C^*環のK理論.

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ などは C^*-alg. とする.

GNS表現から. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ は $B(H)$ の norm closed な $*$-alg. としてよい.

Thm 1. $\mathcal{A}$ が finite dimensional $\Rightarrow$ $\mathcal{A} \simeq \bigoplus_{i=1}^{K} M_{n_i}$

isomorphic

(∵) まず. $\{P_i\}_{i=1}^{N} \subset \mathcal{A}$: minimal proj.s で.

$\sum_{i=1}^{N} P_i = I$ となるものが存在する.

(∵) $A \in \mathcal{A}_{sa}$ の spectrum は $\dim \mathcal{A} < +\infty$ より有限集合.

self adjoint

この eigen proj. を $\{Q_j\}$ とする.

case 1 $\quad {}^\forall B \in \mathcal{A}_{sa}$ に対し. $Q_j B Q_j = \alpha Q_j$ なら. Q_j は minimal proj.

case 2 $\quad {}^\exists B \in \mathcal{A}_{sa}$ s.t $\quad Q_j B Q_j \neq \alpha Q_j$ なら.

$Q_j B Q_j$ の spectrum proj. を使い. Q_j を分割できる.

これらの操作をくり返すと. $\{P_i\}$ ができる.

次に. $\{1, \cdots, N\}$ に次で同値関係を入れる.

$i \sim j \overset{def}{\Longleftrightarrow} {}^\exists A \in \mathcal{A}$ s.t $\quad P_i A P_j \neq 0$.

$i \sim i$ と. $i \sim j \Rightarrow j \sim i$ は明らか.

$P_i A P_j \neq 0$ なら. $0 \neq P_i A P_j (P_i A P_j)^* = P_i A P_j A^* P_i = \alpha P_i$ より.

$P_j B P_k \neq 0$ とすると. ($i \sim j$, $j \sim k$ とすると)

$P_i A P_j \cdot P_j B P_k (P_i A P_j \cdot P_j B P_k)^*$

$= P_i A \underbrace{P_j B P_k B^* P_j}_{\beta P_j \text{ とできる}} A^* P_i = \beta \cdot P_i A P_j A^* P_i = \alpha\beta P_i \neq 0$ となる.

$\therefore i \sim k$.

これで、$\{1,\cdots,N\}$ をグループ分けし、$\{\overbrace{1,\cdots,n_1}^{n_1\text{コ}} | \overbrace{n_1+1,\cdots,n_1+n_2}^{n_2\text{コ}} | n_1+n_2+1,\cdots,\sum_{i=1}^{K} n_i \overset{N}{=}\}$ とする。

今 $\{1,\cdots,n_1\}$ を考えてみると、

$2 \leq {}^\forall j \leq n_1$ に対し $^\exists A_j \in \mathcal{A}$ s.t. $P_1 A_j P_j \neq 0$, $P_1 A_j P_j A_j^* P_1 = P_1$ とできる

今 $E_{1j} = P_1 A_j P_j$ とし、 (E_{11} は $A_1 = P_1$ と考えると同様にできる)

$E_{ij} = E_{1i}^* E_{1j}$ とおくと、$P_{ii} = E_{ii}$ かつ $\{E_{ij}\}$ が matrix unit になる

$\because$ $E_{ij} E_{kl} = E_{1i}^* E_{1j} E_{1k}^* E_{1l}$

$$= P_i A_i^* \underbrace{P_1 P_1 A_j \overbrace{P_j P_k}^{\delta_{jk}\cdot P_j} A_k^* P_1 P_1}_{P_1} A_l P_l$$

$$= \delta_{jk} \cdot E_{1i}^* E_{1l} = \delta_{jk} \cdot E_{il}$$

また $P_{ii} = P_i A_i^* P_1 A_i P_i = \alpha \cdot P_i$ となるが、

$E_{11} = E_{1i} E_{1i}^*$ が proj. より、上も proj. $\therefore \alpha = 1$ である。

$\hookrightarrow \sigma(AB) \cup \{0\} = \sigma(BA) \cup \{0\}$ より

これを $E_{ij}^{(1)}$ とかく。k番目のグループで作る matrix units を $E_{ij}^{(k)}$ でかく。

今 $Q_k = \sum_{i=1}^{n_k} E_{ii}^{(k)}$ とおくと、同値関係の定義と、P_i が minimal proj より

$^\forall A \in \mathcal{A}$ は、

$$A = \sum_{k=1}^{K} Q_k \cdot A Q_k = \sum_{k=1}^{K} \cdot \sum_{i,j=1}^{n_k} P_i A P_j = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i,j=1}^{n_k} a_{ij}^{(k)} \cdot E_{ij}^{(k)} \quad ({}^\exists a_{ij}^{(k)} \in \mathbb{C})$$

とできるので、$\mathcal{A} \simeq \bigoplus_{i=1}^{K} M_{n_i}$ がわかる

$^\forall A \in \mathcal{A}$ に対し

$P_i A P_j = \alpha E_{ij}^{(k)}$ とできる

(要証明)

$|P_i A P_j|^2 = t P_i$,

$P_i A P_j E_{ji} = e^{i\theta} \sqrt{t} P_i$ とすると

$P_i A P_j = e^{i\theta} \sqrt{t} \cdot E_{ij}$

<u>Thm 2</u> . $\mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^{K} M_{n_i}$, $\mathcal{B} = \bigoplus_{j=1}^{L} M_{m_j}$ とし.

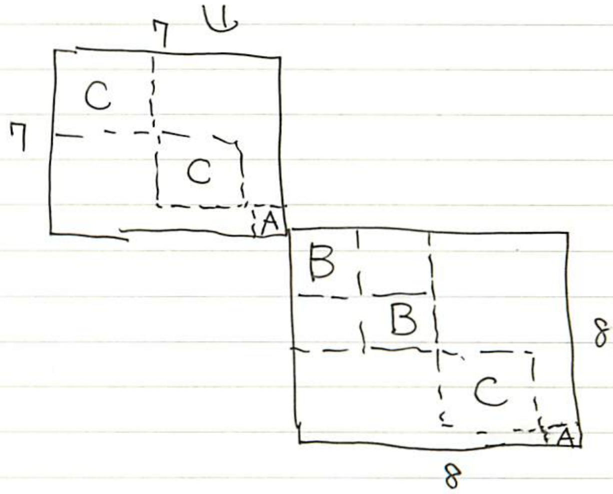
$\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$: $\overset{\text{unital}}{\text{homo}}$. とすると. $\exists A = (a_{ij}) \in M_{LK}(\mathbb{N} \cup \{0\})$

s.t. $A \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_L \end{bmatrix}$ かつ. $\varphi(\mathcal{A}) \simeq_u \bigoplus_{j=1}^{L} \left(\bigoplus_{i=1}^{K} M_{n_i} \otimes I_{a_{ji}} \right)$

unitary equivalent.　　$a_{ji} = 0$ のときは 0

イメージ $\mathcal{A} = \mathbb{C} \oplus M_2 \oplus M_3 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B} = M_7 \oplus M_8$

$\quad A \oplus B \oplus C \longmapsto$



のように. なっている.

㊟ まず. $\varphi : M_n \to M_m$: homo を考える.

$\{E_{ij}\} \subset M_n$ を matrix units として.

$Tr(\varphi(E_{ii})) = k$ とする. $\{\varphi(E_{ii})\}$ は $\overset{\text{orthogonal}}{\text{proj.}}$ なので.

$\{F_{ij}\} \subset M_m$: matrix units を.

$\varphi(E_{ii}) = \sum_{j=1}^{k} F_{k(i-1)+j,\, k(i-1)+j}$ となるようとれる　　対角化をしているだけなので, unitary equ.

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} \varphi(E_{11}) & & & \\ & \varphi(E_{22}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(E_{nn}) \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}k \\ \}k \\ \vdots \\ \}k \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} I_k & & & \\ & I_k & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_k \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

さらに $\varphi(E_{ij}) = \sum_{l=1}^{k} F_{k(i-1)+l,\,k(j-1)+l}$ となるようにとれる

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{\varphi(E_{11})} & \boxed{\varphi(E_{12})} & \\ & \boxed{\varphi(E_{22})} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

$\varphi(E_{12})^*\varphi(E_{12}) = \varphi(E_{22})$

$\varphi(E_{12})\varphi(E_{12})^* = \varphi(E_{11})$ なので

$\varphi(E_{12}) \in M_k$ とみたとき unitary になる。

⇝ unitary equivalence を使うと 上のようにできる。

$U_i =: \varphi(E_{1i}) \in M_k$ とし、

$U = \bigoplus_{i=1}^{k} U_i \oplus I_{m-nk}$ とする。

これより $\varphi(A) = A \otimes I_k$ と同一視できる。

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{A} & & & \\ & \boxed{A} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A} \\ & & & & * \end{bmatrix}$$

次に $\varphi : \bigoplus_{i=1}^{K} M_{n_i} \to M_m$: unital homo とする。

上のギロンから $\varphi(\bigoplus_{i=1}^{K} A_i) = \bigoplus A_i \otimes I_{k_i}$ としてよく、

上で k にあたるもの。

また unital から $\sum n_i \cdot k_i = m$ がわかる。さらに一般に

$\varphi : \bigoplus_{i=1}^{K} M_{n_i} \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{L} M_{m_j}$ とすると $\exists a_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ s.t.

$\varphi(\bigoplus_{i=1}^{K} A_i) = \bigoplus_{j=1}^{L} \left(\bigoplus_{i=1}^{K} A_i \otimes I_{a_{ji}} \right)$ かつ $\sum_{i=1}^{K} n_i \cdot a_{ji} = m_j$ となる //

⇝ $A \to B$: unital homo は a_{ij} できまる。

<u>Def 3</u> $\mathcal{A}_n$: finite dim. C^*-alg. with common I とし．

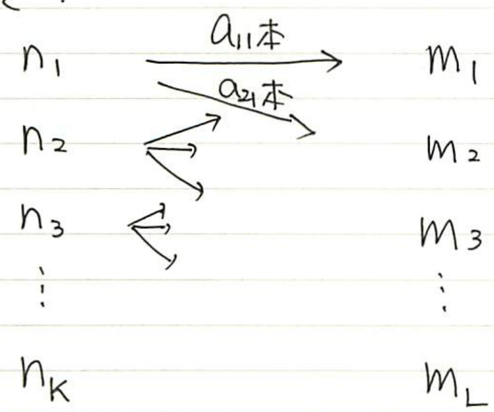
$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{A}_n \subset \cdots$ という列に対し

$\mathcal{A} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n}^{\|\cdot\|}$ を AF-alg. という．

今．$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ を $\mathcal{A}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}_2$: inj. unital homo と考えると．Thm1, 2より

$\mathcal{A}_1 = \bigoplus_{i=1}^{K} M_{n_i}$，$\mathcal{A}_2 = \bigoplus_{j=1}^{L} M_{m_j}$，$\varphi$ は行列 $A = a_{ij}$ で表されるとできる．

これを．



というグラフで表す．

AF-alg. はこのグラフが無限に続くことになる．これを $\mathcal{A}$ の Bratteli diagram という．

<u>例</u>(1) $\mathcal{A}_n = \overset{n}{\otimes} M_2$ とし．$\mathcal{A}_n \overset{\varphi_n}{\subset} \mathcal{A}_{n+1}$ が

$\varphi_n(A) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} = A \otimes I \in \overset{n+1}{\otimes} M_2$ で与えられるとき．Bratteli diag. は

$n=0 \qquad n=1 \qquad n=2$

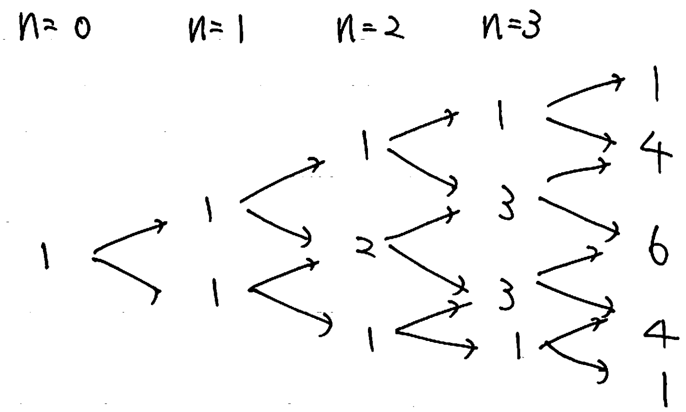
$$1 \rightrightarrows 2 \rightrightarrows 4 \rightrightarrows 8 \rightrightarrows 16 \rightrightarrows \cdots$$ となる．

例(2) $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{it} \end{bmatrix} \middle| \ 0 \leq t < 2\pi \right\}$ とし．

$\mathcal{A}_n = \overset{n}{\otimes} M_2 = \left\{ A \in \overset{n}{\otimes} M_2 \ \middle| \ U^{\otimes n *} A U^{\otimes n} = A \ ,\ {}^\forall U \in G \right\}$ とおく．

すると．$\mathcal{A}_1 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$，$\mathcal{A}_2 = \mathbb{C} \oplus M_2 \oplus \mathbb{C}$，$\mathcal{A}_3 = \mathbb{C} \oplus M_3 \oplus M_3 \oplus \mathbb{C}$ となり

Bratteli diag. は



となる.

<u>Thm 4</u>. AF-alg. A, B の Bratteli diag. が一致すれば, $A \simeq B$.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, hook, "\alpha_1"] \arrow[d, "\psi_1"] & A_2 \arrow[r, hook, "\alpha_2"] \arrow[d, "\psi_2"] & A_3 \arrow[r, hook, "\alpha_3"] \arrow[d, "\psi_3"] & A_4 \arrow[r, hook, "\alpha_4"] \arrow[d, "\psi_4"] & \cdots \arrow[r, hook] & A \\
B_1 \arrow[r, hook, "\beta_1"'] & B_2 \arrow[r, hook, "\beta_2"'] & B_3 \arrow[r, hook, "\beta_3"'] & B_4 \arrow[r, hook, "\beta_4"'] & \arrow[r, hook] & B
\end{tikzcd}$$

上が commutative になるように ψ_i を作りたい.

まず, $\varphi_i : A_i \simeq B_i$: canonical iso. とすると.

$\varphi_{i+1}\alpha_i : A_i \to B_{i+1}$

$\beta_i \cdot \varphi_i : A_i \to B_{i+1}$

} unital inj. homo かつ Bratteli diag. が一致より $\exists U_{i+1} \in B_{i+1}$: unitary s.t.

$$\beta_i \cdot \varphi_i = Ad(U_{i+1})\varphi_{i+1}\alpha_i$$ とできる.

今. $\psi_1 = \varphi_1$, $V_1 = I$,

$$V_{i+1} = \beta_i(V_i)U_{i+1}, \quad \psi_{i+1} = Ad(V_{i+1})\varphi_{i+1}$$ とすると.

$$\beta_i \cdot \psi_i = \beta_i \cdot Ad(V_i)\cdot\varphi_i = Ad(\beta_i(V_i))\cdot\beta_i\varphi_i = Ad(\beta_i(V_i))\cdot Ad(U_{i+1})\varphi_{i+1}\alpha_i$$
$$= Ad(\beta_i(V_i)U_{i+1})\varphi_{i+1}\alpha_i = \psi_{i+1}\alpha_i$$ となり commutative.

今 $\psi = \bigcup \psi_i : A \to B$ とすれば, これは $*$-iso になる.

<u>K_0群の復習</u>. unital C^*alg. $\mathcal{A}$ に対し.

$P_\infty(\mathcal{A}) = \{ p \in M_n \otimes \mathcal{A} \mid p = p^* = p^2 \}$ とし

($n \leq m$ のとき. 自然に $M_n \otimes \mathcal{A} \subset M_m \otimes \mathcal{A}$ とみている)

$p \sim q$ in $P_\infty(\mathcal{A})$ (von Neumann equi)

$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $^\exists v \in M_n \otimes \mathcal{A}$ ($^\exists n \in \mathbb{N}$) s.t.

$p = vv^*$, $q = v^*v$. で同値関係を入れ, 同値類を $[p]$ とする

$D = \{ [p] \mid p \in P_\infty(\mathcal{A}) \}$. に和を

$[p] + [q] := [p \oplus q]$ で入れると. Dは abelian semi-grp.

$K_0(\mathcal{A})$ を Dから作られる Grothendieck grp. とする.

Rem $D \times D = D - D \ni [p] - [q]$ に対し.

$[p] - [q] \sim_D [r] - [s] \overset{def}{\Leftrightarrow} {}^\exists [t] \in D$ s.t $[p] + [s] + [t] = [r] + [q] + [t]$

とし. $K_0(\mathcal{A}) = D - D/\sim_D$ とおく.

このとき. $[p] \sim_D [q] \Leftrightarrow {}^\exists [r] \in D$ s.t $[p] + [r] = [q] + [r]$

$\Leftrightarrow {}^\exists r \in P_\infty(\mathcal{A})$ s.t $p + r \sim q + r$

$\overset{def}{\Leftrightarrow} p \sim_s q$ とし. 同値類を $[p]_0$ とし.

$K_0^+(\mathcal{A}) = \{ [p]_0 \mid p \in P_\infty(\mathcal{A}) \}$ とすると

$K_0(\mathcal{A}) = K_0^+(\mathcal{A}) - K_0^+(\mathcal{A}) = \{ [p]_0 - [q]_0 \mid p, q \in P_\infty(\mathcal{A}) \}$ とできる.

<u>例</u> $\mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^{K} M_{n_i}$ について.

$(K_0(\mathcal{A}), K_0^+(\mathcal{A}), [I]_0) = (\mathbb{Z}^K, \mathbb{Z}_+^K, n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_K)$ である

$\varphi : A \to B$: homo に対し．

$K_0(\varphi) : K_0(A) \longrightarrow K_0(B)$ が自然に定義でき，

$[p]_0 - [q]_0 \mapsto [\varphi(p)]_0 - [\varphi(q)]_0$　　$A \simeq B \Rightarrow K_0(A) \simeq K_0(B)$．

<u>Inductive limits</u>．

$$A_1 \overset{\varphi_1}{\hookrightarrow} A_2 \overset{\varphi_2}{\hookrightarrow} A_3 \overset{\varphi_3}{\hookrightarrow} \cdots \hookrightarrow A$$

↓ これから

$$K_0(A_1) \xrightarrow{K_0(\varphi_1)} K_0(A_2) \xrightarrow{K_0(\varphi_2)} K_0(A_3) \xrightarrow{K_0(\varphi_3)} \cdots \longrightarrow G$$

が考えられるので．abelian grp. の inductive limit を考える．

Inductive sequence

$$G_1 \xrightarrow{\varphi_1} G_2 \xrightarrow{\varphi_2} G_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots$$ に対し．

次をみたす $(G, \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty})$ をこの inductive limit という．

(1)

$$\begin{tikzcd} G_n \arrow[rr, "\varphi_n"] \arrow[dr, "\mu_n"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & G_{n+1} \arrow[dl, "\mu_{n+1}"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

$\mu_n : G_n \longrightarrow G$: homo．

(2) もし．$(H, \{\lambda_n\})$ も (1) をみたせば．

$$\begin{tikzcd} & G_n \arrow[dl, "\mu_n"'] \arrow[dr, "\lambda_n"] & \\ G \arrow[rr, "\exists ! \lambda"'] & \arrow[u, phantom, "\circlearrowright"] & H \end{tikzcd}$$

とできる．これを $\varinjlim (G_n, \varphi_n)$ とかく

このとき $G = \bigcup \mu_n(G_n)$

Thm5 $\mathcal{A}_1 \overset{\varphi_1}{\hookrightarrow} \mathcal{A}_2 \overset{\varphi_2}{\hookrightarrow} \cdots \hookrightarrow \mathcal{A}$ とするとき.

$$K_0(\mathcal{A}) \simeq \varinjlim (K_0(\mathcal{A}_n), K_0(\varphi_n))$$

これを示すのに Lemma を1つ用意する.

Lemma 6. $p, q \in P(\mathcal{A})$ に対し. $\|p-q\| < \frac{1}{2} \Rightarrow p \sim q$.

∵ $z = pq + (1-p)(1-q)$ とすると.

$\|z-1\| = \|pq + 1 - p - q + pq - 1\| = \|pq - p + pq - q\|$

$= \|p(q-p) + (p-q)q\| \leq 2\cdot\|p-q\| < 1$ より z は invertible

今 $z = u\cdot|z|$ とすると. $|z|q = q|z|$ より

$uqu^* = z\cdot|z|^{-1}\cdot q\,u^* = z\cdot q\cdot|z|^{-1}\cdot u^* = pz|z|^{-1}u^*$ $v = uq$ とおく

$= puu^* = p$ となり. $p \sim q$ がわかる

Proof of thm5.

今. $\lambda_n : \mathcal{A}_n \hookrightarrow \mathcal{A}$: canonical inj. とすると.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_n \arrow[r, hook, "\varphi_n"] \arrow[dr, "\lambda_n"'] & \mathcal{A}_{n+1} \arrow[d, "\lambda_{n+1}"] \\ & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

より

$$\begin{tikzcd} K_0(\mathcal{A}_n) \arrow[r, hook, "K_0(\varphi_n)"] \arrow[dr, "K_0(\lambda_n)"'] & K_0(\mathcal{A}_{n+1}) \arrow[d, "K_0(\lambda_{n+1})"] \\ & K_0(\mathcal{A}) \end{tikzcd}$$

となる.

∴ $\exists \lambda : \varinjlim K_0(\mathcal{A}_n) \longrightarrow K_0(\mathcal{A})$ s.t.

$$\begin{tikzcd} & K_0(\mathcal{A}_n) \arrow[dl, "\mu_n"'] \arrow[dr, "K_0(\lambda_n)"] & \\ \varinjlim K_0(\mathcal{A}_n) \arrow[rr, "\lambda"] & & K_0(\mathcal{A}) \end{tikzcd}$$

となる.

以下. λ が isomorphism を示す.

surj. $K_0(\mathcal{A}) \ni [p]_0$ をとる. 今. $p \in \mathcal{A}$ に対し. ${}^\exists n \in \mathbb{N}$, ${}^\exists x \in \mathcal{A}_n$ s.t $x = x^*$

$\|p-x\| < \frac{1}{4}$ とできる. すると. $\|(p-\lambda I)^{-1}(B-\lambda I)-1\| = \|(p-\lambda I)^{-1}(B-\lambda I-(p-\lambda I))\| \leqq \frac{1}{4}\cdot\|(p-\lambda I)^{-1}\|$.

$\sigma(x) \subset (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \cup (\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$ とできるので. これが1以下なら invertible

q を $[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$ の sepctrum proj とすると. $\|x-q\| < \frac{1}{4}$ である

Lemma 6 より

$p \sim q$ なので. $[p]_0 = [q]_0$ である. これより

$[p]_0 = [q]_0 = K_0(\lambda_n)[q]_0 = \lambda\cdot\mu_n[q]_0$ となる $\therefore$ surj.

inj. $\lambda(g) = 0$ $(G \ni g)$ とすると. ${}^\exists n \in \mathbb{N}$, $x \in K_0(\mathcal{A}_n)$ s.t.

$\mu_n(x) = g$. 今. $x = [p]_0 - [q]_0$ とすると.

$0 = \lambda(\mu_n([p]_0 - [q]_0))$

$= K_0(\lambda_n)([p]_0 - [q]_0)$

$= [p]_0 - [q]_0$ $\therefore p \sim_s q$ in $\mathcal{A}$.

$\therefore {}^\exists r \in \mathcal{A}$ s.t $p \oplus r \sim q \oplus r$ in $\mathcal{A}$

surjのときと同様に $r \in \mathcal{A}_n$ としてよい (nはとり直す)

今 ${}^\exists v \in \mathcal{A}$ s.t. $vv^* = p \oplus r$, $v^*v = q \oplus r$. これに対し.

${}^\exists y \in \mathcal{A}_n$ s.t $\|v-y\| < \frac{1}{4}$, $pyq = y$ とできる.

今. $y = u\cdot|y|$, $\ker u = \ker y$, $\operatorname{ran} u = \operatorname{ran} y$ととれば.

$uu^* = p \oplus r$ $u^*u = q \oplus r$ となり $p \sim_s q$ in $\mathcal{A}_n$ となる.

$\therefore x = 0$. $\therefore g = 0$ である

(このとき $K_0^+(\mathcal{A}) = \bigcup K_0^+(\mathcal{A}_n)$ でもある)