Extremal marginal tracial state

Thm (Birkhoff. 1923)

Doubly stochastic matrices の端点は permutation matrix.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad (1 \leqq {}^\forall j \leqq n) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad (1 \leqq {}^\forall i \leqq n)$$

⟶ これの「一般化」を考える

準備.

Def 1 $\rho \in M_n^*$ が state である (n×n matrix algebra.)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (i) $\rho(A) \geqq 0 \quad (A \geqq 0,\ A \in M_n)$

(ii) $\rho(I) = 1$

$D \in M_n$ が density matrix である

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (1) $D \geqq 0$

(2) $\mathrm{Tr}(D) = 1$ (usual trace)

Thm 2.

${}^\forall \rho$: state on M_n に対し. ${}^{\exists 1} D_\rho \in M_n$: density matrix s.t.

$$\rho(X) = \mathrm{Tr}(D_\rho \cdot X) \quad ({}^\forall X \in M_n).$$

さらに. 凸構造を保存する. i.e.

$$D_{\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2} = \lambda D_{\rho_1} + (1-\lambda) D_{\rho_2}.$$

∵ $(D_\rho)_{ij} = \rho(E_{ji})$ (E_{ij} : matrix unit) とすればよい.

Remark 3.

M_n 上の state 全体は 凸集合で. 端点は pure state.

i.e. density matrix が rank 1 proj.

以下. $M_n \otimes M_n$ 上の state ρ を考える.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tr}_1 : M_n \otimes M_n & \longrightarrow & M_n \\ \Psi & & \Psi \\ A \otimes B & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A) \cdot B \end{array}$$ を partial trace という. Tr_2 も同じ.

$\rho|_{M_n \otimes I} =: \rho_1$ とかく. ρ_2 も同様. すると.

$D_{\rho_1} = \mathrm{Tr}_2 D_\rho$ が成り立つ.

$$\begin{aligned} \because\ \rho_1(X) &= \rho(X \otimes I) = \mathrm{Tr}(D_\rho (X \otimes I)) \\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}_2(D_\rho \cdot X \otimes I)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}_2(D_\rho) \cdot X) \qquad (X \in M_n) \end{aligned}$$

Def 4. state ρ on $M_n \otimes M_n$ が marginal tracial state (MTS)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\rho_1 = \rho_2 = \mathrm{tr}$

$\Longleftrightarrow$ $D_{\rho_1} = D_{\rho_2} = \frac{1}{n} I$.

さらに $\Gamma(n)$ を $M_n \otimes M_n$ 上の MTS 全体とする. 例

問題 $\Gamma(n)$ の端点は何?

$\varphi : M_n \longrightarrow M_n$: $\underset{\substack{\Updownarrow \\ \varphi(I) = I}}{\text{unital}}$ $\underset{(c.p.)}{\text{completely positive}}$ $\underset{\substack{\Updownarrow \\ \mathrm{Tr}(\varphi(X)) = \mathrm{Tr}(X) \\ (\forall X \in M_n)}}{\text{trace preserving}}$ map (UCPT) を考える

Def 5. $\varphi: M_n \to M_n$ が m-positive

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $id_{M_m} \otimes \varphi : M_m \otimes M_n \longrightarrow M_m \otimes M_n$ が positive

$$A \otimes B \longmapsto A \otimes \varphi(B)$$

φ が c.p. map

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ φ が $^\forall m \in \mathbb{N}$ で m-positive.

Thm 6 (Choi).

φ が c.p. $\Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} E_{ij} \otimes \varphi(E_{ij})$ が positive

$\Leftrightarrow {}^\exists v_i \in M_n$ s.t. $\varphi(A) = \sum_{i=1}^{k} v_i^* A v_i$.

さらに. $\{v_i\}$ が linearly indep. なら k が一意に定まるので. $\mathrm{rank}\,\varphi = k$ とする

また. M_n 上の UCPT 全体を $UCPT(n)$ とおく.

$$\pi: UCPT(n) \longrightarrow \Gamma(n)$$
$$\varphi \longmapsto \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} E_{ij} \otimes \varphi(E_{ij})$$

とおくと. 次が成り立つ.

Thm 7. π は bijection, 凸構造を保つ. $\mathrm{rank}\,\varphi = \mathrm{rank}(\pi(\varphi))$

☺ φ が unital より

$$Tr_1\left(\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} E_{ij} \otimes \varphi(E_{ij})\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi(E_{ii}) = \frac{1}{n} I$$

φ が trace preserving より

$$Tr_2\left(\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} E_{ij} \otimes \varphi(E_{ij})\right) = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} Tr(\varphi(E_{ij}))E_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_{ii} = \frac{1}{n} I.$$

単射は明らか. 凸構造も保つ. 全射は省略.

$\{v_\ell\}$ が linearly indep. なら. $\left\{ \sum_{i,j=1}^{n} E_{ij} \otimes v_\ell^* E_{ij} v_\ell \right\}$ も linearly indep. より

rank φ = rank$(\pi(\varphi))$ がわかる //

$\longrightarrow$ $\Gamma(n)$ の端点を調べるのに. UCPT(n) の端点を調べればよい.

Thm 8 (Landau, Streater)

φ が UCPT(n) の端点 $\Leftrightarrow$ $\{ v_i^* v_j \oplus v_j v_i^* \}_{i,j=1}^{k}$ が linearly indep.

Thm 9. $n=2$ のとき. $\Gamma(n)$ の端点は pure state のみ.

$n \geq 3$ のとき. $\Gamma(n)$ の端点で pure state でないものが存在する.

$$v_1 = \sqrt{\frac{n-2}{n-1}} \cdot \sum_{j=2}^{n} e_{jj}$$

$$v_i = \frac{1}{\sqrt{n-1}} (e_{1i} + e_{i1}) \qquad (2 \leq i \leq n)$$ とおいて

$\varphi = \sum_{i=1}^{n} v_i^* \cdot v_i$ とすれば UCPT(n) の端点になる.

Problem 10. Thm 8 から. 端点になる rank の max は

rank $\varphi \leq [\sqrt{2} \cdot n]$ でないといけない. $n = 3, 4$ のときは best possible.

$n \geq 5$ のときは未解決

Def 11. state ρ on $M_n \otimes M_n$ が separable

$\Leftrightarrow {}^\exists \lambda_i > 0$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, ${}^\exists A_i, B_i \in M_n$: density matrix s.t.

$$D_\rho = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot A_i \otimes B_i$$

separable でないとき、entangled という.

例 $D_\rho = \frac{1}{n} \sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ij}$ は entangled.

Remark 12.

・entangled かどうか調べるのは NP-hard.

・ ρ : separable

$\Rightarrow (T \otimes id) D_\rho \geq 0$ 逆は $M_2 \otimes M_2$ と $M_2 \otimes M_3$ のときのみ成立.

転置.

$\Rightarrow \rho_1 \otimes I \geq \rho$ かつ $I \otimes \rho_2 \geq \rho$

$\longrightarrow$ MTS の場合, ρ が separable であるためには. $\frac{1}{n} \cdot I \otimes I \geq \rho$ でないといけないので.

rank $\rho \geq n$ でないといけない.

問題 extremal MTS は entangled ?

Exam 13. 次の state は separable だが.

$$D_\rho = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E_{ii} \otimes E_{ii}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot e^{\frac{2\pi (i-j)}{n} l} E_{ij} \otimes E_{ij} \right)$$

と複数の書き方がある.

Thm 14 (Horodecki, Shor, Ruskai, '03)

ρ : separable $\mathrm{rank}\,\rho_1 = \mathrm{rank}\,\rho = n$ のとき.

$\exists \lambda_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $\exists P_i, Q_i \in M_n$: rank 1 proj. s.t.

$D_\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot P_i \otimes Q_i$ とできる.

この定理より. ρ が MTS かつ separable かつ $\mathrm{rank}\,\rho = n$ であれば.

$\sum \lambda_i P_i = \frac{1}{n} I$ より. P_i は互いに直交し. $\lambda_i = \frac{1}{n}$ でないといけない.

Q_i も同様なので. ユニタリをうまくとれば.

$D_\rho = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} E_{ii} \otimes U^* E_{ii} U$ とできるが. これは EMTS にならない.

(v_i は $v_i(e_j) = \delta_{ij} \cdot U e_i$ になる $v_i^* v_j = 0$ $(i \neq j)$)

Thm 15.

ρ : extremal marginal tracial state, $\mathrm{rank}\,\rho = n+1$ とすると.

$\exists \lambda_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$, $\exists P_i, Q_i \in M_n$: rank 1 proj. s.t

$D_\rho = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i P_i \otimes Q_i$ とできる.

これを使うと次が示せる.

Thm 16.

ρ : EMTS. $\mathrm{rank}\,\rho = n+1$ ならば ρ は entangled.

以下 $n=3$ のときの outline を述べる.

Outline. $U, V \in M_n$: unitary としたとき.

ρ を $(U\otimes V)^* \rho (U\otimes V)$ で変換しても. separable EMTS であることはかわらないので.

P_1 を $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ への proj. P_2 を $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ への proj. P_3 を $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, P_4 を $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ への proj. としてよい.

また. $a_1, b_1, b_2, b_3, c_1 \geq 0$ としておくと. a_i, b_i, c_i が一意に定まる ($\because$ $\sum \lambda_i P_i = \frac{1}{3} I$ より)

これが Q_i にも同じことがいえるので.

$D_\rho = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i P_i \otimes P_i$ としてしまってよい.

これに対応する φ は $v_i = P_i$ となり. 成分は全て実数.

$v_i^* v_j \oplus v_j v_i^* = P_i P_j \oplus P_j P_i = P_i P_j \oplus (P_i P_j)^*$ となる.

$\therefore$ $v_i^* v_j \oplus v_j v_i^*$ が linearly indep. $\Leftrightarrow$ $v_i^* v_j$ が linearly indep.

$\therefore$ extremal にはならない

Problem 17.

rank $\rho \geq n+2$ のとき. separable EMTS は存在するか?