No.

Date 2011 11 29 (火)

# (信州大) キュムラントについて

独立性: 全体の alg を, subalg に分解したときの、その subalg たちの相互関係。混合モーメントの計算を、各 subalg 上での混合モーメントに帰着させる。

非可換な $(\mathcal{A}, \varphi)$ 上でどのように混合モーメントを計算するか?

① 「ふつう」の独立性 (tensor) $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ が独立とは

$$\varphi(XYX'Y'X''Y''\cdots) = \varphi(XX'X''\cdots)\,\varphi(YY'Y''\cdots)$$
$$(\forall X, X', X'', \cdots \in \mathcal{A}_1,\ \forall Y, Y', Y'' \cdots \in \mathcal{A}_2)$$

② 他の可能性:

単調独立性 (monotone)

$$\varphi(XYX'Y'X''Y''\cdots) = (\varphi(Y)\varphi(Y')\varphi(Y'')\cdots) \times \varphi(XX'X''\cdots)$$
$$\forall X, X', X'' \cdots \in \mathcal{A}_1,\ \forall Y, Y', Y'', \cdots \in \mathcal{A}_2.$$

このようなモーメントの計算方法としての独立性は、非常に多くのものがありそうだが、実は「結合律」を満たすものは本質的に4つである。(tensor, monotone, free, boole)

結合律とは、$X, X', \cdots \in \mathcal{A}_1$, $Y, Y', \cdots \in \mathcal{A}_2$, $Z, Z' \cdots \in \mathcal{A}_3$, $\varphi(\ )$に対して

例として

$$\varphi(XYX'ZY'Z'Y'') = \begin{cases} \varphi((XYX')Z(Y')Z'Y'') \\ \varphi(X(Y)X'(ZY'Z'Y'')) \end{cases}$$

$\mathcal{A}_1$ と $\mathcal{A}_2$ をまとめるのと、$\mathcal{A}_2$ と $\mathcal{A}_3$ をまとめるのと 2種類どちらでも計算結果が一致すること。

No.

Date

キュムラント

古典の場合 $X = (X_1, \cdots, X_r)$ として

$$\log \hat{\mu}_X(z) = \log E\left[e^{i(z_1X_1 + \cdots + z_rX_r)}\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_n \leq r} C_{i_1 \cdots i_n} \cdot K_n(X_{i_1}, \cdots, X_{i_n}) z_{i_1} \cdots z_{i_n}$$

例えば $K_1(X) = E(X)$ (mean)

$K_2(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ (covariance).

性質 ① $K_n$ : n-linear.

② $K_n(X_1, \cdots, X_n) = E[X_1 \cdots X_n] + \left[ E[X_{i_1} \cdots X_{i_k}],\ i_1 \leq \cdots \leq i_k,\ k \leq n-1 \text{ の多項式} \right]$

③ もし $\exists I,\ \phi \subsetneq I \subsetneq \{1, \cdots, n\}$.
$\{X_i ; i \in I\}$ と $\{X_i : i \in I^c\}$ が独立ならば

$K_n(X_1, \cdots, X_n) = 0$.

例: X と Y が独立

$\Rightarrow K_2(X, Y) = 0$, $K_3(X, X, Y) = 0$.
$K_3(X, Y, X) = 0$. $K_4(X, Y, X, Y) = 0$ etc.

No.

Date

そこで 自由、ブールの場合にも ①、②、③ をみたす $K_n$ が知られている。($E$は$\varphi$で置きかえる)

単調はどうか? ⇒ むり!

理由: ~~∀~~ $X$と$Y$:独立 $K_n(X) := K_n(X, X, \cdots, X)$

$K_n(X+Y) = K_n(X) + K_n(Y)$? ← $X$と$Y$の扱いが対称!

ところが ~~$X$と$Y$が~~ しかし独立性は非対称。

「$X$と$Y$が独立」と「$Y$と$X$が独立」が区別されねばならない。

⇓

一般化 $\varphi(X_1^{(i)} \cdots X_n^{(i)}) = \varphi(X_1 \cdots X_n)$ をみたすもの

③$'$ : $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}, \cdots$ : $X$の i.i.d. コピー $N.X := X^{(1)} + \cdots + X^{(N)}$

$$K_n(N.X_1, \cdots, N.X_n) = N K_n(X_1, \cdots, X_n) \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

①、②、③$'$ の下でキュムラントは存在し、しかも一意。

$\boxed{\text{一意性}}$ (どの独立性でもOK) 別のキュムラント$\{K_n'\}$を考える。

$$\varphi(X_1 \cdots X_n) = K_n(X_1, \cdots X_n) + [K_1, K_2, \cdots K_{n-1} \text{の2次以上の多項式}]$$

$$= K_n'(X_1, \cdots X_n) + [K_1', K_2', \cdots K_{n-1}' \quad 〃 \quad ]$$

$$\varphi((N.X_1) \cdots (N.X_n)) = N K_n(X_1, \cdots X_n) + [N \text{の2次以上の多項式}]$$

$$= N K_n'(X_1 \cdots X_n) + [N \text{の2次以上の多項式}]$$

が $\forall N$ について正しい ⇒ $N$の係数が一致

⇒ $K_n = K_n'$.

No.

Date

単調キュムラントの存在 (フーリエのような母関数なしでどうやって定義するか？

1. $\varphi((N.X_1)\cdots(N.X_n))$ は Nの多項式になる.

(帰納法) $\varphi(N.X_1) = \varphi(X_1^{(1)} + \cdots + X_1^{(N)}) = N\varphi(X_1)$.

$$\varphi((N.X_1)(N.X_2)) = \varphi((X_1^{(1)} + \cdots + X_1^{(N)})(X_2^{(1)} + \cdots + X_2^{(N)}))$$

$$= N\varphi(X_1X_2) \leftarrow \text{対角線}$$

$$\underbrace{+\sum_{i\neq j}\varphi(X_1^{(i)}X_2^{(j)})} = \sum_{i\neq j}\varphi(X_1)\varphi(X_2)$$

$$= N(N-1)\varphi(X_1)\varphi(X_2)$$

$$= N[\underbrace{\varphi(X_1X_2) - \varphi(X_1)\varphi(X_2)}_{\text{covariance}}] + N^2\varphi(X_1)\varphi(X_2)$$

(一般の n についてもできる)

2. $K_n(X_1, \cdots X_n)$ を $\varphi((N.X_1)\cdots(N.X_n))$ の Nの係数 と定義.

「ポイント」 単調独立性は「非対称」(「互いに独立」が不成立)なので キュムラントの公理を一般化しないといけない

⇒ 新しい視点 (i.i.d. sum に注目した見方)

関連する話

- 独立性 ⇒ 分割. $X_1 \cdots X_n$ の並びから 順序付分割へ
- 母関数.
- 中心極限定理.