

# レース展開の発展と展望

北海道大学創成研究機構

坂井 哲

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~sakai/>

平成 22 年 7 月 27 日 @信州数理物理セミナー

平成 22 年 7 月 28 日 @北大DCSセミナー

動機 格子上の統計力学モデルの臨界現象<sup>1</sup>を「数学的に厳密に<sup>2</sup>」解析したい。

証明された事実 (1985 ~) レース展開を用いると、それぞれのモデルに依存した上部臨界次元  $d_c$  より高次元では、臨界指数の値が平均場理論での値に退化。

レース展開の方法が上手くいった主な例 自己回避歩行 (self-avoiding walk), パーコレーション, 格子木や格子動物 (lattice trees / lattice animals), コンタクトプロセス, イジング模型,  $\varphi^4$  模型 (現在進行中の研究)。

今日の話題 レース展開とは何か? どうやって使うか / どうなっていたら使えるか? 今後の展望は?

## 1 モデルの紹介

レース展開を説明するために、代表例として自己回避歩行と有向パーコレーションを紹介する。

### 1.1 自己回避歩行 (SAW)

- 線形高分子のスタンダードな統計力学モデル。
- マルコフ的でない、確率過程ですらない。したがって、マルチンゲール理論などの強力な手法が使えない。

記号の導入 話を簡単にするため、 $\mathbb{Z}^d$  上のランダムウォーク (RW) の推移確率を

$$D(u, v) := \begin{cases} \frac{1}{2d} & (|u - v| = 1 \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

と定義する。さらに、 $\mathbb{Z}^d$  上の点列 (path)  $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$  と  $p \geq 0$  に対して、

$$P_p(\omega) := \begin{cases} p^n \prod_{j=1}^n D(\omega_{j-1}, \omega_j) & (n \geq 1 \text{ のとき}), \\ \delta_{\omega_0, \omega_n} & (n = 0 \text{ のとき}), \end{cases}$$

<sup>1</sup> 「強く相互作用し合った確率変数系の協力現象」と言えよう。

<sup>2</sup> 物理では摂動展開や平均場理論などの近似で分かったような気になっている。

とする．これらを用いて， $\mathbb{Z}^d$  の原点  $o$  から  $x \in \mathbb{Z}^d$  への 2 点関数を

$$G_p(o, x) := \sum_{\omega: o \rightarrow x} P_p(\omega) \exp\left(-g \sum_{0 \leq i < j \leq |\omega|} \delta_{\omega_i, \omega_j}\right), \quad (1.1)$$

と定義する． $|\omega|$  は  $\omega$  の「長さ」．

$$\begin{cases} g = 0 & \Rightarrow \text{RW,} \\ g \in (0, \infty) & \Rightarrow \text{weakly SAW,} \\ g = \infty & \Rightarrow \text{strictly SAW.} \end{cases}$$

興味のある物理量

- 帯磁率：  $\chi_p := \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} G_p(o, x)$ .
- 臨界点：  $p_c := \sup\{p \geq 0 : \chi_p < \infty\}$ .
- 平均 2 乗距離：  $\xi_p := \sqrt{\frac{1}{\chi_p} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} |x|^2 G_p(o, x)}$ .

臨界現象

$$\chi_p \underset{p \uparrow p_c}{\approx} (p_c - p)^{-\gamma}, \quad \xi_p \underset{p \uparrow p_c}{\approx} (p_c - p)^{-\nu}, \quad G_{p_c}(o, x) \underset{|x| \uparrow \infty}{\approx} |x|^{-(d-2+\eta)}.$$

臨界指数  $\gamma, \nu, \eta$  が存在すれば，「スケーリング仮説」の下で Fisher の関係式  $\gamma = \nu(2 - \eta)$  が成り立つ．

RW の場合 ( $g = 0$ )

$$S_p(o, x) := \sum_{\omega: o \rightarrow x} P_p(\omega) = \delta_{o, x} + \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} p D(o, y) S_p(y, x). \quad (1.2)$$

$$\Rightarrow \hat{S}_p(k) := \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{ik \cdot x} S_p(o, x) = \frac{1}{1 - p \hat{D}(k)} \quad (k \in [-\pi, \pi]^d, p < 1).$$

以上により， $p_c = 1$ ， $\gamma = 1$ ， $\nu = \frac{1}{2}$  は簡単に分かって， $\eta = 0$  も計算すれば出てくる．

SAW について知られていること，信じられていること

- $p_c$  の値は次元  $d \geq 1$  や  $g > 0$  の値，格子の形状<sup>3</sup>（や  $D$  の細かい定義<sup>4</sup>）に依存して変わる．その値は一般には分からないが，2 次元六角格子上の strictly SAW では  $p_c = \frac{3}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} > 1$  であることが最近証明されたらしい [7]．

<sup>3</sup>等方的で並進対称性はあるものとする．

<sup>4</sup>等方的で分散  $\sigma^2 := \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} |x|^2 D(o, x)$  は有限だとする．

- 他方, 臨界指数の値は次元  $d \geq 1$  や空間の対称性には依存しても,  $g > 0$  の値や格子の形状にはよらないと思われる. これを物理では「臨界指数の普遍性」とよぶ.
- $d = 1$  の場合.  $g = \infty$  の最近接モデルならば  $G_p(o, x) = \left(\frac{p}{2}\right)^{|x|}$  なので,  $p_c = 2$ ,  $\gamma = \nu = \eta = 1$  は明らか.  $g \in (0, \infty)$  の場合はそれ程自明ではないが, 臨界指数の値は  $g = \infty$  の場合と同じことが証明されている [9, 14, 18].
- $d = 2$  の場合. 今のところ, スケーリング極限の存在は証明されていない. しかし, もしスケーリング極限があったとして, それが共形不変であれば, それはパラメータ  $\frac{8}{3}$  の Schramm-Loewner 発展方程式 (SLE $_{8/3}$ ) に従はずだということは証明されている [19]. SLE $_{8/3}$  を用いると,  $\gamma = \frac{43}{32}$  や  $\nu = \frac{3}{4}$  が導出されることも分かっている.
- $d = 3$  の場合. 臨界指数の存在性は証明されていない. もし存在するなら,  $\gamma \doteq 1.15756$ ,  $\nu \doteq 0.5875977$  と数値計算により評価されている [4, 6]. 後者は Flory の平均場理論 [8] による予想値  $\nu = \frac{3}{d+2} = 0.6$  とかなり離れている.
- $d = 4$  の場合. 厳密な繰り込み群解析により,  $g > 0$  が十分小さい weakly SAW では  $\eta = 0$  となることが報告されている [2].  $\mathbb{Z}^4$  ではなく 4 次元階層格子上の weakly SAW でも  $\eta = 0$  が得られている [1] が,  $\gamma$  や  $\nu$  に対しては,

$$\chi_p \underset{p \uparrow p_c}{\approx} \frac{|\log(p_c - p)|^{1/4}}{p_c - p},$$

のように RW の振る舞いに対数補正がつくことが報告されている [27].

- $d > 4$  の場合.  $g > 0$  の値 (や  $D$  の細かい定義) にはよらず, RW のように振る舞う (すなわち,  $\gamma = 1$ ,  $\nu = \frac{1}{2}$ ,  $\eta = 0$ ) ことがレース展開により証明されている [3, 10, 11, 12, 13].

## 1.2 有向パーコレーション (oriented percolation)

- その名のとおり, パーコレーションに異方性が入ったモデル.
- 伝染病伝搬を表現する離散時間モデル. 連続時間版はコンタクトプロセス.

モデルの定義  $x \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_+$  に対して, その空間成分を  $\vec{x} \in \mathbb{Z}^d$ , 時間成分を  $\tau_x \in \mathbb{Z}_+$  と表わす.

$$x = (\vec{x}, \tau_x) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_+.$$

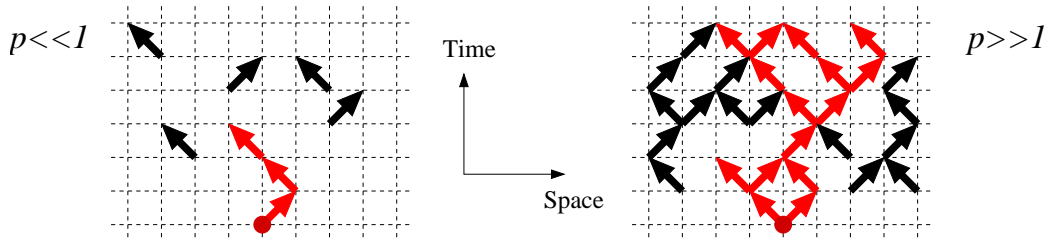
$u, v \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_+$  の有向ペアで  $\tau_v = \tau_u + 1$  となっているものを  $[u, v]$  と書いてボンドと呼ぶ. 各ボンド  $[u, v]$  は他のボンドとは独立に

$$[u, v] \text{ は } \begin{cases} \text{開いている (確率 } p(u, v) \text{ で),} \\ \text{閉じている (確率 } 1 - p(u, v) \text{ で).} \end{cases}$$

話を簡単にするため,  $\mathbb{Z}^d$  上の RW の推移確率  $D$  を使って

$$p(u, v) = pD(\vec{u}, \vec{v}) \delta_{\tau_v, \tau_u + 1},$$

と定義し, この変数系の 1 パラメータ確率測度を  $\mathbb{P}_p$  と表わす.



$\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_+$  の原点  $o$  から  $x \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_+$  への 2 点関数を

$$\begin{aligned} \phi_p(o, x) &:= \mathbb{P}_p(o \rightarrow x) \\ &\equiv \begin{cases} \mathbb{P}_p\left(\bigcup_{\omega: o \rightarrow x} \{[\omega_0, \omega_1], \dots, [\omega_{\tau_x-1}, \omega_{\tau_x}] \text{ は全て開}\}\right) & (\tau_x > 0 \text{ のとき}), \\ \delta_{o,x} & (\tau_x \leq 0 \text{ のとき}), \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3)$$

と定義する .

興味のある物理量

- 時刻  $t$  における生存確率 :  $\theta_p(t) := \mathbb{P}_p\left(\bigcup_{\vec{x} \in \mathbb{Z}^d} \{o \rightarrow (\vec{x}, t)\}\right)$ .
- 時刻  $t$  における感染者数の期待値 :  $\Phi_p(t) := \sum_{\vec{x} \in \mathbb{Z}^d} \phi_p(o, (\vec{x}, t))$ .
- 帯磁率 (むしろ「帯病率」と呼ぶべきか...):  $\chi_p := \sum_{t=0}^{\infty} \Phi_p(t)$ .
- 臨界点 :  $p_c := \inf\{p \geq 0 : \theta_p(\infty) > 0\} = \sup\{p \geq 0 : \chi_p < \infty\}$ .
- 時刻  $t$  における平均 2 乗距離 :  $\xi_p(t) := \sqrt{\frac{1}{\Phi_p(t)} \sum_{\vec{x} \in \mathbb{Z}^d} |\vec{x}|^2 \phi_p(o, (\vec{x}, t))}$ .

臨界現象

$$\begin{aligned} \Phi_{p_c}(t) &\underset{t \uparrow \infty}{\approx} t^\eta, & \xi_{p_c}(t) &\underset{t \uparrow \infty}{\approx} t^\nu, & \theta_{p_c}(t) &\underset{t \uparrow \infty}{\approx} t^{-\rho}. \\ \chi_p &\underset{p \uparrow p_c}{\approx} (p_c - p)^{-\gamma}, & \theta_p(\infty) &\underset{p \downarrow p_c}{\approx} (p - p_c)^\beta. \end{aligned}$$

OP について知られていること, 信じられていること

- SAW の場合と同様, 次元  $d \geq 1$  や空間の対称性が与えられても (格子の形状や  $D$  の細かい定義のせいで)  $p_c$  の値は一意に決まらないが, 臨界指数の値は決まってしまうという「臨界指数の普遍性」が信じられている .
- 臨界指数の存在性を証明する一般論 (言い換えれば「全ての次元で通用する証明法」) は今のところない . しかし, もし存在するなら, それらの間にはハイパースケール不等式  $dv \geq \eta + 2\rho$  や  $(dv + 1)\zeta \geq \gamma + 2\beta$  ( $\zeta$  は緩和時間の臨界指数) が成り立つことは証明されている [24] .

- $d > 4$  のとき,  $D$  の台が十分大きければ, 臨界指数が平均場理論 (OP の平均場モデルは分岐ランダムウォーク) の値  $\eta = 0, \nu = \frac{1}{2}, \rho = \gamma = \beta = \zeta = 1$  に退化することが証明されている [5, 15, 16, 17, 20, 21]. 最近接モデルの場合,  $D$  の台は  $2d$  個の隣接点から成るので, これは次元  $d$  が十分大きいことを要求している.  $D$  の台が一辺  $L$  の  $d$  次元超立方体であれば,  $D$  の台は大体  $L^d$  個の点から成るので,  $d$  の代わりに  $L$  を十分大きく取れば良い. 普遍性を信じれば, 臨界指数の値は  $L$  にはよらないと考えられる.
- 逆に, 平均場理論の値をハイパースケーリング不等式に代入すると,  $d \geq 4$  を得る. これは  $d_c = 4$  である (すなわち,  $d < 4$  では平均場理論の値を取らない臨界指数が少なくとも一つは存在する) ことを示している.
- $d < 4$  のとき, ハイパースケーリング不等式は等式に退化すると信じられている. 実際, 数値計算の結果 [22]

$$\eta \doteq \begin{cases} 0.313687 & (d=1), \\ 0.230 & (d=2), \\ 0.12 & (d=3), \end{cases} \quad \nu \doteq \begin{cases} 0.632613 & (d=1), \\ 0.567 & (d=2), \\ 0.53 & (d=3), \end{cases} \quad \rho \doteq \begin{cases} 0.159465 & (d=1), \\ 0.451 & (d=2), \\ 0.73 & (d=3), \end{cases}$$

を  $d\nu \geq \eta + 2\rho$  に代入すると, 確かに等式が成立しているように見える.

## 2 レース展開の手法

### 2.1 レース展開とは?

RW の 2 点関数が満たす再生方程式 (1.2) と似た構造を抽出したもの. 各モデルに依存した関数  $\Pi_p$  (SAW なら  $\Pi_p^{\text{SAW}}$ , OP なら  $\Pi_p^{\text{OP}}$ ) があって, その収束性などを問わなければ, 形式的に

$$G_p(o, x) = \delta_{o,x} + \sum_{v \in \mathbb{Z}^d} \left( pD(o, v) + \Pi_p^{\text{SAW}}(o, v) \right) G_p(v, x) \quad (o, x \in \mathbb{Z}^d), \quad (2.1)$$

$$\phi_p(o, x) = \Pi_p^{\text{OP}}(o, x) + \sum_{u, v \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_+} \Pi_p^{\text{OP}}(o, u) p(u, v) \phi_p(v, x) \quad (o, x \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_+). \quad (2.2)$$

と書ける.  $\Pi_p$  の表現は「導出」のところで見せます.

### 2.2 レース展開の解析

考えている物理系に並進対称性を仮定すると, 再生方程式の解析にはフーリエ解析の相性が良い.

$$\hat{G}_p(k) \equiv \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{ik \cdot x} G_p(o, x) = \frac{1}{1 - p\hat{D}(k) - \hat{\Pi}_p^{\text{SAW}}(k)} \quad (k \in [-\pi, \pi]^{-d}), \quad (2.3)$$

$$\hat{\phi}_p(k) := \sum_{x \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_+} e^{ik \cdot x} \phi_p(o, x) = \frac{\hat{\Pi}_p^{\text{OP}}(k)}{1 - \hat{\Pi}_p^{\text{OP}}(k) \hat{p}(k)} \quad (k \in [-\pi, \pi]^{d+1}). \quad (2.4)$$

今の場合,  $p(u, v) = pD(\vec{u}, \vec{v}) \delta_{\tau_v, \tau_u+1}$  で  $D(\vec{u}, \vec{v}) = D(\vec{o}, \vec{v} - \vec{u})$  なので,

$$\hat{p}(k) \equiv \hat{p}(\vec{k}, \kappa) = p\hat{D}(\vec{k}) e^{i\kappa} \quad (\vec{k} \in [-\pi, \pi]^d, \kappa \in [-\pi, \pi]).$$

臨界点 帯磁率  $\chi_p$  はそれぞれ  $\hat{G}_p(0)$  と  $\hat{\phi}_p(0)$  なので，形式的に

$$\chi_p^{\text{SAW}} = \frac{1}{1 - p - \hat{\Pi}_p^{\text{SAW}}(0)}, \quad \chi_p^{\text{OP}} = \frac{\hat{\Pi}_p^{\text{OP}}(0)}{1 - \hat{\Pi}_p^{\text{OP}}(0)p},$$

と書ける．もし  $\hat{\Pi}_p(0)$  が  $p < p_c$  について有界，かつ  $\hat{\Pi}_{p_c}(0) = \lim_{p \uparrow p_c} \hat{\Pi}_p(0)$  ならば，

$$p_c^{\text{SAW}} = 1 - \hat{\Pi}_{p_c}^{\text{SAW}}(0), \quad p_c^{\text{OP}} = \hat{\Pi}_{p_c}^{\text{OP}}(0)^{-1}, \quad (2.5)$$

が得られる．

臨界指数  $\gamma$  上述の臨界点の表現を利用すれば，

$$\chi_p^{\text{SAW}} = \frac{1}{p_c^{\text{SAW}} - p} \left( 1 + \frac{\hat{\Pi}_{p_c}^{\text{SAW}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{SAW}}(0)}{p_c^{\text{SAW}} - p} \right)^{-1},$$

$$\chi_p^{\text{OP}} = \frac{1}{p_c^{\text{OP}} - p} \left( 1 + \frac{p_c^{\text{OP}}}{\hat{\Pi}_p^{\text{OP}}(0)} \frac{\hat{\Pi}_{p_c}^{\text{OP}}(0) - \hat{\Pi}_p^{\text{OP}}(0)}{p_c^{\text{OP}} - p} \right)^{-1},$$

が得られる．もし  $\frac{\hat{\Pi}_{p_c}(0) - \hat{\Pi}_p(0)}{p_c - p}$  も  $p < p_c$  について有界 ならば， $\gamma = 1$  が得られる．

## 2.3 レース展開の導出

### 2.3.1 SAW の場合

SAW のレース展開 (2.1) に現れる展開係数  $\Pi_p^{\text{SAW}}$  は，

$$\Pi_p^{\text{SAW}}(o, x) = - \text{loop}(o, x) + \text{circle}(o, x) - \text{triangle}(o, x) + \dots$$

意味と導出は黒板で！

### 2.3.2 OP の場合

OP のレース展開 (2.2) に現れる展開係数  $\Pi_p^{\text{OP}}$  は，

$$\Pi_p^{\text{OP}}(o, x) = \text{loop}(o, x) - \text{figure-eight}(o, x) + \left( \text{figure-eight}(o, x) \cup \text{figure-eight}(o, x) \right) - \dots$$

ただし，時間軸は上方向 ( $o$  から  $x$  の方向) を向いているものとし，それによって各ダイアグラムに含まれている線には向きが付いているものと解釈する．講演では意味だけ説明し，時間が余ったときに限り導出も見せます．

### 3 今後の展望

幾つか発展の方向が考えられる．

- 今までの解析で未だ完全には汲みつくしていない情報を引き出したい．例えば， $p < p_c$  における 2 点関数の Ornstein-Zernike 的な振る舞いの導出など．
- レース展開を使って  $d = d_c$  直上の臨界現象を調べることができるか？ そのための手法を確立したい．例えば，長さ  $T < \infty$  の記憶しか持たない SAW はマルコフ的となり，したがって RW のような振る舞いを示すことになるが，それが  $T \uparrow \infty$  極限で安定かどうか考えたい．
- 他のモデルで (2.1)–(2.2) のような再生方程式を抽出し，高次元での平均場臨界現象を厳密に証明したい．例えば，パラメター  $q \in (1, 2)$  のランダムクラスター模型について考え，パーコレーション ( $q = 1$  に相当) からイジング模型 ( $q = 2$  に相当) へのクロスオーバーがどのようにして起こるのか調べたい．
- 系の並進対称性を仮定しないレース展開の解析手法を確立したい．レース展開 (2.1)–(2.2) の導出自体には並進対称性は必要なかったが，それを解析するときに従来の方法では並進対称性を陽に使っていた．もし並進対称性を使わずに解析する方法を確立できれば，推移確率やボンド占有確率がランダムな系に対する議論も出来るようになるはず．

### 参考文献

- [1] D.C. Brydges, S.N. Evans and J.Z. Imbrie. Self-avoiding walk on a hierarchical lattice in four dimensions. *Ann. Probab.* **20** (1992): 82–124.
- [2] D.C. Brydges, J.Z. Imbrie and G. Slade. Functional integral representations for self-avoiding walk. *Probab. Surveys* **6** (2009): 34–61.
- [3] D.C. Brydges and T. Spencer. Self-avoiding walk in 5 or more dimensions. *Comm. Math. Phys.* **97** (1985): 125–148.
- [4] S. Caracciolo, M.S. Causo and A. Pelissetto. High-precision determination of the critical exponent  $\gamma$  for self-avoiding walks. *Phys. Rev. E* **57** (1998): 1215–1218.
- [5] L.-C. Chen and A. Sakai. Critical behavior and the limit distribution for long-range oriented percolation. I. *Probab. Theory Relat. Fields* **142** (2008): 151–188.
- [6] N. Clisby. Accurate estimate of the critical exponent  $\nu$  for self-avoiding walks via a fast implementation of the pivot algorithm. *Phys. Rev. Lett.* **104** (2010): 055702.
- [7] H. Duminil-Copin and S. Smirnov. Large-time asymptotics of the gyration radius for long-range statistical-mechanical models. Preprint, arXiv:1007.0575 (2010).
- [8] P.J. Flory. The configuration of a real polymer chain. *J. Chem. Phys.* **17** (1949): 303–310.
- [9] A. Greven and F. den Hollander. A variational characterization of the speed of a one-dimensional self-repellent random walk. *Ann. Appl. Probab.* **3** (1993): 1067–1099.
- [10] T. Hara. Decay of correlations in nearest-neighbor self-avoiding walk, percolation, lattice trees and animals. *Ann. Probab.* **36** (2008): 530–593.

- [11] T. Hara, R. van der Hofstad and G. Slade. Critical two-point functions and the lace expansion for spread-out high-dimensional percolation and related models. *Ann. Probab.* **31** (2003): 349–408.
- [12] T. Hara and G. Slade. Self-avoiding walk in five or more dimensions. I. The critical behaviour. *Comm. Math. Phys.* **147** (1992): 101–136.
- [13] T. Hara and G. Slade. The lace expansion for self-avoiding walk in five or more dimensions. *Rev. Math. Phys.* **4** (1992): 235–327.
- [14] R. van der Hofstad. The lace expansion approach to ballistic behaviour for one-dimensional weakly self-avoiding walk. *Probab. Theory Relat. Fields* **119** (2001): 311–349.
- [15] R. van der Hofstad, F. den Hollander and G. Slade. The survival probability for critical spread-out oriented percolation above  $4 + 1$  dimensions. I. Induction. *Probab. Theory Relat. Fields* **138** (2007): 363–389.
- [16] R. van der Hofstad, F. den Hollander and G. Slade. The survival probability for critical spread-out oriented percolation above  $4 + 1$  dimensions. II. Expansion. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **43** (2007): 509–570.
- [17] R. van der Hofstad and G. Slade. A generalised inductive approach to the lace expansion. *Probab. Theory Relat. Fields* **122** (2002): 389–430.
- [18] W. König. A central limit theorem for a one-dimensional polymer measure. *Ann. Probab.* **24** (1996): 1012–1035.
- [19] G.F. Lawler, O. Schramm and W. Werner. On the scaling limit of planar self-avoiding walk. *Proc. Symposia Pure Math.* **72** (2004): 339–364.
- [20] B.G. Nguyen and W.-S. Yang. Triangle condition for oriented percolation in high dimensions. *Ann. Probab.* **21** (1993): 1809–1844.
- [21] B.G. Nguyen and W.-S. Yang. Gaussian limit for critical oriented percolation in high dimensions. *J. Stat. Phys.* **78** (1995): 841–876.
- [22] G. Ódor. Universality classes in nonequilibrium lattice systems. *Rev. Mod. Phys.* **76** (2004): 663–724.
- [23] A. Sakai. Mean-field critical behavior for the contact process. *J. Stat. Phys.* **104** (2001): 111–143.
- [24] A. Sakai. Hyperscaling inequalities for the contact process and oriented percolation. *J. Stat. Phys.* **106** (2002): 201–211.
- [25] A. Sakai. Lace expansion for the Ising model. *Comm. Math. Phys.* **272** (2007): 283–344.
- [26] G. Slade. The lace expansion and its applications. *Lecture Notes in Math.* **1879** (2006).
- [27] G. Slade. The self-avoiding walk: a brief survey. In *Surveys in Stochastic Processes* (eds., J. Blath, P. Imkeller and S. Roelly). EMS Series of Congress Reports (2010).