Hartree方程式の散乱作用素とその応用

佐々木浩宣 (千葉大) 2011 9 27

信州数理物理セミナー

§1 導入

▷ 3次元 Hartree eq.

$$\text{(H)} \quad i\partial_t u + \Delta u = (V * |u|^2)u \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3,$$

$u = u(t,x)$, $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, $V = V(x)$, $*$… xの合成積.

〈由来〉 多体 Schrödinger eq. $\;: \Psi(t, x^1, \dots, x^N)$

$\downarrow$ ∘Hartree 近似 $\;: = v^1(t,x^1) \cdots v^N(t,x^N)$

∘単独化

(H)

$V(x)$ … 粒子間の相互作用ポテンシャル

ex.

- ∘ $V = Q\dfrac{1}{|x|}$ $(Q \in \mathbb{R})$ Coulomb ポテンシャル
- ∘ $V = Q\dfrac{1}{|x|^\sigma}$ $(0 < \sigma < 3)$ Riesz 〃
- ∘ $V = Q\dfrac{e^{-\mu|x|}}{|x|}$ $(\mu > 0)$ 湯川 〃

〈ねらい〉 散乱データを用いて，未知なる $V(x)$ を同定する．

▷ 散乱作用素 S に関する応用問題
§3 §5

▷ 自由解を用いて，(H)の非線型性を計る．
§2

§2 自由解

自由 Schrödinger eq. の初期値問題

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = 0, \\ u(0,x) = \varphi(x) \end{cases}$$

を Fourier 変換を用いて解くと，

$$u(t,x) \overset{①}{=} \mathcal{F}^{-1} e^{-it|\xi|^2} \mathcal{F} \varphi(x)$$

$$\overset{②}{=} (4\pi i t)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(\frac{i|x-y|^2}{4t}\right) \varphi(y)\, dy$$

但し，

$$\mathcal{F} f(\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx,$$

を得る（自由解）．これを $U(t)\varphi$ と書こう．

① より $\|U(t)\varphi\|_2 = \|\varphi\|_2$，（$L^2$-保存）

② より $\|U(t)\varphi\|_\infty \leq |4\pi t|^{-\frac{3}{2}} \|\varphi\|_1$

が成り立つ． Riesz-Thorin の補間定理より，$2 \leq p \leq \infty$ に対し，

（L^p-$L^{p'}$ 評価） $\|U(t)\varphi\|_p \leq C|t|^{-3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} \|\varphi\|_{p'}$，$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$

を得る．

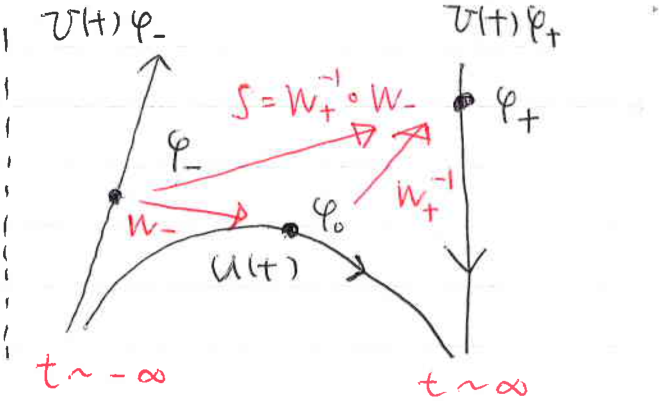
§3 散乱作用素 $\mathcal{S} = W_+^{-1} \circ W_-$

$H^s = H^s(\mathbb{R}^3)$ を Sobolev sp. とする. 即ち,
$H^s = \{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) \ ; \ \langle \xi \rangle^s \mathcal{F} f(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^3) \}$, $\quad \langle \xi \rangle := \sqrt{1+|\xi|^2}$

W_- :『$\varphi_- \in H^1$ が十分小のとき, $\lim_{t \to -\infty} \| u(t) - U(t)\varphi_- \|_{H^1} = 0$ をみたす (H) の sol. $u \in C(\mathbb{R}; H^1)$ が (適当な意味で) 一意に存在する』が真ならば, 波動作用素 $W_- : \varphi_- \mapsto u(0)$ が定まる.

W_+^{-1} :『$\varphi_0 \in H^1$ が十分小のとき, $u(0) = \varphi_0$ かつ $\lim_{t \to +\infty} \| u(t) - U(t)\varphi_+ \|_{H^1} = 0$ をみたす (H) の sol. $u \in C(\mathbb{R}; H^1)$ と $\varphi_+ \in H^1$ が一意に存在する』が真ならば, $W_+^{-1} : \varphi_0 \mapsto \varphi_+$ が定まる.

$\mathcal{S}$: W_- の domain を上手く与えることで,
「W_- の Range $\subset W_+^{-1}$ の domain」
が成り立つとき,
$$\mathcal{S} = W_+^{-1} \circ W_-$$
が定義される.



では, (H) に $\mathcal{S}$ は存在するか? (逆問題)

$$V(x) = Q \frac{1}{|x|^\sigma} \ ; \ \begin{cases} \circ \ 2 \le \sigma < 3 & \cdots \ H^1 \text{で存在} \\ \circ \ 1 < \sigma < 2 & \cdots \ H^1 \text{より狭い或る sp. で存在} \\ \circ \ \sigma \le 1 & \cdots \ \text{存在しない.} \end{cases}$$

$$V(x) = Q \frac{e^{-\mu|x|}}{|x|} \ ; \quad H^s \ (s \geq 0) \text{ で存在する} \ \rightarrow \S 4$$

§4 順問題

<u>Thm.</u> $V(x) = Q\dfrac{e^{-\mu|x|}}{|x|}$ $(Q\in\mathbb{R},\ \mu>0)$ とするとき,

$S : \varphi_- \mapsto \varphi_+$ が H^s $(s\geq 0)$ の小閉球で定まる. □

<Proof>([Strauss 1981]の手法等) $s=0$ (つまり, L^2)のときを示す.

$\|\varphi_-\|_2 \ll 1$ とする.

∘ (H) $\iff$ $u(t) = U(t)\varphi_- - i\displaystyle\int_{-\infty}^{t} U(t-s)\underbrace{F(u(s))}_{(V*|u|^2)u}\,ds$

$\left(=: \Phi[u](t) \right)$ … u は Φ の不動点.

有界連続

∘ $Z = BC(\mathbb{R};L^2)\cap L^3(\mathbb{R};L^{18/5})$ とおくと,

$$\left.\begin{aligned} &\|U(t)\varphi_-\|_Z \leq C\|\varphi_-\|_2, \\ &\left\|\int_{-\infty}^{t} U(t-s)F(u(s))\,ds\right\|_Z \leq C\|F(u)\|_{L^1L^2}, \end{aligned}\right\} \text{Strichartz評価}$$

$\|F(u)\|_{L^1L^2} \leq C\|u\|^3_{L^3L^{18/5}}$ (Hölder, Youngの不等式から)

を得る. これらから, Φは Z の小閉球で縮小写像となっていることがわかる. 更に不動点 u は (H)の sol. となる.

∘ $$S\varphi_- = \varphi_- - i\int_{\mathbb{R}} U(-s)F(u(s))\,ds, \qquad (S)$$

$$\|u(t) - U(t)\varphi_-\|_Z \leq C\|\varphi_-\|_2^3 \qquad (P)$$

が成り立つ.

§5 応用（逆散乱）

・ $(\varphi, S\varphi)$ のデータから、$V(x)$ を同定すること。

5.1 Known Results（一意に再構成）

冪乗型

・ $F(u) = W(x)|u|^{p-1}u$ [Strauss 1974]

・ $F(u) = W_0(x)u + W(x)|u|^{p-1}u$ [Weder 1997]等

適用できず

Hartree型

$W_0 u + (V*|u|^2)u$

形状既知

・ $V = Q\dfrac{1}{|x|^\sigma}$ [Watanabe 2001]等

・ $V = Q\dfrac{e^{-\mu|x|}}{|x|}$ [S. 2008]

形状未知（但し $W_0 \equiv 0$）

・ $V \in L^1$ のとき、$\hat{V}(0)$ を求める [Watanabe-S. 2005]

・ $e^{A|x|}V(x) \in L^1$ & V は radial のとき、($^\exists A>0$) V を求める [S. 2007]

5.2

・ $e^{A|x|}V(x) \in L^1$ のとき、Vを求める [S. to appear]

5.2

仮定：① Vは radial ⇒ $\hat{V}$ も radial

⇒ $\exists_1\ \nu : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$；偶 s.t. $\hat{V}(\xi) = \nu(|\xi|)$ ($\xi \in \mathbb{R}^3$)

② $e^{A|x|}V(x) \in L^1$ ⇒ $\hat{V}$ は analytic で

$$\hat{V}(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{d^m \nu}{d\rho^m}(0)\, |\xi|^m, \quad \xi \sim 0$$

（収束半径は或る正定数以上）

よって、$\dfrac{d^m \nu}{d\rho^m}(0)$ (m；偶) の値を求めればよい。

$\varphi \in \mathcal{S}$ とする．($\mathcal{S}'$)より，　$\varphi_- = \varepsilon\varphi$ のときの sol.

$$\mathcal{S}(\varepsilon\varphi) = \varepsilon\varphi - i\int_{\mathbb{R}} U(-s)\, F(u_\varepsilon(s))\, ds.$$

($\mathcal{S}$)より
$$\| u_\varepsilon(t) - U(t)(\varepsilon\varphi) \|_Z \le C\varepsilon^3 \|\varphi\|_{H^s}^3.$$

これらから，

$$\mathcal{S}(\varepsilon\varphi) - \varepsilon\varphi = -i\varepsilon^3 \int_{\mathbb{R}} U(-s)\, F(U(s)\varphi)\, ds + O(\varepsilon^5)$$

となる．従って，$\psi \in \mathcal{S}$ に対し，

$$J[\varphi,\psi] := \lim_{\varepsilon\to 0} i\varepsilon^{-3} \left\langle (S - \mathrm{id})(\varepsilon\varphi), \psi \right\rangle_2$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \left\langle F(U(s)\varphi), U(s)\psi \right\rangle_2 ds$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{3+1}} \hat{V}(\xi) \underbrace{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \widehat{|U(t)\varphi|^2}(\xi)\, \widehat{\overline{U(t)\varphi}\, U(t)\psi}(\xi)}_{G(t,\xi)}\, d(\xi,t)$$

が成り立つ．以下 $\varphi = \psi$，$J[\varphi,\varphi] =: J[\varphi]$ とおく．
ここで，$\varphi^\lambda(x) = \varphi(\lambda x)$ とすると，

$$U(t)\varphi^\lambda(x) = (U(\lambda^2 t)\varphi)(\lambda x),$$

$$\widehat{|U(t)\varphi^\lambda|^2}(\xi) = \lambda^{-3}\, \widehat{|U(\lambda^2 t)\varphi|^2}(\lambda^{-1}\xi)$$

となるので，

$$J[\varphi^\lambda] = \lambda^{-5} \int_{\mathbb{R}^{3+1}} \hat{V}(\lambda\xi)\, G(t,\xi)\, d(\xi,t)$$

を得る．$\hat{V}(\lambda\xi) = \nu(\lambda\rho)$　$(\rho = |\xi|)$ より，

$$\lambda^5 J[\varphi^\lambda] = \int_{\mathbb{R}^{3+1}} \nu(\lambda\rho)\, G(t,\xi)\, d(\xi,t).$$

従って，

$$\frac{d^m}{d\lambda^m}\left(\lambda^5 J[\varphi^\lambda]\right) = \int_{\mathbb{R}^{3+1}} \frac{d^m V}{d\rho^m}(\lambda\rho)\, \rho^m G(t,\xi)\, d(\xi,t).$$

故に，偶数 m で，

$$\frac{d^m V}{d\rho^m}(0) = \frac{\lim_{\lambda\to 0} \frac{d^m}{d\lambda^m}\left(\lambda^5 J[\varphi^\lambda]\right)}{\int_{\mathbb{R}^{3+1}} |\xi|^m G(t,\xi)\, d(\xi,t)}$$

を得る．（※分子の極限操作回数を，$(m+2)$回から1回に減らすことができる．）

※ V が radial ではないとき… 各 $\partial_\xi^\alpha \hat{V}(0)$ を求める．

① $\cancel{\varphi^\lambda}$ 非等方的スケール変換

② $\alpha \neq$（偶，偶，偶）… $J[\varphi, \psi]$ $\varphi \neq \psi$

③ $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\varphi_3(x_3)$

※ Open ： 上と同様の問題について …

- $F = \underbrace{W_0(x)u}_{} + (V * |u|^2)u$
- Klein-Gordon eq.,
  Semi Relativistic Hartree eq. …