)}\mathfrak{M}$ と (組みひも圏として) 同型である。一般にはそうとは限らないが、多くの場合に $D(H)$ はリボンホップ代数となる。

例 4.3. 例 4.1 では q を不定元としたが、 $q \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1\}$ である場合にも同様のホップ代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ を考えることができる。 $q \in \mathbb{C}$ を 1 の原始 N 乗根 (ただし $N > 1$ は奇数) とし、 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の商代数

$$\bar{U}_q := U_q(\mathfrak{sl}_2) / (K^N - 1, E^N, F^N)$$

を考える。イデアル $(K^N - 1, E^N, F^N)$ はホップイデアルであり、従って \bar{U}_q は $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の商としてホップ代数となる。これが有限次元であることは明らかであろう。ここで K と E によって生成される \bar{U}_q の部分代数 A を考えよう。これは \bar{U}_q の部分ホップ代数である。実は $D(A)$ はリボンホップ代数の構造を持ち、さらにホップ代数の全射 $D(A) \twoheadrightarrow \bar{U}_q$ が存在する。この事実を用いることで \bar{U}_q の普遍 R -行列とリボン元を明示的に与えることができる。この方針に従った計算は [Kas95] の IX.6 および XIV.6 に詳しく書かれている。

例 4.4. 本稿のはじめで『ホップ代数の代数的な性質がトポロジーの言葉でどのように理解できるか』という問題について興味を持っていると述べた。最後に少しだけ、この方面での最近の結果を紹介したい。以降、基礎体 k は標数 0 の代数閉体であると仮定する。このとき有限次元半単純ホップ代数 H の Drinfeld double $D(H)$ はリボンホップ代数となる。 $D(H)$ から良い絡み目不変量が得られるのかどうかははっきり言って良く分からないが、最近、関西大学の和久井氏との共同研究 [SW13] において次のような興味深い結果が得られた。まず $D(H)$ は『シュレディンガー表現』[Maj95, §9.3] と呼ばれる特別な表現 V を持つのだが、この表現は条件 (3.8) を満たしている。従って V から絡み目不変量を作ることができるが、これについて

$$P_V \left(\text{Diagram of two overlapping circles with arrows} \right) = \dim_k(H) \times (H \text{ の既約表現の数})$$

が成り立つ。つまり、絡み目不変量として既約表現の数という完全に代数的な量が現れるのである。このような現象の背後に何があるのか興味は尽きないが、今のところ良くわかってはいない。

参考文献

- [AFS09] N. Andruskiewitsch and W. Ferrer Santos. The beginnings of the theory of Hopf algebras. *Acta Appl. Math.*, 108(1):3–17, 2009.
- [BK01] B. Bakalov and A. Kirillov, Jr. *Lectures on tensor categories and modular functors*, volume 21 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [Kas95] C. Kassel. *Quantum groups*, volume 155 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [KL01] T. Kerler and V. V. Lyubashenko. *Non-semisimple topological quantum field theories for 3-manifolds with corners*, volume 1765 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [Maj95] S. Majid. *Foundations of quantum group theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [ML98] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.
- [Sar14] A. Sartori. The Alexander polynomial as quantum invariant of links. *Arkiv för Matematik*, 2014.
- [Sch01a] P. Schauenburg. The monoidal center construction and bimodules. *J. Pure Appl. Algebra*, 158(2-3):325–346, 2001.
- [Sch01b] P. Schauenburg. Turning monoidal categories into strict ones. *New York J. Math.*, 7:257–265 (electronic), 2001.
- [SW13] K. Shimizu and M. Wakui. Schrödinger representations from the viewpoint of monoidal categories. [arXiv:1312:5037](https://arxiv.org/abs/1312.5037).
- [Tur94] V. G. Turaev. *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, volume 18 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.