

グラフに退化する領域上の ラプラシアンの特異極限

黒田 紘敏 (東北大学)

信州数理物理セミナー

信州大学 松本キャンパス

2010年9月27日

0. Problem

Figure1のような \mathbb{R}^n 内の領域 Ω_ε (tube部分の半径が ε) がFigure2のようなグラフ G に $\varepsilon \rightarrow 0$ で収束する場合を考える。

このとき, Ω_ε 上のある境界条件 B を備えたラプラシアン

$$-\Delta_{\Omega_\varepsilon} = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad \text{with } Bu = 0 \text{ on } \partial\Omega_\varepsilon$$

について, $\varepsilon \rightarrow 0$ とする際に起こる現象について考察する。境界条件は例えば

$$B = 1 \text{ (Dirichlet, } -\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D), \quad B = \frac{\partial}{\partial \nu} \text{ (Neumann, } -\Delta_{\Omega_\varepsilon}^N), \text{ mixed, } \dots$$

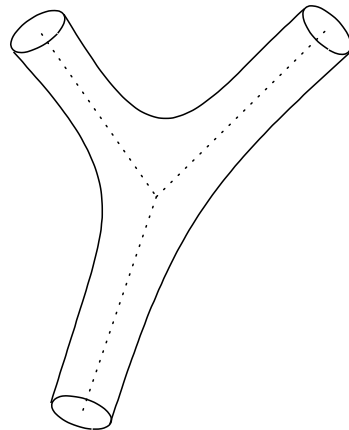


Figure1

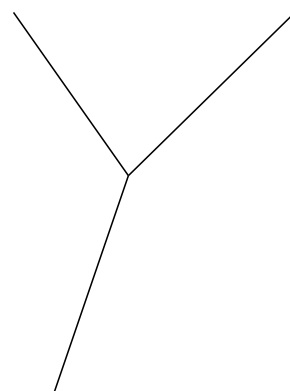


Figure2

0. Problem

例えば

- ・ (ある適切な f の仮定の下での) 非線形放物型方程式

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon = f(u^\varepsilon) & \text{in } (0, T) \times \Omega_\varepsilon \\ u^\varepsilon(t, x) = g^\varepsilon(x) & \text{on } (0, T) \times \Gamma_\varepsilon \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{on } (0, T) \times \Sigma_\varepsilon \\ u^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon & \text{in } \Omega_\varepsilon \end{cases}$$

の解 $u^\varepsilon(t, x)$ について, $\varepsilon \rightarrow 0$ での u^ε の極限の様子を調べる.

- ・ スペクトル $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^B)$, レゾルベント $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^B - z)^{-1}$ を調べる.

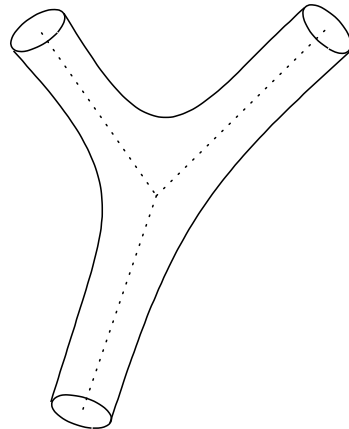


Figure1

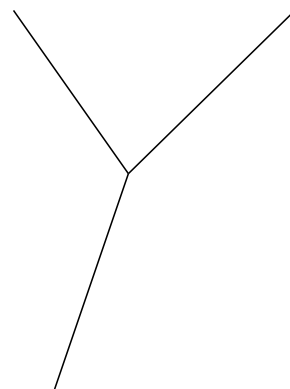


Figure2

Contents

1. 量子グラフ
2. 楕円型作用素に関する既知の結果の紹介
3. 放物型方程式の解の収束
4. 新しい課題

1.1 Metric graph

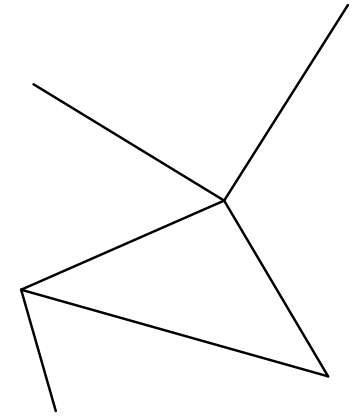
$G = (V, E)$: 有限グラフ

$V = \{v_i\}_{i \in I}$: 頂点集合 ($|I| < +\infty$)

$E = \{e_j\}_{j \in J}$: 辺集合 ($|J| < +\infty$)

各 $e \in E$ に対して, 長さ $l_e \in (0, +\infty]$ が定まっている.

(i.e. $e \simeq [0, l_e] = \{s \in \mathbb{R} \mid 0 \leq s \leq l_e\}$)



$$L^2(G) := \{f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid f_e := f|_e \in L^2(e) \ (e \in E)\}$$

$$\|f\|_{L^2(G)}^2 := \sum_{e \in E} \|f_e\|_{L^2(e)}^2$$

1.2 Examples of Hamiltonian

グラフ G 上に自己共役作用素

$$H = -\frac{d^2}{ds^2} \quad \text{with boundary condition on each vertex}$$

を与える．このような G を量子グラフという．

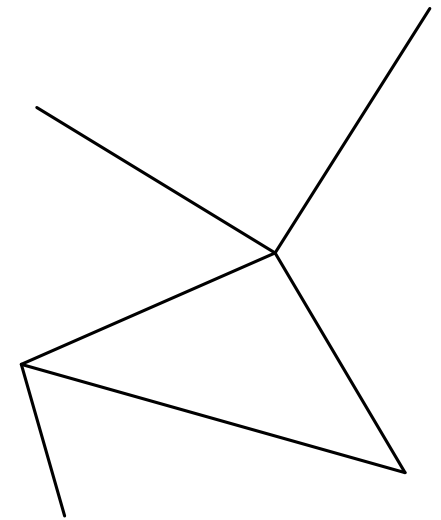
ex1 (Dirichlet condition)

$$D(H) = \{\psi \in H^2(G) \mid \psi(v) = 0 \ (v \in V)\}$$

$$\Rightarrow \sigma(H) = \left\{ \frac{n^2 \pi^2}{l_e^2} ; e \in E, n \in \mathbb{N} \right\}$$

ex2 (Neumann condition)

$$\psi'(v) = 0 \quad (v \in V)$$



1.2 Examples of Hamiltonian

グラフ G 上に自己共役作用素

$$H = -\frac{d^2}{ds^2} \quad \text{with boundary condition on each vertex}$$

を与える .

ex3 (Kirchhoff condition)

$$\psi \in C(G), \quad \sum_{e \in E_v} \frac{d\psi_e}{ds}(v) = 0 \quad (v \in V)$$

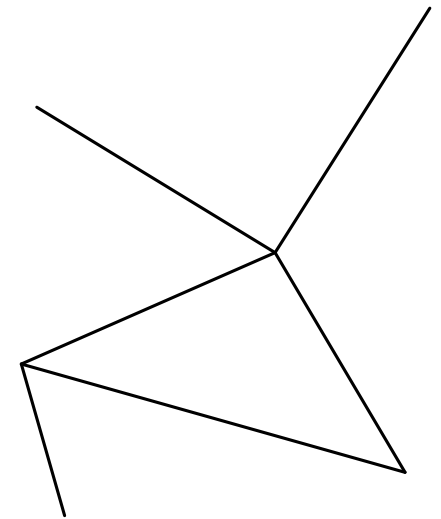
ここで , E_v は v を端点にもつ辺全体の集合とする .

(約束) $\frac{d\psi_e}{ds}(v)$ は v から離れる方向の微分を表す .

つまり $e \simeq [0, l_e]$ というパラメータづけにおいて

$$v \text{ が } s = 0 \text{ に対応} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\psi_e}{ds}(v) = \psi'_e(0)$$

$$v \text{ が } s = l_e \text{ に対応} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\psi_e}{ds}(v) = -\psi'_e(l_e)$$



1.2 Examples of Hamiltonian

グラフ G 上に自己共役作用素

$$H = -\frac{d^2}{ds^2} \quad \text{with boundary condition on each vertex}$$

を与える .

ex3 (Kirchhoff condition)

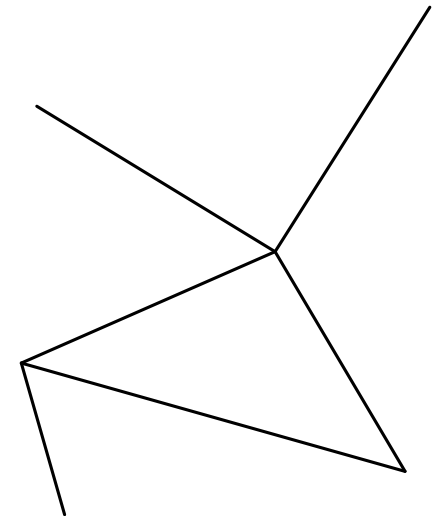
$$\psi \in C(G), \quad \sum_{e \in E_v} \frac{d\psi_e}{ds}(v) = 0 \quad (v \in V)$$

ここで , E_v は v を端点にもつ辺全体の集合とする .

ex4 (δ -type condition)

$$\psi \in C(G), \quad \sum_{e \in E_v} \frac{d\psi_e}{ds}(v) = \alpha_v \psi(v) \quad (v \in V)$$

ただし , $\alpha_v \in \mathbb{R}$ とする .



1.3 self-adjoint operator

各 $v \in V$ に対して, $|E_v| = d_v$ とおくとき

$$\Psi_v := {}^t(\psi_{e_1}(v), \dots, \psi_{e_{d_v}}(v)), \quad \Psi'_v := {}^t(\psi'_{e_1}(v), \dots, \psi'_{e_{d_v}}(v))$$

とおくと, 一般的な境界条件は d_v 次正方行列 A_v, B_v を用いて

$$A_v \Psi_v + B_v \Psi'_v = \mathbf{0}$$

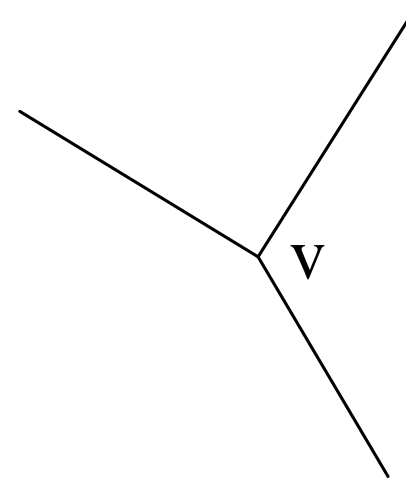
と表せる.

ex4 (δ -type condition)

$$\psi \in C(G), \quad \sum_{e \in E_v} \frac{d\psi_e}{ds}(v) = \alpha_v \psi(v) \quad (v \in V)$$

$d_v = 3$ のとき

$$A_v = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -\alpha_v & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



1.3 self-adjoint operator

定理 ['99 Kostykin-Schrader]

すべての $v \in V$ に対して $d_v \times 2d_v$ 行列 $(A_v B_v)$ が階数 d_v ならば

$$H = -\frac{d^2}{ds^2} \quad \text{with } A_v \Psi_v + B_v \Psi'_v = \mathbf{0} : \text{self-adjoint}$$

$$\Leftrightarrow A_v B_v^* : \text{self-adjoint } (v \in V)$$

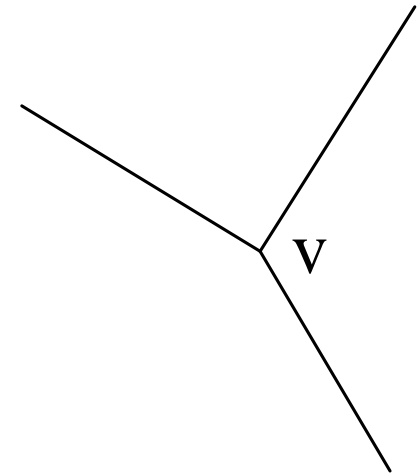
ex4 (δ -type condition)

$$\psi \in C(G), \quad \sum_{e \in E_v} \frac{d\psi_e}{ds}(v) = \alpha_v \psi(v) \quad (v \in V)$$

$d_v = 3$ のとき

$$A_v B_v^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_v \end{pmatrix}$$

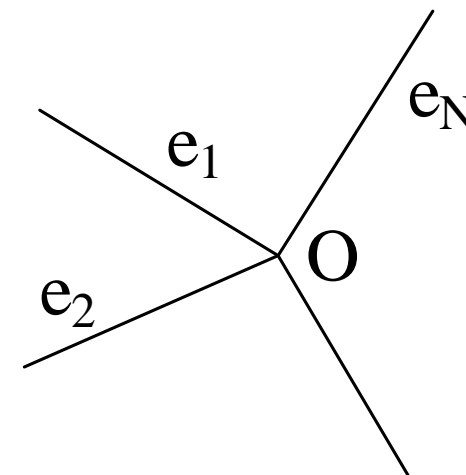
これは $\alpha_v \in \mathbb{R}$ ならエルミート行列.



1.4 Scattering matrix

1つの頂点 O から N 本の半直線が出ているグラフを G とし, すべての辺 e_j で $s = 0$ が頂点 O に対応しているとする. O では次の接続条件を与える.

$$H = -\frac{d^2}{ds^2} \quad \text{with } A\Psi_O + B\Psi'_O = \mathbf{0}$$



e_j 方向から波数 k の進行波が入射すると

$$\psi_j^j(s) = e^{-\sqrt{-1}ks} + S_{jj}(k)e^{\sqrt{-1}ks} \quad \text{in } e_j$$

$$\psi_i^j(s) = S_{ij}(k)e^{\sqrt{-1}ks} \quad \text{in } e_i \quad (i \neq j)$$

と各辺上で波動関数 ψ は表せる. このとき

$$S(k) := (S_{ij}(k))_{ij} : \text{散乱行列}$$

とおく. これは接続条件を用いて次のようにも表せる.

$$S(k) = -(A + \sqrt{-1}kB)^{-1}(A - \sqrt{-1}kB)$$

2.1 Known Results [00 Kosugi]

境界値が $g^\varepsilon \rightarrow g$ (一様収束) で f がある仮定をみたせば

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon = f(u^\varepsilon) & \text{in } \Omega_\varepsilon \\ u^\varepsilon = g^\varepsilon & \text{on } \Gamma_\varepsilon \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \Sigma_\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\psi_{ss} = f(\psi) & \text{in } G \\ \psi = g & \text{on } \Gamma \\ \sum_{e \in E_0} \frac{d\psi_e}{ds}(O) = 0, \psi \in C(G) \end{cases}$$

と解 u^ε は ψ に一様収束する .

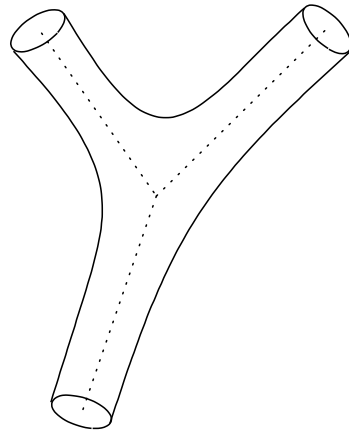


Figure1

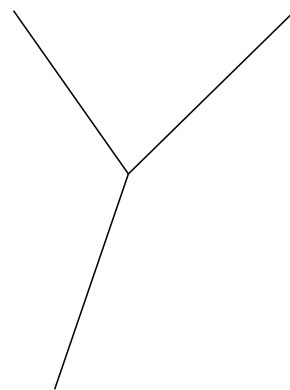


Figure2

2.2 Known Results [05 Post]

$G = (V, E)$: 平面グラフ

各辺 $e \in E$ は長さ有限な曲線で, その曲率を $\kappa_e(s)$ とする.

$\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$: G を幅 ε でふくらませた帯状領域

このとき (ある仮定の下で)

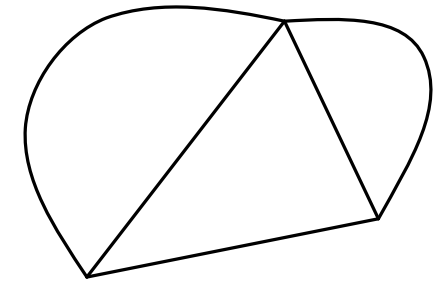
Dirichlet Laplacian $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$ の第 k 固有値 $\lambda_k(\varepsilon)$ に対して

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\lambda_k(\varepsilon) - \frac{\lambda_1}{\varepsilon^2} \right) = \lambda_k(0)$$

が成り立つ. ここで,

$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4}$: $(-1, 1)$ 上の **Dirichlet Laplacian** の第1固有値

$\lambda_k(0)$: $\bigoplus_{e \in E} \left(-\Delta_{[0, l_e]}^D - \frac{\kappa_e^2}{4} \right)$ の第 k 固有値



2.3 Known Results [07 Bouchitte-Mascarenhas-Trabucho]

$\Gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$: 自己交差しない滑らかな弧長パラメータ曲線 ($|\Gamma'(s)| \equiv 1$)

$\omega \subset \mathbb{R}^2$: 有界領域 (円板)

$$T := \Gamma', \quad N := T'/|T'|, \quad B := T \times N \quad (\text{Frenet frame})$$

$$\Omega := \{x = \Gamma(s) + y_1 N(s) + y_2 B(s) \mid s \in [0, L], y = (y_1, y_2) \in \omega\}$$

として空間内の tube 状の領域を設定し, $Q_L := (0, L) \times \omega$ として

$$\Omega_\varepsilon := \{x = \psi_\varepsilon(s, y) = \Gamma(s) + \varepsilon y_1 N(s) + \varepsilon y_2 B(s) \mid (s, y) \in Q_L\}$$

とおく. このとき, 次の固有値問題

$$-\Delta u^\varepsilon = \lambda u^\varepsilon, \quad u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$$

を考える. この固有値を

$$0 < \lambda_1^\varepsilon \leq \lambda_2^\varepsilon \leq \lambda_3^\varepsilon \leq \dots$$

とし, 対応する固有関数 $\{u_i^\varepsilon\}$ を $(u_i^\varepsilon, u_j^\varepsilon)_{L^2} = \delta_{ij}$ となるようにとる.

2.3 Known Results [07 Bouchitte-Mascarenhas-Trabucho]

法方向の最小固有値を

$$-\Delta_y u_0 = \lambda_0 u_0, \quad u_0 \in H_0^1(\omega), \quad u_0 > 0, \quad \|u_0\|_{L^2(\omega)} = 1$$

とおく．このとき，固有値 λ_i^ε は

$$\lambda_i^\varepsilon = \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2} + \mu_i + \rho(\varepsilon), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho(\varepsilon) = 0$$

と表せて， μ_i は ω から計算できる定数 C_ω に関する

$$-\varphi'' + q(s)\varphi = \mu\varphi, \quad \varphi \in H_0^1(0, L)$$

$$q(s) := \tau(s)^2 C_\omega - \frac{\kappa(s)^2}{4} \quad (\kappa : \text{曲率}, \tau : \text{捩率})$$

の固有値である．さらに対応する固有関数 φ_i について

$$u_i^\varepsilon \circ \psi_\varepsilon \rightarrow \varphi_i(s)u_0(y) \quad \text{in } L^2(Q_L)$$

が成り立つ．

2.3 Known Results [07 Bouchitte-Mascarenhas-Trabucho]

関数 $\alpha(s)$ をとって **frame** を回転させ , 領域の構成を変更する .

$$N_\alpha := \cos \alpha N + \sin \alpha B, \quad B_\alpha := -\sin \alpha N + \cos \alpha B$$

$$\Omega_\varepsilon^\alpha := \{x = \psi_\varepsilon^\alpha(s, y) = \Gamma(s) + \varepsilon y_1 N_\alpha(s) + \varepsilon y_2 B_\alpha(s) \mid (s, y) \in Q_L\}$$

このときにも

$$q(s) := (\tau(s) + \alpha'(s))^2 C_\omega - \frac{\kappa(s)^2}{4}$$

に対して同様の主張が成り立つ .

2.3 Known Results [07 Bouchitte-Mascarenhas-Trabucho]

関数 $\alpha(s)$ をとって frame を回転させ , 領域の構成を変更する .

$$N_\alpha := \cos \alpha N + \sin \alpha B, \quad B_\alpha := -\sin \alpha N + \cos \alpha B$$

$$\Omega_\varepsilon^\alpha := \{x = \psi_\varepsilon^\alpha(s, y) = \Gamma(s) + \varepsilon y_1 N_\alpha(s) + \varepsilon y_2 B_\alpha(s) \mid (s, y) \in Q_L\}$$

このときにも

$$q(s) := (\tau(s) + \alpha'(s))^2 C_\omega - \frac{\kappa(s)^2}{4}$$

に対して同様の主張が成り立つ .

よって , $\alpha' = -\tau$ となるようにとると

$$q(s) = -\frac{\kappa(s)^2}{4}$$

となる . (Tang's frame) ここで , $C_\omega \geq 0$, $C_\omega = 0 \Leftrightarrow \omega : \text{radial}$ なので , ω が円板のときは最初からこうなっている .

\Rightarrow 空間曲線でも本質的に曲率の効果が主となる

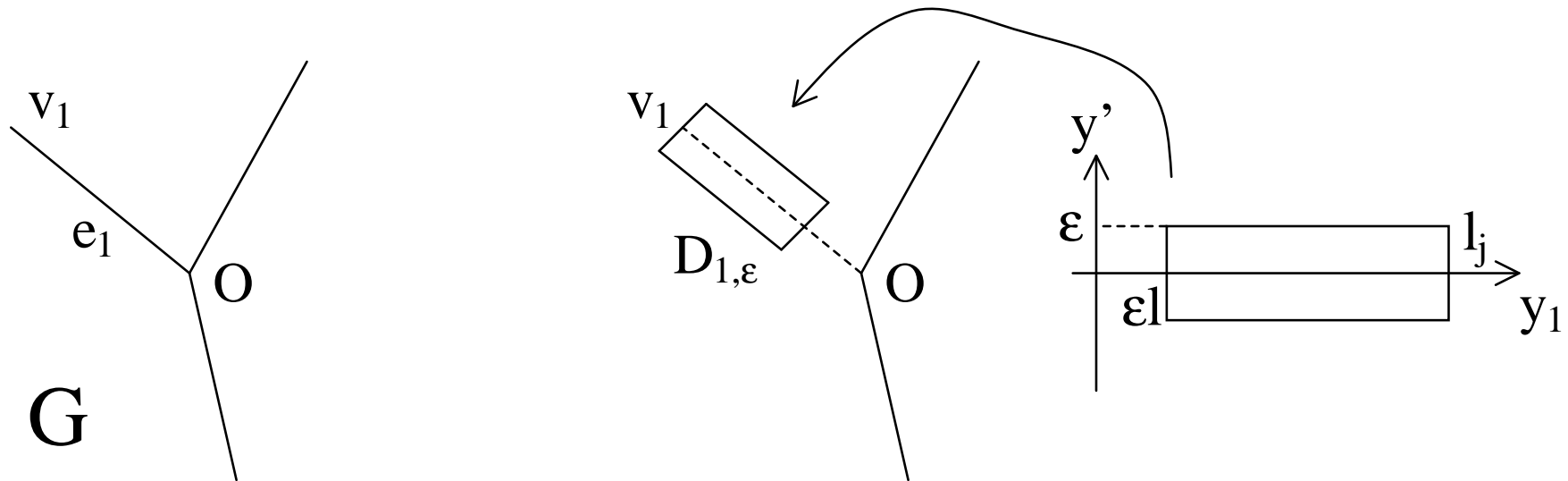
3.1 Notations of domains

領域 Ω_ε の構成 . ここで , $x = (x_1, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^n$ のように表す .

1. $V = \{O, v_j \mid 1 \leq j \leq N\}$, $E = \{e_j = Ov_j \mid 1 \leq j \leq N\}$ となるグラフを $G = (V, E)$ とする . また , 辺 e_j の長さを $l_j \in (0, +\infty)$ とする . $1 \leq j \leq N$ に対して , 直交行列 R_j を $\det R_j = 1$, $R_j a = \frac{1}{l_j} \overrightarrow{Ov_j}$ となるようにとる . ただし , $a = {}^t(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ である . さらに , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ に対して

$$D_{j,\varepsilon} := \{x = R_j y \in \mathbb{R}^n \mid \varepsilon l \leq y_1 < l_j, |y'| < \varepsilon\}$$

とおく . ここで , 定数 l, ε_0 は $D_{i,\varepsilon} \cap D_{j,\varepsilon} = \emptyset$ ($i \neq j$) となるようにとる .



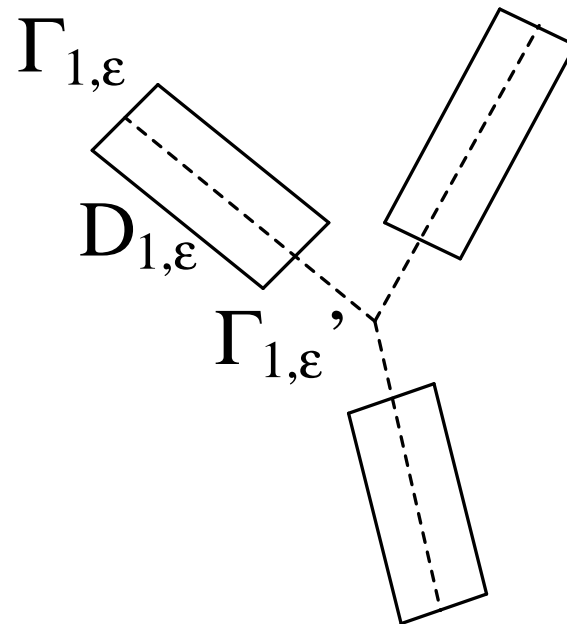
3.1 Notations of domains

2. tube $D_{j,\varepsilon}$ の境界を

$$\Gamma_{j,\varepsilon} := \{x = R_j y \in \mathbb{R}^n \mid y_1 = l_j, |y'| \leq \varepsilon\}$$

$$\Gamma'_{j,\varepsilon} := \{x = R_j y \in \mathbb{R}^n \mid y_1 = \varepsilon l, |y'| \leq \varepsilon\}$$

とおく .

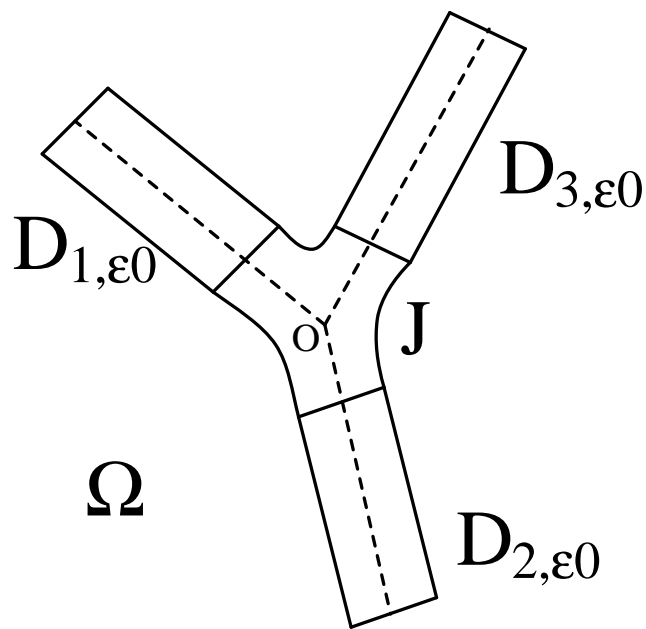


3.1 Notations of domains

3. \mathbb{R}^n 内の開集合 J を

$$O \in J, \quad J \cap D_{j,\varepsilon_0} = \emptyset, \quad \partial J \cap \partial D_{j,\varepsilon_0} = \Gamma'_{j,\varepsilon_0}$$

であって, $\Omega := J \cup \left(\bigcup_{j=1}^N D_{j,\varepsilon_0} \right)$ とおくときに, $\Sigma := \partial\Omega \setminus \left(\bigcup_{j=1}^N \Gamma_{j,\varepsilon_0} \right)$ が滑らかとなるようにとる.



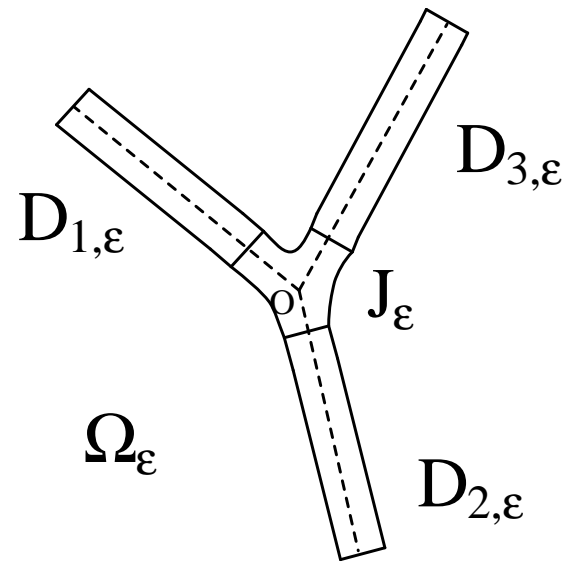
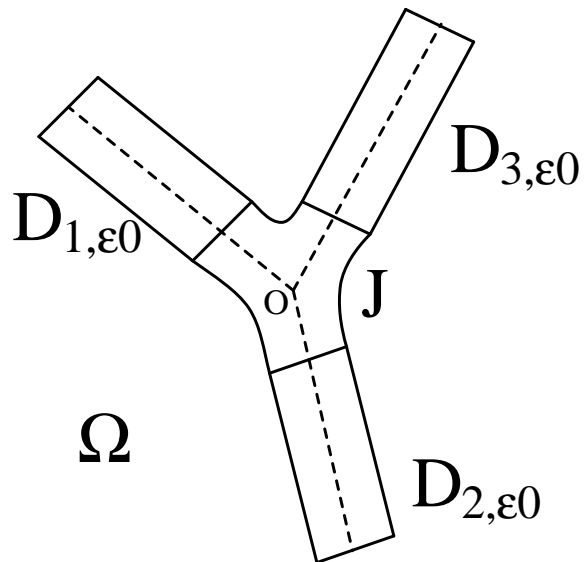
3.1 Notations of domains

4. $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ に対して

$$J_\varepsilon := \left\{ x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} y \in \mathbb{R}^n \mid y \in J \right\}, \quad \Omega_\varepsilon := J_\varepsilon \cup \left(\bigcup_{j=1}^N D_{j,\varepsilon} \right)$$

$$\Gamma_\varepsilon := \bigcup_{j=1}^N \Gamma_{j,\varepsilon}, \quad \Sigma_\varepsilon := \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_\varepsilon$$

とおく .



3.2 Problem

非線形放物型方程式の解の様子について考える .

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon = f(u^\varepsilon) & \text{in } (0, T) \times \Omega_\varepsilon \\ u^\varepsilon(t, x) = g_j^\varepsilon(x) & \text{on } (0, T) \times \Gamma_{j, \varepsilon} \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{on } (0, T) \times \Sigma_\varepsilon \\ u^\varepsilon(0, x) = u_0^\varepsilon(x) & \text{in } \Omega_\varepsilon \end{cases}$$

$$\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in C([0, T] \times G)$$

$$\xrightarrow{?} (P) \begin{cases} \partial_t \psi_j - \partial_s^2 \psi_j = f(\psi_j) & \text{in } (0, T) \times (0, l_j) \\ \psi_j(t, l_j) = g_j & \text{on } (0, T) \\ \sum_{j=1}^N \frac{\partial \psi_j}{\partial s}(t, 0) = 0 & \text{on } (0, T) \\ \psi(0) = \psi_0 & \text{in } G \end{cases}$$

初期値・境界値については適切な意味で収束しているものとする (後述) .

$$g_j^\varepsilon(x) \rightarrow g_j, \quad u_0^\varepsilon \rightarrow \psi_0$$

3.3 Assumptions

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} u_t^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon = f(u^\varepsilon) & \text{in } (0, T) \times \Omega_\varepsilon \\ u^\varepsilon(t, x) = g_j^\varepsilon(x) & \text{on } (0, T) \times \Gamma_{j, \varepsilon} \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{on } (0, T) \times \Sigma_\varepsilon \\ u^\varepsilon(0, x) = u_0^\varepsilon(x) & \text{in } \Omega_\varepsilon \end{cases}$$

(仮定)

• 境界値

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in \Gamma_{j, \varepsilon}} |g_j^\varepsilon(x) - g_j| = 0$$

• 初期値

$$u_0^\varepsilon \rightarrow \psi_0 \quad \text{uniformly}$$

• 非線形項

$$f \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}), \quad \limsup_{y \rightarrow +\infty} f(y) < 0, \quad \liminf_{y \rightarrow -\infty} f(y) > 0$$

3.4 topology and Main Theorem

$\pi_1(x) = x_1$ を第1成分への射影とする .

Ω_ε 上の関数 $v^\varepsilon(t, x)$ と G 上の連続関数 $\varphi(t, s)$ の (ハウスドルフ) 距離 d を

$$d(\Omega_\varepsilon, v^\varepsilon, \varphi) := \int_0^T \int_{J_\varepsilon} |v^\varepsilon(t, x) - \varphi(t, O)|^2 dxdt \\ + \sum_{j=1}^N \int_0^T \int_{D_{j,\varepsilon}} |v^\varepsilon(t, x) - \varphi_j(t, \pi_1 \circ R_j^{-1}x)|^2 dxdt$$

と定める . また , 初期条件について

$$d_s(\Omega_\varepsilon, u_0^\varepsilon, \psi_0) := \sup_{[0,T) \times J_\varepsilon} |u_0^\varepsilon(t, x) - \psi_0(t, O)| \\ + \sum_{j=1}^N \sup_{[0,T) \times D_{j,\varepsilon}} |u_0^\varepsilon(t, x) - \psi_{0,j}(t, \pi_1 \circ R_j^{-1}x)| \rightarrow 0$$

とする . このとき , (P_ε) の解 u^ε と (P) の解 ψ に対して

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d(\Omega_\varepsilon, u^\varepsilon, \psi) = 0$$

が成り立つ .

3.5 Sketch of proof

定数 $M > 0$ を

$$C(f) := \max\{|\xi| \mid f(\xi) = 0\}, \quad C(g) := \max_{1 \leq j \leq N} |g_j| + 1, \quad C(\psi_0) := \max_G |\psi_0| + 1$$

$$M := \max\{C(f), C(g), C(\psi_0)\}$$

とおく. このとき, ε_0 を小さくとれば

$$\sup_{x \in \Gamma_{j,\varepsilon}} |g_j^\varepsilon(x)| \leq M, \quad \sup_{x \in \Omega_\varepsilon} |u_0^\varepsilon(x)| \leq M \quad (0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0)$$

が成り立つ.

命題 1. (最大値原理)

(P_ε) の解 $u^\varepsilon(t, x)$ に対して

$$\sup_{(t,x) \in [0,T) \times \overline{\Omega_\varepsilon}} |u^\varepsilon(t, x)| \leq M \quad (0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0)$$

が成り立つ.

3.5 Sketch of proof

エネルギー汎関数を

$$D(\varphi_\varepsilon) := \{u \in H_1(\Omega_\varepsilon) \mid \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \Sigma_\varepsilon, u = g_j^\varepsilon \text{ on } \Gamma_{j,\varepsilon}\}$$

$$\varphi_\varepsilon(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx$$

で定める．方程式の両辺に u_t^ε をかけて Ω_ε 上で積分すると

命題 2. (エネルギー不等式)

(P_ε) の解を u^ε とするとき, $0 \leq t \leq T$ に対して

$$\frac{1}{2} \int_0^t \|u_t^\varepsilon(s)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 ds + \varphi_\varepsilon(u^\varepsilon(t)) \leq C_1 \varepsilon^{n-1}$$

が成り立つ．ここで, C_1 は ε, t によらない定数である．

3.5 Sketch of proof

$\alpha < \beta$ に対して

$$Q(\alpha, \beta) := \{y = {}^t(y_1, y') \in \mathbb{R}^n \mid \alpha < y_1 < \beta, |y'| < 1\}$$

とおく . $[0, T) \times Q(\varepsilon l, l_j)$ 上の関数 $w_j^\varepsilon(t, y)$ ($0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, 1 \leq j \leq N$) を

$$w_j^\varepsilon(t, y) := u^\varepsilon(t, R_j {}^t(y_1, \varepsilon y'))$$

として定義し , 法方向の積分平均を

$$\psi_j^\varepsilon(t, s) := \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{|y'| < 1} w_j^\varepsilon(t, s, y') dy'$$

とおく . (ω_{n-1} は $n - 1$ 次元単位球の体積)

補題 3. (積分平均の収束)

$\varepsilon_0 l < \delta_1$ とすると

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{Q(\delta_1, l_j - \delta_1)} |w_j^\varepsilon(t, y) - \psi_j^\varepsilon(t, y_1)|^2 dy dt = 0$$

が成り立つ .

3.5 Sketch of proof

解 u^ε の J_ε 上での振る舞いを見るために, J_ε に tube の根元を少し加えて

$$J_\varepsilon^a := J_\varepsilon \cup \left(\bigcup_{j=1}^N \{x = R_j y \in \mathbb{R}^n \mid \varepsilon l \leq y_1 < a, |y'| < \varepsilon\} \right)$$

とおく. 固定された領域 $[0, T) \times J_a$ 上の関数列を

$$v^\varepsilon(t, y) := u^\varepsilon \left(t, \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} y \right)$$

で定める.

補題 4. $[0, T) \times J$ 上の関数列 v^ε に対して

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_J |\nabla_y v^\varepsilon(t, y)|^2 dy dt = 0$$

が成り立つ.

(本当は部分列を取って) $v^\infty(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v^\varepsilon(t, y)$ とおく.

3.5 Sketch of proof

$\varepsilon_0 l < \delta_1 < \delta_2 < l_j$ をとり, $[0, T] \times (\varepsilon l, \delta_2)$ 上の関数 $\theta_{j,+}^\varepsilon, \theta_{j,-}^\varepsilon$ を

$$\begin{cases} \partial_t \theta_{j,\pm}^\varepsilon - \partial_s^2 \theta_{j,\pm}^\varepsilon = f(\theta_{j,\pm}^\varepsilon) & \text{in } (0, T) \times (\varepsilon l, \delta_2) \\ \theta_{j,\pm}^\varepsilon(t, \varepsilon l) = v^\infty(t) \pm \sup_{(t,x) \in [0,T] \times J_\varepsilon} |u^\varepsilon(t, x) - v^\infty(t)| & \text{on } (0, T) \\ \theta_{j,\pm}^\varepsilon(t, \delta_2) = w_j^\varepsilon(t, \delta_2) & \text{on } (0, T) \\ \theta_{j,\pm}^\varepsilon(0, s) = \psi_{0j}^\varepsilon(s) & \text{in } (\varepsilon l, \delta_2) \end{cases}$$

で定めると

$$\theta_{j,-}^\varepsilon(t, y_1) \leq w_j^\varepsilon(t, y) \leq \theta_{j,+}^\varepsilon(t, y_1) \quad (t, y) \in [0, T] \times (\varepsilon l, \delta_2)$$

が成り立つ.

3.5 Sketch of proof

$0 < t_1 < t_2 < T$ のとき, 方程式に $\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}$ をかけて $[t_1, t_2] \times J_\varepsilon^a$ 上で積分すると

$$\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int_{t_1}^{t_2} \int_{J_\varepsilon^a} \{u_t^\varepsilon(t, x) - \Delta u^\varepsilon(t, x)\} dx dt = \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int_{t_1}^{t_2} \int_{J_\varepsilon^a} f(u^\varepsilon(t, x)) dx dt$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ として

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^N \left\{ \int_0^a \partial_t \psi_j^\infty(t, s) ds - \frac{\partial \psi_j^\infty}{\partial s}(t, a) \right\} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^N \int_0^a f(\psi_j^\infty(t, s)) ds dt$$

ψ_j^∞ のみたす方程式を代入して

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^N \frac{\partial \psi_j^\infty}{\partial s}(t, 0) dt = 0$$

より, 求める接続条件が現れる.

4.1 Question

tube 状の領域 Ω_ε がグラフ G に収束する場合

Dirichlet Laplacian $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$ on Ω_ε

→ **Dirichlet Laplacian** $-\frac{d^2}{ds^2}$ on G

Neumann Laplacian $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^N$ on Ω_ε

→ $-\frac{d^2}{ds^2}$ with **Kirchhoff condition** on G

補足：グラフが曲線を含む場合は（曲線のパラメータを用いて変数変換により線分にするため）曲率がポテンシャル項に現れる．

4.1 Question

tube 状の領域 Ω_ε がグラフ G に収束する場合

Dirichlet Laplacian $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$ on Ω_ε

→ **Dirichlet Laplacian** $-\frac{d^2}{ds^2}$ on G

Neumann Laplacian $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^N$ on Ω_ε

→ $-\frac{d^2}{ds^2}$ with **Kirchhoff condition** on G

補足：グラフが曲線を含む場合は（曲線のパラメータを用いて変数変換により線分にするため）曲率がポテンシャル項に現れる．

細い領域がグラフに退化するときには，境界条件付きラプラシアンについてこのような簡単な現象しか起こらないのか？

4.2 concentration curve

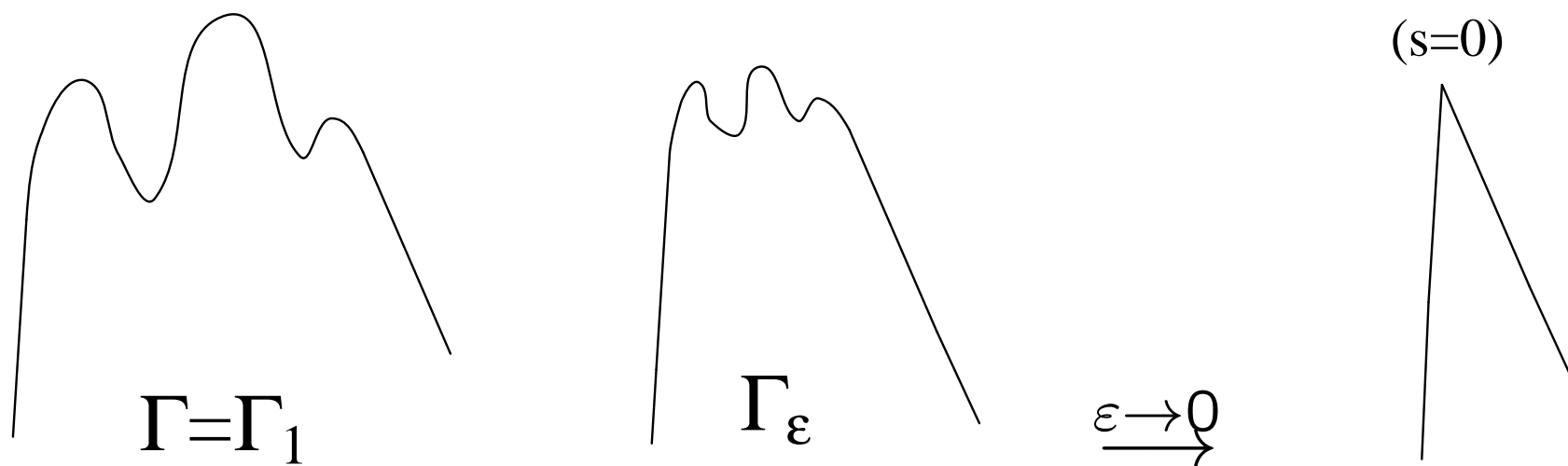
下図のような自己交差しない弧長パラメータで表された平面曲線

$$\Gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \quad (s \in \mathbb{R})$$

があり, その曲率を $\kappa \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ とする. このとき

$$\Gamma_\varepsilon(s) := \varepsilon \Gamma\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$$

とおき, $\varepsilon \rightarrow 0$ の状況を考える.



4.2 concentration curve

$$\Omega_\varepsilon := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varepsilon \Gamma \begin{pmatrix} s \\ \varepsilon \end{pmatrix} + \varepsilon^\alpha u \begin{pmatrix} -\gamma'_2(s) \\ \gamma'_1(s) \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}, -d < u < d \right\} \quad (\alpha > 5/2)$$

Ω_ε 上の Dirichlet Laplacian $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$ は変数変換

$$\Omega_\varepsilon \ni (x, y) \mapsto (s, u) \in \mathbb{R} \times (-d, d)$$

により, 次の H_ε のように表せる.

$$g_\varepsilon(s, u) := 1 + \varepsilon^{\alpha-1} u \kappa(s/\varepsilon)$$

$$H_\varepsilon := -\frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{g_\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{\varepsilon^{2\alpha}} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} V_\varepsilon(s, u) \quad \text{with } \psi(s, d) = \psi(s, -d) = 0$$

$$V_\varepsilon(s, u) = -\frac{\kappa(s/\varepsilon)^2}{4g_\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^{\alpha-1} u \kappa''(s/\varepsilon)}{2g_\varepsilon^3} - \frac{5\varepsilon^{2\alpha-2} u^2 \kappa'(s/\varepsilon)^2}{4g_\varepsilon^4}$$

4.2 concentration curve

$$\Omega_\varepsilon := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varepsilon \Gamma \begin{pmatrix} s \\ \varepsilon \end{pmatrix} + \varepsilon^\alpha u \begin{pmatrix} -\gamma'_2(s) \\ \gamma'_1(s) \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}, -d < u < d \right\} \quad (\alpha > 5/2)$$

Ω_ε 上の Dirichlet Laplacian $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$ は変数変換

$$\Omega_\varepsilon \ni (x, y) \mapsto (s, u) \in \mathbb{R} \times (-d, d)$$

により, 次の H_ε のように表せる.

$$g_\varepsilon(s, u) := 1 + \varepsilon^{\alpha-1} u \kappa(s/\varepsilon) \doteq 1$$

$$H_\varepsilon := -\frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{g_\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{\varepsilon^{2\alpha}} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} V_\varepsilon(s, u) \quad \text{with } \psi(s, d) = \psi(s, -d) = 0$$

$$V_\varepsilon(s, u) = -\frac{\kappa(s/\varepsilon)^2}{4g_\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^{\alpha-1} u \kappa''(s/\varepsilon)}{2g_\varepsilon^3} - \frac{5\varepsilon^{2\alpha-2} u^2 \kappa'(s/\varepsilon)^2}{4g_\varepsilon^4} \simeq -\frac{1}{4} \kappa \left(\frac{s}{\varepsilon} \right)^2$$

$$H_\varepsilon \simeq -\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{1}{\varepsilon^{2\alpha}} \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{4\varepsilon^2} \kappa \left(\frac{s}{\varepsilon} \right)^2$$

4.3 zero energy resonance

曲線のパラメータ s に関する項についての様子を見るため

$$h := -\frac{d^2}{ds^2} - \frac{\kappa(s)^2}{4}$$

とおく .

(定義) h が **zero energy resonance** をもつ

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists f_r \in L^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{s.t.} \quad f_r \notin L^2(\mathbb{R}), \quad hf_r = 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

[85 Bolle-Gesztesy-Wilk]

zero energy resonance をもつならば f_r は (定数倍を除いて) 一意的で

$$\exists c_+ := \lim_{s \rightarrow +\infty} f_r(s), \quad \exists c_- := \lim_{s \rightarrow -\infty} f_r(s)$$

さらに, $(c_+, c_-) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ が成り立つ (ようにできる) .

4.4 Known Result (Outline)

$$h := -\frac{d^2}{ds^2} - \frac{\kappa(s)^2}{4}$$

(定義) h が **zero energy resonance** をもつ

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists f_r \in L^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{s.t.} \quad f_r \notin L^2(\mathbb{R}), \quad hf_r = 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

$$c_+ := \lim_{s \rightarrow +\infty} f_r(s), \quad c_- := \lim_{s \rightarrow -\infty} f_r(s)$$

[07 Albeverio-Cacciapuoti-Finco]

h が **zero energy resonance** をもたない $\Rightarrow H_\varepsilon - \frac{\lambda_k}{\varepsilon^{2\alpha}} \simeq h_0$ ($\varepsilon \ll 1$)

$$D(h_0) := \{\psi \in H^2(\mathbb{R} \setminus 0) \cap H^1(\mathbb{R}) \mid \psi(0) = 0\}$$

h が **zero energy resonance** をもつ $\Rightarrow H_\varepsilon - \frac{\lambda_k}{\varepsilon^{2\alpha}} \simeq h_r$ ($\varepsilon \ll 1$)

$$D(h_r) := \{\psi \in H^2(\mathbb{R} \setminus 0) \mid c_- \psi(+0) = c_+ \psi(-0), \quad c_+ \psi'(+0) = c_- \psi'(-0)\}$$

$$\text{作用はどちらも同じで } h_0 \psi = h_r \psi = -\frac{d^2 \psi}{ds^2} \quad (s \neq 0)$$

4.5 Reduced resolvent

$$H_\varepsilon \simeq -\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{1}{\varepsilon^{2\alpha}} \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{4\varepsilon^2} \kappa \left(\frac{s}{\varepsilon}\right)^2$$

(法方向の固有値問題)

$$\begin{cases} -\frac{d^2}{du^2} \varphi_n = \lambda_n \varphi_n & \text{in } (-d, d) \\ \varphi_n(-d) = \varphi_n(d) = 0 \end{cases}$$

となる固有値 $\{\lambda_n\}$ と固有関数 $\{\varphi_n\}$ をとる (具体的な形は不要)

Reduced resolvent $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ とする .

“ $\left(H_\varepsilon - z - \frac{\lambda_m}{\varepsilon^{2\alpha}}\right)^{-1}$ の核関数のなす行列の法方向成分に関する対角化行列 ”を

$$R_{n,m}^\varepsilon(z, s, s') := \int_{-d}^d \int_{-d}^d \varphi_n(u) \left(H_\varepsilon - z - \frac{\lambda_m}{\varepsilon^{2\alpha}}\right)^{-1} (s, u, s', u') \varphi_m(u') du du'$$

とおき, これを核関数とする $L^2(\mathbb{R})$ 上の積分作用素を $R_{n,m}^\varepsilon(z)$ とおく .

4.6 Known Result (detail)

$$R_{n,m}^\varepsilon(z, s, s') := \int_{-d}^d \int_{-d}^d \varphi_n(u) \left(H_\varepsilon - z - \frac{\lambda_m}{\varepsilon^{2\alpha}} \right)^{-1} (s, u, s', u') \varphi_m(u') du du'$$

[07 Albeverio-Cacciapuoti-Finco]

h が zero energy resonance をもたないならば

$$u - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_{n,m}^\varepsilon(z) = \delta_{m,n} (h_0 - z)^{-1} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$$

$$D(h_0) = \{ \psi \in H^2(\mathbb{R} \setminus 0) \cap H^1(\mathbb{R}) \mid \psi(0) = 0 \}$$

h が zero energy resonance をもつならば

$$u - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_{n,m}^\varepsilon(z) = \delta_{m,n} (h_r - z)^{-1} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$$

$$D(h_r) = \{ \psi \in H^2(\mathbb{R} \setminus 0) \mid c_- \psi(+0) = c_+ \psi(-0), c_+ \psi'(+0) = c_- \psi'(-0) \}$$

$u - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ は作用素ノルムに関する極限で, $h_0 \psi = h_r \psi = -\frac{d^2 \psi}{ds^2} \quad (s \neq 0)$

4.7 Conclusion

$$h := -\frac{d^2}{ds^2} - \frac{\kappa(s)^2}{4}$$

曲率 $\kappa(s)^2$ が“ **小さい** ”ならば, h は zero energy resonance をもたない

(参考) 詳しくは

$$m_0 := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \kappa(s)^2 |s - s'|^2 \kappa(s')^2 ds ds'$$

が小さいこと .

4.7 Conclusion

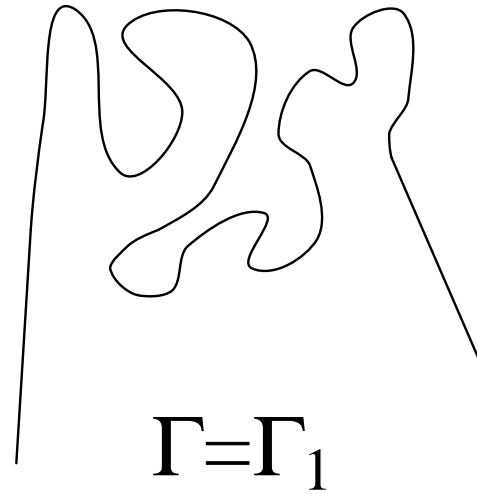
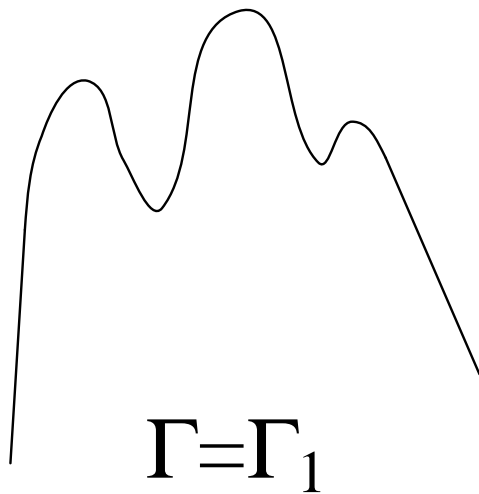
$$h := -\frac{d^2}{ds^2} - \frac{\kappa(s)^2}{4}$$

曲率 $\kappa(s)^2$ が“ **小さい** ”ならば h は zero energy resonance をもたない

→ 曲線 Γ が**あまり曲がっていない**ならば,

h は zero energy resonance をもたない

本質的に**曲線の幾何学的条件による影響**が現れる！



4.8 Future problem

このような状況設定でネットワークの問題を考察したらどうなるか？

