C^*環のK理論

Def 1 vector sp. A に. ($/\mathbb{C}$)

積 $\times : A\times A \to A$, $(a,b)\mapsto ab$; $*$-演算 $* : A \to A$, $a\mapsto a^*$; ノルム $\|\cdot\| : A \to \mathbb{R}_+$, $a \mapsto \|a\|$

が定義されていて.以下をみたすとき Aを C^*-algebra という.

$^\forall a, b, c \in A$, $\lambda\in\mathbb{C}$ に対し.

(1) $(ab)c = a(bc)$, $a(b+c) = ab+ac$

$(a+b)c = ac+bc$, $\lambda(ab) = (\lambda a)\cdot b$

(2) $(a+b)^* = a^* + b^*$, $(\lambda a)^* = \bar{\lambda}\cdot a^*$

$a^{**} = a$, $(ab)^* = b^* a^*$

(3) norm について完備.

(4) $\|ab\| \leq \|a\|\cdot\|b\|$, $\|a^* a\| = \|a\|^2$

Rem 2. (1) 一般に $ab \neq ba$

(2) (4) から $\|a\| = \|a^*\|$ が求まる.

(3) $I\in A$ を仮定する.

例1. (1) $n\times n$ 行列. $M_n(\mathbb{C})$ は C^*-alg.

$$a^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \cdots & \overline{a_{n1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

である.

(2). $M_n(\mathbb{C}) \oplus M_m(\mathbb{C})$

$$= \left\{ \left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & b \end{array}\right] \in M_{n+m}(\mathbb{C}) \;\middle|\; a \in M_n(\mathbb{C}),\ b \in M_m(\mathbb{C}) \right\}$$

も C^*-alg.

(3) X : locally cpt Hausdorff sp. ($X = [0,1]$, $\mathbb{R}$ など)

$C(X) = \{ f : X \to \mathbb{C} \mid X$ 上の連続関数 $\}$ は C^*-alg.

ただし. $f^*(x) = \overline{f(x)}$, $f \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x)$

$\|f\| = \sup |f(x)|$ である.

(4). $B(H)$ とその norm closed な subalg. は C^*-alg.

$\longrightarrow$ GNS thm より全ての C^*-alg は これで表せる.

(5) $A_1 \subset A_2 \subset \cdots A_n \subset \cdots$: finite dim. C^*-alg. の列.

with common I and $\|\cdot\|$.

とするとき. $A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$ を AF-alg. という.

以下 A は C^*-alg. とする.

<u>Def 3</u>. $p \in A$ が proj. $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $p = p^* = p^2$.

A の proj. 全体を $P(A)$ でかく.

$u \in A$ が unitary $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $uu^* = u^*u = I$.

A の unitary 全体を $U(A)$ でかく.

例. (1) $M_n(\mathbb{C})$ において.

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$ は proj. とくに I は proj.

(2). $C(X) \ni f$ は.

$f(x) = 0$ or 1 のとき proj.

もちろん連続でないといけないので. $C([0,1])$ の proj は 0 と I のみ.

(3) $M_2(\mathbb{C})$ において.

$$u = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$ は unitary.

(4) $p \in P(A)$, $u \in U(A)$ のとき.

$u^* p u \in P(A)$ である.

目的. C^*-alg を分類すること!

このために C^*-alg. A, B から

$$A \cong B \Rightarrow K_0(A) \cong K_0(B)$$

となる群 $K_0(A), K_0(B)$ を作りたい!

(topology の方にも K-theory はあるよ)

Def 4. $^\forall p, q \in P(A)$ に対し.

$p \sim q$ (p と q が Murray-von Neumann equivalent)

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $^\exists v \in A$ s.t. $p = vv^*$, $q = v^*v$.

例. (1) $M_2(\mathbb{C})$ において.

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ とすると $p \sim q$.

∵ $v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とすればいい.

(2). $p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ と $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ は $p \not\sim I$.

(3). $M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C})$ において.

$$p = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right],\quad q = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{array}\right]$$ は $p \not\sim q$.

Def 5 $$M_n(A) := \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in A \right\}$$ は C^*alg.

この proj を $P(M_n(A)) =: P_n(A)$ とかく.

$n \geq m$ のとき. $p \in P_m(A)$ は

$$p = \left.\left[\begin{array}{c|c} p & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]\right\}n \in P_n(A)$$ と考え. $P_m(A) \subset P_n(A)$ とできる.

ここで.

$P_\infty(A) := \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(A)$ とおく.

$p, q \in P_\infty(A)$ に対し.

$p \sim_0 q$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $p \sim q$ in $P_n(A)$ $(M_n(A))$

さらに、$p \in P_n(A)$, $q \in P_m(A)$ に対し、

$$p \oplus q = \mathrm{diag}(p, q) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} p & 0 \\ \hline 0 & q \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \}n \\ \}m \end{array} \in P_{n+m}(A)$$ で def. する

例 (1) $M_2(\mathbb{C})$ において、$p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とすると、

$$p \oplus p = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \in P_2(M_2(\mathbb{C}))$$ となる。ここで、$I \sim_0 p \oplus p$ である。

$$I = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ と考えると、$v = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ として 同値になる。

Prop 6. $p, q, r, p', q' \in P_\infty(A)$ に対し、次がいえる。

(1) $p \sim_0 p'$ かつ $q \sim_0 q' \Rightarrow p \oplus q \sim_0 p' \oplus q'$

(2) $p \oplus q \sim_0 q \oplus p$

(3) $(p \oplus q) \oplus r = p \oplus (q \oplus r)$

∵ (1) $p \sim p'$ in $P_n(A)$, $q \sim q'$ in $P_m(A)$ とすると、

$\exists v \in M_n(A)$ s.t. $p = vv^*$, $p' = v^*v$

$\exists w \in M_m(A)$ s.t. $q = ww^*$, $q' = w^*w$ とできる。

ここで、$x = v \oplus w$ とおくと、

$xx^* = vv^* \oplus ww^* = p \oplus q$

$x^*x = v^*v \oplus w^*w = p' \oplus q'$ より 示せた。

(2) $v = \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{n} & \overbrace{\quad}^{m} \end{array}$

$$v = \left[\begin{array}{c|c} 0 & q \\ \hline p & 0 \end{array}\right]\begin{array}{l} \}m \\ \}n \end{array}$$

とすれば $vv^* = p \oplus q$, $v^*v = q \oplus p$ となる.

(3) は明らか.

<u>Def 7</u>. $K_0^+(A) := P_\infty(A)/\sim_0$ とし. $p \in P_\infty(A)$ に対し同値類を

$K_0^+(A) \ni [p]$ でかく. ここに.

$[p]+[q] := [p \oplus q]$ で和を定義すると.

$K_0^+(A)$ は可換な半群になる.

<u>例</u>. (1) $M_n(\mathbb{C})$ を考える. 例えば.

$$p = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 0 & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & 0 & & & & 1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \sim q = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & 0 & & & & 0 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

のように.

対角にある 1 の個数を左上によせることができる.

$\longrightarrow$ $p \sim_0 q \Leftrightarrow$ 対角にある1の個数が一致.

$\longrightarrow$ $[p] = k$ ← 1の個数 とできる. これより

$K_0^+(M_n(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}_+$ となる.

(2) $M_n(\mathbb{C}) \oplus M_m(\mathbb{C})$ を考える.

$$p = \left[\begin{array}{c|c} p_1 & 0 \\ \hline 0 & p_2 \end{array}\right]$$

とできているが. (1) と同様にして p_1 の 1の個数, p_2 の 1の個数

というわけかたができる. なので $K_0^+(M_n(\mathbb{C}) \oplus M_m(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}_+ \oplus \mathbb{Z}_+$ となる.

Def 8. 可換な半群から群を作れる. それを $K_0(A)$ とし. A の K_0群という.

Rem. $K_0^+(A) \times K_0^+(A) \ni (t_1, s_1) = t_1 - s_1$ に同値関係
$(t_2, s_2) = t_2 - s_2$

$t_1 - s_1 \sim_G t_2 - s_2 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} t_1 + s_2 = t_2 + s_1$ を入れる.

$K_0(A) = K_0^+(A) \times K_0^+(A) / \sim_G$ である.

和は $(t_1, s_1) + (t_2, s_2) = (t_1 + t_2, s_1 + s_2)$ で定義.

例 (1) $K_0(M_n(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$

(2) $K_0(M_n(\mathbb{C}) \oplus M_m(\mathbb{C})) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Thm 9. $A \underset{\pi}{\cong} B \Rightarrow K_0(A) \underset{K_0(\pi)}{\cong} K_0(B)$ である.

$\because$ $K_0^+(A) \cong K_0^+(B)$ のみ示す.

$$\begin{array}{ccc} K_0^+(\pi) : K_0^+(A) & \longrightarrow & K_0^+(B) \\ \cup & & \cup \\ [p] & \longmapsto & [\pi(p)] \end{array}$$ とする.

Well-defind $p \sim q \Leftrightarrow \pi(p) \sim \pi(q)$ より well-defind.

injective $[\pi(p)] = [\pi(q)] \Leftrightarrow \pi(p) \sim \pi(q) \Leftrightarrow p \sim q \Leftrightarrow [p] = [q]$

surjective $\forall [q] \in K_0^+(B)$ に対し. $\exists p \in P_\infty(A)$ s.t $\pi(p) = q$.

ここで $K_0^+(\pi)([p]) = [q]$ より ok.

homo. $K_0^+(\pi)([p] + [q]) = K_0^+(\pi)([p \oplus q]) = [\pi(p) \oplus \pi(q)]$

$= [\pi(p)] \oplus [\pi(q)] = K_0^+(\pi)[p] + K_0^+(\pi) \cdot [q]$. //

Rem 10: K_0群だけだと. $M_n(\mathbb{C})$ も分類できないが. これに.

$I \in M_n(\mathbb{C})$ がどこにいくかの情報を付加すると.

$(K_0(M_n(\mathbb{C})), [I_{M_n}]) = (\mathbb{Z}, n)$

$(K_0(M_m(\mathbb{C})), [I_{M_m}]) = (\mathbb{Z}, m)$ となり分類可能.

$(K_0, K_0^+, [I])$ で AF-alg. が分類できる.

Rem 11. $p \sim_h q \in P_\infty(A)$ も def できる.

$p \sim_h q$

$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $x : [0,1] \longrightarrow P_\infty(A)$; cont.

$x(0) = p$, $x(1) = q$,

ここで. $p \sim_h q \Rightarrow p \sim q$.

$p \sim q \Rightarrow p \sim_h q$ in $M_4(A)$ $(p, q \in P(A))$ である.

これより $P_\infty(A)/\sim \; = P_\infty(A)/\sim_h$ である.

Rem 12. K_1群は $U_n(A) = U(M_n(A))$ に対し $\sim_h$ を使って同様に def.