2010年10月25日(月) 信州数理物理セミナー

周期的点相互作用に従う1次元シュレディンガー作用素の退化したスペクトラルギャップの同定問題

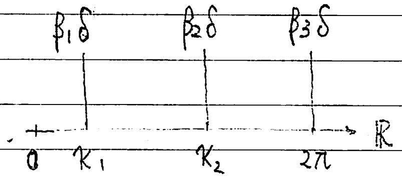
§1 本研究の目的と予備知識

$\kappa_1, \kappa_2 \in (0, 2\pi)$, $\kappa_1 < \kappa_2$, $\kappa_3 = 2\pi$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ とする.

本研究の目的　周期的δ型点相互作用に従う1次元シュレディンガー作用素

$$H_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\beta_1 \delta(x-\kappa_1-2\pi l) + \beta_2 \delta(x-\kappa_2-2\pi l) + \beta_3 \delta(x-2\pi l) \right) \quad \text{in } L^2(\mathbb{R})$$

のスペクトルについて調べる。



◇ δ型点相互作用

$L_\beta := -\frac{d^2}{dx^2} + \beta\delta(x)$ は2次形式

$$q_\beta(u, v) = (u', v')_{L^2(\mathbb{R})} + \beta u(0)\overline{v(0)}, \quad Q(q_\beta) = H^1(\mathbb{R})$$

に対応する自己共役作用素として定義される:

$$(L_\beta y)(x) = -y''(x), \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\mathrm{Dom}(L_\beta) = \left\{ y \in H^2(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \,\middle|\, \begin{pmatrix} y(+0) \\ y'(+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(-0) \\ y'(-0) \end{pmatrix} \right\}$$

◇ P. Šeba による一般点相互作用 (1986)

対称作用素 $-d^2/dx^2|_{C_0^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\})}$ の自己共役拡張の族として $\{L(\theta, A) \mid \theta \in \mathbb{R}, A \in SL(2,\mathbb{R})\}$ を得た.

$\theta \in \mathbb{R}$, $A \in SL(2,\mathbb{R})$ に対し,

$$(L(\theta, A)y)(x) = -\frac{d^2}{dx^2} y(x), \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

$$\mathrm{Dom}(L(\theta, A)) = \left\{ y \in H^2(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \,\middle|\, \begin{pmatrix} y(+0) \\ y'(+0) \end{pmatrix} = e^{i\theta} A \begin{pmatrix} y(-0) \\ y'(-0) \end{pmatrix} \right\}$$

◇ R. J. Hughes による一般化クローニッヒ・ペニー・ハミルトニアン (1998)

$0 = \kappa_0 < \kappa_1 < \cdots < \kappa_n = 2\pi$, $\Gamma_j = \{\kappa_j\} + 2\pi\mathbb{Z}$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \cdots \cup \Gamma_n$

$\{\theta_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}$, $\{A_j\}_{j=1}^n \subset SL(2,\mathbb{R})$ に対し, $L^2(\mathbb{R})$ 上の作用素 $H = H(\theta_1, \ldots, \theta_n, A_1, \ldots, A_n)$ を次で定義する:

$$(Hy)(x) = -\frac{d^2}{dx^2} y(x), \quad x \in \mathbb{R}\setminus\Gamma,$$

$$\mathrm{Dom}(H) = \left\{ y \in H^2(\mathbb{R}\setminus\Gamma) \,\middle|\, \begin{pmatrix} y(x+0) \\ y'(x+0) \end{pmatrix} = e^{i\theta_j} A_j \begin{pmatrix} y(x-0) \\ y'(x-0) \end{pmatrix}, \ x \in \Gamma_j, \ j = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

・ $M_{1j}=\begin{pmatrix}1&0\\ \beta_j&1\end{pmatrix}$ とおくと $H_1=H(0,0,0,M_{11},M_{12},M_{13})$ で定義される.

・ H は自己共役作用素

・ $\sigma(H)$ は $\theta_1,\dots,\theta_n$ に無関係. 以下 $\theta_1=\cdots=\theta_n=0$ とおく.

・ $\sigma(H)$ はバンド構造を持つ (Floquet–Blochの定理);

$$\exists 1\,\{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty}\subset\mathbb{R}\ \text{s.t.}\ \sigma(H)=\bigcup_{j=1}^{\infty}[\lambda_{2j-2},\lambda_{2j-1}].$$

$$B_j:=[\lambda_{2j-2},\lambda_{2j-1}]\ ;\ \sigma(H)\text{ の } j\text{th band}$$

$\{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty}$ は次で与えられる;

$$(1)\begin{cases}-y''(x,\lambda)=\lambda y(x,\lambda), & x\in\mathbb{R}\setminus\Gamma,\\ \begin{pmatrix}y(x+0,\lambda)\\ y'(x+0,\lambda)\end{pmatrix}=A_j\begin{pmatrix}y(x-0,\lambda)\\ y'(x-0,\lambda)\end{pmatrix}, & x\in\Gamma_j,\ j=1,2,\dots,n\end{cases}$$

の初期条件

$$y_1(+0,\lambda)=1,\quad y_1'(+0,\lambda)=0,\quad y_2(+0,\lambda)=0,\quad y_2'(+0,\lambda)=1$$

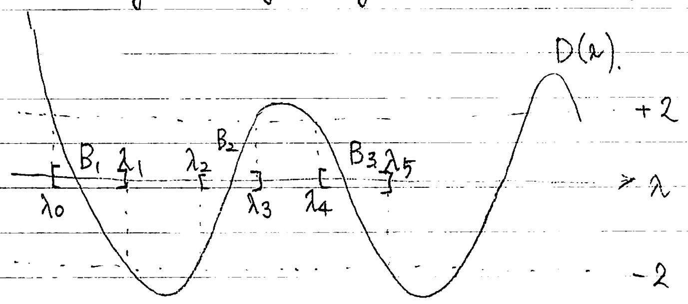
をみたす解を $y_1(x,\lambda)$, $y_2(x,\lambda)$ とする. 関数

$$D(\lambda):=y_1(2\pi+0,\lambda)+y_2'(2\pi+0,\lambda)$$

を $\sigma(H)$ の判別式という (∵ $\lambda\in\sigma(H)\Leftrightarrow|D(\lambda)|\le 2$ によって $\sigma(H)$ を判別できる)

数列 $\{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty}:=\{\lambda\in\mathbb{R}\mid D^2(\lambda)-4=0\}$ は不等式 $\lambda_{2j-2}<\lambda_{2j-1}\le\lambda_{2j}$ $(j\in\mathbb{N})$ をみたす

$$G_j:=(\lambda_{2j-1},\lambda_{2j})\ ;\ \sigma(H)\text{ の } j\text{th gap.}$$



Coexistence problem: 与えられた $j\in\mathbb{N}$ に対し, $G_j=\phi$ か $G_j\neq\phi$ か?

以下, $\Lambda=\{j\in\mathbb{N}\mid G_j=\phi\}$ を解析する.

§ 主結果

Thm 1 $\kappa_2 = 2\pi - \kappa_1$, $\beta_1+\beta_2-\beta_3 \neq 0$, $\beta_1 \neq \beta_2$ を仮定する.

(i) $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \neq 0$ または $\kappa_1/\pi \notin \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ $\Lambda = \phi$.

(ii) $\beta_1+\beta_2+\beta_3 = 0$, $\kappa_1/2\pi = q/p$, $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $\gcd(p,q)=1$ $\Rightarrow$ $\Lambda = p\mathbb{N}$.

※ Gesztesy Holden Kirsch (JMAA, 1988)

$$-\frac{d^2}{dx^2} + \beta_1 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(x-2\pi l) \quad (\beta_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}) \text{ に対して } \Lambda = \phi.$$

Yoshitomi (Hokkaido Math J. 2006)

$$-\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\beta_1 \delta(x-\kappa_1-2\pi l) + \beta_2 \delta(x-2\pi l)\right) \quad (\beta_1 \neq \beta_2,\ \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}) \text{ に対して},$$

- $\beta_1+\beta_2 \neq 0$ or $\kappa_1/\pi \notin \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ $\Lambda = \phi$.
- $\beta_1+\beta_2 = 0$, $\kappa_1/2\pi = q/p$, $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $\gcd(p,q)=1$ $\Rightarrow$ $\Lambda = p\mathbb{N}$.

$M_{2j} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_j & \sin\alpha_j \\ -\sin\alpha_j & \cos\alpha_j \end{pmatrix} \in SO(2)\setminus\{E,-E\}$ とし, $H_2 = H(0,0,0,M_{21},M_{22},M_{23})$ とおく

$$m = \begin{cases} 0 & \text{if } \#\{j \in \{1,2,3\} \mid \alpha_j \in (-\pi,0)\} \text{ is odd} \\ 1 & \text{if } \#\{j \in \{1,2,3\} \mid \alpha_j \in (-\pi,0)\} \text{ is even} \end{cases}$$ とおく.

Thm 2 (Result for H_2) $\kappa_2 = 2\pi - \kappa_1$, $M_{23}M_{22}M_{21} = \pm E$ and $M_{21} \neq \pm M_{22}$ を仮定する

このとき.

$$\Lambda = \begin{cases} \{3+m\} & \text{if } \kappa_1 \notin \pi\mathbb{Q} \\ \{3+m\} \cup \{1+m+pj \mid j \in \mathbb{N}\} & \text{if } \kappa_1/2\pi = q/p,\ (p,q)\in\mathbb{N}^2,\ \gcd(p,q)=1 \end{cases}$$

基本周期内に3個の点相互作用がある場合は

スケール不変($\delta^{(1)}$型)点相互作用の場合にも結果がある (N, JMAA, 2010).

No. 4 Date

§3. Thm 1の証明の概略

$\begin{cases} \text{(step 1) モノドロミー行列を用いて } \mathcal{B} = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \cap B_{k+1} \text{ を解析する.} \\ \text{(step 2) 回転数を用いて } \Lambda \text{ を解析する.} \end{cases}$

(step 1) $K_1 = K$, $\tau = 2\pi - 2K$ とおく　(*)を先に書く

<u>Lemma 3.1</u> $K_2 = 2\pi - K_1$, $\beta_1 \neq \beta_2$, $\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 \neq 0$ を仮定する.

$$M(\lambda) = \pm E \iff \lambda \neq 0,\ \sin K\sqrt{\lambda} = \sin \tau\sqrt{\lambda} = 0,\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$$

<u>証明</u>

(*) $M(\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(2\pi+0,\lambda) & y_2(2\pi+0,\lambda) \\ y_1'(2\pi+0,\lambda) & y_2'(2\pi+0,\lambda) \end{pmatrix}$; モノドロミー行列.

・$\mathcal{B} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid M(\lambda) = E \text{ or } M(\lambda) = -E\}$

・$M(\lambda) = M_{13} T_1(\lambda) M_{22} T_2(\lambda) M_{11} T_1(\lambda)$

ただし, $T_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos K\sqrt{\lambda} & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin K\sqrt{\lambda} \\ -\sqrt{\lambda}\sin K\sqrt{\lambda} & \cos K\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$, $T_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos \tau\sqrt{\lambda} & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \tau\sqrt{\lambda} \\ -\sqrt{\lambda}\sin \tau\sqrt{\lambda} & \cos \tau\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$

・$M(\lambda) = \pm E \Rightarrow \sin K\sqrt{\lambda}\, \sin \tau\sqrt{\lambda} = 0$

(∵) 背理法による. $M(\lambda) = \pm E$, $\sin K\sqrt{\lambda}\,\sin\tau\sqrt{\lambda} \neq 0$ を仮定する.

$$\sqrt{\lambda}\left(\beta_3\, y_1'(2\pi+0,\lambda) + y_1(2\pi+0,\lambda) - y_2'(2\pi+0,\lambda)\right) / \sin^2 K\sqrt{\lambda}\, \sin\tau\sqrt{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow (\beta_1 - \beta_2)(\cot^2 K\sqrt{\lambda} + 1) = 0 \quad \Rightarrow\Leftarrow$$

・$M(\lambda) = \pm E \Rightarrow \lambda \neq 0,\ \sin K_1\sqrt{\lambda} = 0,\ \sin\tau\sqrt{\lambda} = 0,\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$ □

「$\exists \lambda \neq 0$ s.t. $\sin K\sqrt{\lambda} = \sin\tau\sqrt{\lambda} = 0$」 $\iff$ $K_1/\pi \in \mathbb{Q}$

⇝ Thm 1のような分類が必要

Lemmaの仮定の下で, $K_1/2\pi = q/p$, $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $\gcd(p,q) = 1$ とすると

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{p^2 j^2}{4} \,\middle|\, j \in \mathbb{N} \right\}$$ と書ける.

(step 2) $\lambda = \frac{p^2 d^2}{4}$ における回数数を計算する

(1) の非自明解を $y(x,\lambda)$ とし, (r,ω) を (y', y) の極座標とする;

$$y'(x,\lambda) = r(x,\lambda)\cos\omega(x,\lambda),\quad y(x,\lambda) = r(x,\lambda)\sin\omega(x,\lambda).$$

$\omega = \omega(x,\lambda)$ を $y(x,\lambda)$ の Prüfer 変換とよぶ.

(1) から ω についての方程式を得る: $A_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix}$ とおく.

$$(*)\begin{cases} \omega'(x,\lambda) = \cos^2\omega(x,\lambda) + \lambda\sin^2\omega(x,\lambda), \quad x \in \mathbb{R}\setminus\Gamma, \\ \left(a_j\sin\omega(x-0,\lambda) + b_j\cos\omega(x-0,\lambda)\right)\cos\omega(x+0,\lambda) = \left(c_j\sin\omega(x-0,\lambda) + d_j\cos\omega(x-0,\lambda)\right)\sin\omega(x+0,\lambda), \\ \operatorname{sgn}\left(\sin\omega(x+0,\lambda)\right) = \operatorname{sgn}\left(a_j\sin\omega(x-0,\lambda) + b_j\cos\omega(x-0,\lambda)\right), \\ \operatorname{sgn}\left(\cos\omega(x+0,\lambda)\right) = \operatorname{sgn}\left(c_j\sin\omega(x-0,\lambda) + d_j\cos\omega(x-0,\lambda)\right), \quad x \in \Gamma_j,\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$x \in \Gamma$ に対し, $\omega(x+0,\lambda)$ の主値を決めるために次の枝を選ぶ;

$$\omega(x+0,\lambda) - \omega(x-0,\lambda) \in [-\pi, \pi), \quad x \in \Gamma$$

$\omega_0 \in \mathbb{R}$ とし, $\omega(+0,\lambda) = \omega_0$ をみたす $(*)$ の解を $\omega = \omega(x,\lambda,\omega_0)$ とおく.

Def 3.2 (回転数)

$$\rho(\lambda) := \lim_{k\to\infty} \frac{\omega(2\pi k+0,\lambda,\omega_0) - \omega_0}{2\pi k} \quad (k \in \mathbb{N})$$ を (1) の回転数という.

Proposition 3.3

(i) 右辺の極限は存在し, ω_0 に依らない

(ii) $\rho(\lambda)$ は $\mathbb{R}$ 上連続かつ非減少関数である

(iii) $\rho(\lambda) \in \frac{\mathbb{Z}}{2} \iff \lambda \in \bigcup_{j=0}^{\infty} [\lambda_{2j-1}, \lambda_{2j}]$ ただし, $[\lambda_{-1}, \lambda_0] = (-\infty, \lambda_0]$ で定義する

$l = \#\{j \in \{1, 2, \dots, n\} \mid (b_j < 0)$ または $(b_j = 0,\ d_j < 0)\}$ とおく.

Thm 3.4 (N, 2007, AHP)

$\forall j \in \mathbb{N}$ に対して $\lambda_{2j-2} = \max\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \rho(\lambda) = \frac{j-1}{2} - \frac{l}{2}\}$, $\lambda_{2j-1} = \min\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \rho(\lambda) = \frac{j}{2} - \frac{l}{2}\}$.

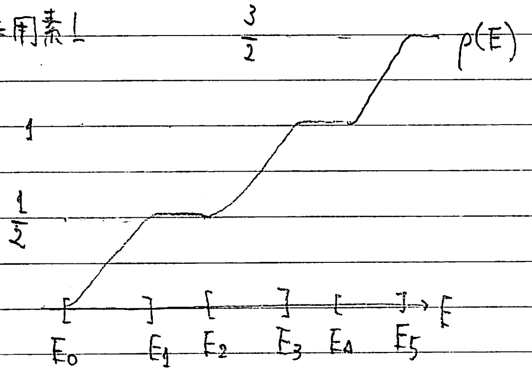
Johnson-Moserの結果 (1982)

$L := -\frac{d^2}{dx^2} + q$, $q \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$, q: 2π-periodic, $\sigma(L) =: \bigcup_{j=1}^{\infty} [E_{2j-2}, E_{2j-1}]$

⇒ $\forall j \in \mathbb{N}$ に対し,

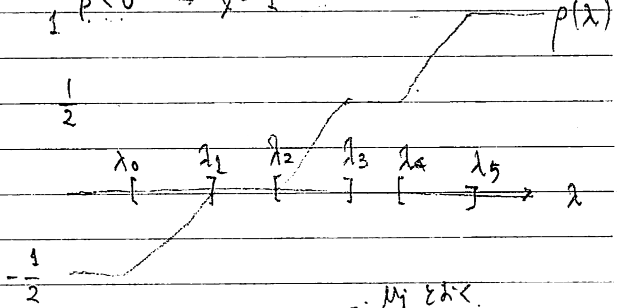
$$E_{2j-2} = \max\left\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \rho(\lambda) = \frac{j-1}{2}\right\}, \quad E_{2j-1} = \min\left\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \rho(\lambda) = \frac{j}{2}\right\}.$$

作用素L



$-d^2/dx^2 + \beta \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta'(x-2\pi k) =: H\left(0, \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$\beta < 0 \Rightarrow l = 1$



Proof of Thm 1 (ii) $\rho\left(\frac{p^2 j^2}{4}\right) = \frac{pj}{2}$ を示せばよい. $\omega\left(2\pi k+0, \frac{p^2 j^2}{4}, 0\right)$ を計算する. ($\frac{p^2j^2}{4} =: \mu_j$ とおく.)

$\omega(x, \lambda, 0)$ は $y_2(x, \lambda)$ の Prüfer 変換であるから $x \in (0, \kappa_1)$ に対して

$$y_2(x, \mu_j) = \frac{1}{\sqrt{\mu_j}} \sin\sqrt{\mu_j}\, x, \quad y_2'(x, \mu_j) = \cos\sqrt{\mu_j}\, x$$

よって

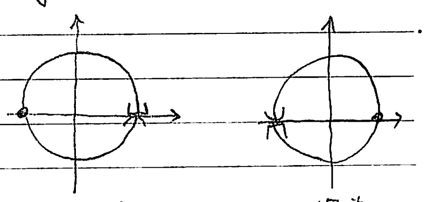
$$\omega(\kappa_1 - 0, \mu_j, 0) = \underbrace{\frac{pj}{2}}_{\sqrt{\mu_j}} \cdot \underbrace{\frac{2\pi q}{p}}_{\kappa_1} = q\pi j \in \pi\mathbb{Z}.$$

$\omega(\kappa_1+0, \mu_j, 0)$ は方程式

$$\mathrm{sgn}(\sin\omega(\kappa_1+0, \mu_j, 0)) = 0, \quad \mathrm{sgn}(\cos\omega(\kappa_1+0, \mu_j, 0)) = \mathrm{sgn}(-1)^{qj}$$

$$\omega(\kappa_1+0, \mu_j, 0) - \omega(\kappa_1-0, \mu_j, 0) \in [-\pi, \pi)$$

をみたすので, $\omega(\kappa_1+0, \mu_j, 0) = q\pi j$.



qj が奇数のとき　　qj が偶数のとき

以下, 同様にして

$$\omega(\kappa_2 - 0, \mu_j, 0) = q\pi j + \sqrt{\mu_j}\,(\kappa_2 - \kappa_1) = p\pi j - q\pi j$$

$$\omega(\kappa_2 + 0, \mu_j, 0) = p\pi j - q\pi j$$

$$\omega(2\pi-0, \mu_j, 0) = p\pi j - q\pi j + \sqrt{\mu_j}\,\underbrace{(2\pi - K_2)}_{= K_1} = p\pi j$$

$$\omega(2\pi+0, \mu_j, 0) = p\pi j$$

を得る. 方程式の周期性と帰納法により $\omega(2\pi k+0, \mu_j, 0) = p\pi k j$ を得る.

$$\therefore\ \rho(\mu_j) = \lim_{k\to\infty} \frac{p\pi k j}{2\pi k} = \frac{pj}{2}. \quad //$$

いくつかの問題

$\boxed{1}$ Relativistic Kronig-Penney-Type Hamiltonian (R.J. Hughes, 1998, IEOP) in $(L^2(\mathbb{R}))^2$

$$(Df)(x) = -ic\sigma_1 \frac{d}{dx} f(x) + \frac{c^2}{2}\sigma_3 f(x), \quad x \in 2\pi\mathbb{Z}, \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Dom}(D) = \left\{ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in \left(H^1(\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z})\right)^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} f_1(x+0) \\ f_2(x+0) \end{pmatrix} = e^{i\theta} \begin{pmatrix} \alpha & i\beta c \\ -i\frac{\gamma}{c} & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x-0) \\ f_2(x-0) \end{pmatrix} \right\}$$

ただし, $\theta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ とする.

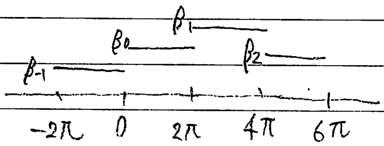
$$\begin{pmatrix} \psi_1(+0) \\ \psi_2(+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{i\alpha}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(-0) \\ \psi_2(-0) \end{pmatrix} \quad (\delta\ 型)$$

$$\begin{pmatrix} \psi_1(+0) \\ \psi_2(+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ic\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(-0) \\ \psi_2(-0) \end{pmatrix} \quad (\delta'\ 型)$$

"回転数"を導入し, バンド端を特徴付けられるか? Coexistence Problem は?

$\boxed{2}$ 概周期性を持つポテンシャルに拡張できるか?

$$(Ly)(x) := -y''(x) + \sum_{l\in\mathbb{Z}} \beta_l\, \chi_{[2\pi l,\, 2\pi(l+1))}(x).$$



$\beta := \{\beta_l\}_{l\in\mathbb{Z}}$ が 概周期的

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $E(\beta) := \overline{\{\beta_{l+k} \mid k \in \mathbb{Z}\}}$ がコンパクト. ここで $\overline{}$ は一様収束位相での閉包とする.