C^*-環のK理論

K_0群の復習.

$P_\infty(A) = \{ p \in M_n \otimes A \mid p = p^* = p^2,\ n \in \mathbb{N} \}$ とし.

$p \sim q$

$\Leftrightarrow {}^\exists v \in M_n \otimes A$ s.t $p = vv^*$ $q = v^*v$.

$p \sim_s q$ $\longrightarrow$ 同値類を $[p]_0$.

$\Leftrightarrow {}^\exists r \in P_\infty(A)$ s.t. $p \oplus r \sim q \oplus r$.

$K_0(A) = \{ [p]_0 - [q]_0 \mid p, q \in P_\infty(A) \}$

$K_0^+(A) = \{ [p]_0 \mid p \in P_\infty(A) \}$

φ_{nm} とかく

$$\begin{tikzcd} G_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[rrr, bend left, "\varphi_{nm}"] & G_{n+1} \arrow[r, "\varphi_{n+1}"] & \cdots \arrow[r] & G_m \end{tikzcd}$$

Inductive limit (Abelian grp)

$G_1 \xrightarrow{\varphi_1} G_2 \xrightarrow{\varphi_2} G_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots \longrightarrow G$. に対し.

$(G, \{\mu_n\}_{n=1}^\infty)$ を inductive limit. という.

$\mu_n : G_n \longrightarrow G$

(1)
$$\begin{tikzcd} G_n \arrow[rr, "\varphi_n"] \arrow[dr, "\mu_n"'] & & G_{n+1} \arrow[dl, "\mu_{n+1}"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

(2) $(H, \{\lambda_n\})$ も (1) をみたすなら.

$$\begin{tikzcd} & G_n \arrow[dl, "\mu_n"'] \arrow[dr, "\lambda_n"] & \\ G \arrow[rr, "{}^\exists! \lambda"'] & & H \end{tikzcd}$$

とできる.

このとき. $G = \bigcup \mu_n(G_n)$ である. さらに次の lemma が成り立つ

<u>Lemma 1</u>. $g \in G_n$ に対し. $\mu_n(g) = 0$ ならば.
$^\exists m \geq n$ s.t $\varphi_{nm}(g) = 0$.

<u>AF-alg</u>. A_n : finite dim. C^*-alg. に embedding (unital inj. homo)

$$A_1 \xhookrightarrow{\alpha_{12}} A_2 \xhookrightarrow{\alpha_{23}} A_3 \xhookrightarrow{\alpha_{34}} A_4 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow A = \overline{\cup A_n}^{\|\cdot\|}$$

$\alpha_{mn} : A_n \hookrightarrow A_m$, $\alpha_n : A_n \hookrightarrow A$ とする.

<u>Thm 2</u>. $A = \bigoplus_{i=1}^{K} M_{n_i}$, $B = \bigoplus_{j=1}^{L} M_{m_j}$, $\varphi : A \to B$: unital homo. とすると.

$^\exists A = [a_{ij}] \in M_{LK}(\{0\} \cup \mathbb{N})$ s.t.

$$A \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_L \end{bmatrix}$$ かつ $\varphi \simeq_u \bigoplus_{j=1}^{L} \left(\bigoplus_{i=1}^{K} M_{n_i} \otimes I_{a_{ji}} \right)$ とできる.

<u>Lemma 3</u>. $p, q \in P_\infty(A)$ に対し. $\|p-q\| < \frac{1}{2} \Rightarrow p \sim q$.

<u>Thm 4</u>. $A_1 \xhookrightarrow{\alpha_{12}} A_2 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow A$ のとき

$$K_0(A) \simeq \varinjlim (K_0(A_n), K_0(\alpha_{n,n+1})) = (\varinjlim K_0(A_n), \mu_n)$$

(∵)

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[rr, "\alpha_{n,n+1}"] \arrow[dr, "\alpha_n"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & A_{n+1} \arrow[dl, "\alpha_{n+1}"] \\ & A & \end{tikzcd}$$ より

$$\begin{tikzcd} K_0(A_n) \arrow[rr, "K_0(\alpha_{n,n+1})"] \arrow[dr, "K_0(\alpha_n)"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & K_0(A_{n+1}) \arrow[dl, "K_0(\alpha_{n+1})"] \\ & K_0(A) & \end{tikzcd}$$ なので.

$^{\exists 1} \lambda : \varinjlim K_0(A_n) \longrightarrow K_0(A)$ s.t

$$\begin{tikzcd} & K_0(A_n) \arrow[dl, "\mu_n"'] \arrow[dr, "K_0(\alpha_n)"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\ \varinjlim K_0(A_n) \arrow[rr, "\lambda"] & & K_0(A) \end{tikzcd}$$

とできる. 以下 λ が iso. を示す.

<u>Surj.</u> $K_0(A) \ni [p]_0$ をとる. 今. $p \in A$ に対し. $\exists n \in \mathbb{N}$, $\exists x = x^* \in A_n$ s.t

$\|p - x\| < \frac{1}{4}$ とできる. すると.

$\sigma(x) \subset (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \cup (\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$ であるので.

$\because$ $\|(p-\lambda I)^{-1}(x-\lambda I) - 1\| = \|(p-\lambda I)^{-1}((x-\lambda I)-(p-\lambda I))\|$

$\leq \frac{1}{4} \cdot \|(p-\lambda I)^{-1}\|$. より. $\|(p-\lambda I)^{-1}\| < 4$ なら $(x-\lambda I)$ は invertible

q を x の $[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$ の spectrum proj. とすると. $\|x - q\| < \frac{1}{4}$. かつ $q \in A_n$.

$\therefore$ $\|p - q\| < \frac{1}{2}$ なので Lemma 3 より $p \sim q$ $\therefore$ $[p]_0 = [q]_0$.

$\therefore$ $[p]_0 = [q]_0 = K_0(\alpha_n)([q]_0) = \lambda \circ \mu_n([q]_0)$

<u>Inj.</u> . $\lambda(g) = 0$ とする. ($g \in \varinjlim K_0(A_n)$) まず. $\exists n \in \mathbb{N}$, $h \in K_0(A_n)$ s.t.

$\mu_n(h) = g$. 今. $h = [p]_0 - [q]_0 \in K_0(A_n)$ とすると.

$0 = \lambda \cdot \mu_n([p]_0 - [q]_0) = K_0(\alpha_n)([p]_0 - [q]_0) = [p]_0 - [q]_0$

$\therefore$ $p \sim_s q$ in $P_\infty(A)$ $\therefore$ $\exists r \in P_\infty(A)$ s.t. $p \oplus r \sim q \oplus r$ in $P_\infty(A)$

surj. のときと同様に. $r \in P_\infty(A_n)$としてよい. (n はとり直す)

今. $\exists v \in M_m \otimes A$ s.t. $vv^* = p \oplus r$, $v^*v = q \oplus r$ とおくと.

$\exists x \in M_m \otimes A_n$ s.t. $\|v - x\| < \frac{1}{4}$. (n は とり直す)

$(p \oplus r) x (q \oplus r) = x$ とできる. x を $(p\oplus r)x(q\oplus r)$ でとり直せばよい.

$\|v-x\|<\frac{1}{4}$ より kernel が一致する

今 $x = u\cdot|x|$, $\ker u = \overset{\ker v}{\ker x}$, $\operatorname{ran} u = \overset{\operatorname{ran} v}{\operatorname{ran} x}$ ととれば.

$uu^* = p\oplus r$, $u^*u = q\oplus r$, $u \in M_m \otimes A_n$ より

$p \sim_s q$ in $P_\infty(A_n)$ $\therefore h=0$. $\therefore g=0$

<u>Thm 5</u>. A, B : AF-alg. のとき.

$\left(B_1 \overset{\beta_{12}}{\hookrightarrow} B_2 \overset{\beta_{23}}{\hookrightarrow} B_3 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow B \right)$

$(K_0(A), K_0^+(A), [I_A]_0) \underset{\text{元}}{\cong} (K_0(B), K_0^+(B), [I_B]_0)$

$\Rightarrow A \simeq B$.

これらの条件を単に unital という

<u>Lemma 6</u>. A, B : finite dim. C^*-alg.

$\psi : K_0(A) \longrightarrow K_0(B)$, $\psi(K_0^+(A)) \subset K_0^+(B)$, $\psi([I_A]_0) = [I_B]_0$

$\Rightarrow \exists\varphi : A \to B$: unital homo. s.t. $K_0(\varphi) = \psi$.

up to unitary equ.

$\because$ $A = \bigoplus_{i=1}^{K} M_{n_i}$, $B = \bigoplus_{j=1}^{L} M_{m_j}$ とすると

$K_0(A) = (\mathbb{Z}^K, \mathbb{Z}_+^K, (n_1, n_2, \cdots, n_K))$

$K_0(B) = (\mathbb{Z}^L, \mathbb{Z}_+^L, (m_1, \cdots, m_L))$ である.

今 $\psi(\underset{(0,\cdots,\overset{i}{1},0,\cdots,0)}{e_i}) = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{Li}) = Ae_i$ $(A \in M_{LK}(\{0\}\cup\mathbb{N}))$ とすると.

$\psi([I_A]_0) = [I_B]_0$ より $A\begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_L \end{bmatrix}$ がわかる.

Thm 2 のように homo. を作り φ とすれば, $K_0(\varphi) = \psi$ がわかる.

Lemma 7. $\mathcal{A}$: finite dim. C^*-alg. $\mathcal{B}$: AF-alg.

$\gamma : K_0(\mathcal{A}) \to K_0(\mathcal{B})$: unital homo.

$\Rightarrow {}^\exists m \in \mathbb{N}$, ${}^{\exists!}\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}_m$: unital homo. s.t. $K_0(\beta_m) \cdot K_0(\varphi) = \gamma$.

up to unitary eq. in $\mathcal{B}$

∵ $K_0(\mathcal{B}) = \bigcup K_0(\beta_m)(K_0(\mathcal{B}_m))$ より. ${}^\exists n \in \mathbb{N}$ s.t

$\gamma(K_0(\mathcal{A})) \subset K_0(\beta_n)(K_0(\mathcal{B}_n))$ とできる.

今. $F_j \in P_\infty(\mathcal{B}_n)$ を $K_0(\beta_n)([F_j]_0) = \gamma(e_i)$ となるようにとる.

ここで $\rho : K_0(\mathcal{A}) \to K_0(\mathcal{B}_n)$ としたいが. unital になるかが問題

$e_i \mapsto [F_j]_0$

そこで.

$\gamma([I_\mathcal{A}]_0)$

$K_0(\beta_n)\left([I_{\mathcal{B}_n}]_0 - \sum_{j=1}^{k} n_i \cdot [F_j]_0\right) = 0$ より

${}^\exists m \geq n$ s.t

$K_0(\beta_{nm}) \cdot \left([I_{\mathcal{B}_m}]_0 - \sum_{j=1}^{k} n_i [F_j]_0\right) = 0$

$[I_{\mathcal{B}_m}] = \sum_{j=1}^{k} n_i \cdot [\beta_{nm}(F_j)]_0$ となる. ここで

$\rho : K_0(\mathcal{A}) \to K_0(\mathcal{B}_m)$ とすれば. これは unital homo. になる

$e_i \mapsto [\beta_{nm}(F_j)]_0$

Lemma 6 より ${}^\exists \varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}_m$: unital homo.

もし $\varphi' : \mathcal{A} \to \mathcal{B}_{m'}$ も これをみたす とすると. ${}^\exists l \geq m, m'$ s.t

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{B}_m \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B}_{m'} & \longrightarrow & \mathcal{B}_l \end{array}$$

の上下が同じ重複度 とでき. uni. equ. になる

<u>Proof of Thm 5</u>.

$m_1 = 1$ とする.

A_{m_1} に対し. $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ $\exists \varphi_1 : A_{m_1} \to B_{n_1}$: unital homo. s.t.

$$K_0(\beta_{n_1}) \cdot K_0(\varphi_1) = \pi \cdot K_0(\alpha_{m_1})$$

B_{n_1} に対し. $\exists m_2 \in \mathbb{N}$ $\exists \psi_1' : B_{n_1} \to A_{m_2}$: unital homo s.t.

$$K_0(\alpha_{m_2}) \cdot K_0(\psi_1') = \pi^{-1} \cdot K_0(\beta_{n_1})$$ 図でかくと

$$\begin{tikzcd}
A_{m_1} \arrow[rr, "\alpha_{m_1 m_2}"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & & A_{m_2} \\
& B_{n_1} \arrow[ur, "\psi_1'"'] &
\end{tikzcd}$$

$K_0(\alpha_{m_2}) \cdot K_0(\psi_1') \cdot K_0(\varphi_1)$
$= \pi^{-1} K_0(\beta_{n_1}) \cdot K_0(\varphi_1) = K_0(\alpha_{m_1})$
$= K_0(\alpha_{m_2}) \cdot K_0(\alpha_{m_1 m_2})$ より.

$\psi_1' \circ \varphi_1$ と $\alpha_{m_1 m_2}$ は uni. eq.

$\therefore \exists \psi_1 : B_{n_1} \to A_{m_2}$ s.t. $\psi_1 \simeq_u \psi_1'$ かつ $\psi_1 \circ \varphi_1 = \alpha_{m_1 m_2}$.

$\therefore$

$$\begin{tikzcd}
A_{m_1} \arrow[rr, "\alpha_{m_1 m_2}"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & & A_{m_2} \\
& B_{n_1} \arrow[ur, "\psi_1"] &
\end{tikzcd}$$

とできる. これをくり返せば.

$$\begin{tikzcd}
A_{m_1} \arrow[rr, "\alpha_{m_1 m_2}"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & A_{m_2} \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi_2"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & A_{m_3} \arrow[rr] & & A \arrow[d, shift right, "\varphi"'] \\
& B_{n_1} \arrow[ur, "\psi_1"] \arrow[rr, "\beta_{n_1 n_2}"'] & & B_{n_2} \arrow[ur] \arrow[rr] & \cdots & \arrow[r] & B \arrow[u, shift right, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

とできる. $\psi = \varphi^{-1}$ より. $A \simeq B$.

なお. $K_0(\varphi) = \pi$ である.