

C^* 環のK理論

K_0 群の複習

$$P_\infty(A) = \{ p \in M_n \otimes A \mid p = p^* = p^2, n \in \mathbb{N} \} \quad \text{とす.}$$

$$p \sim q$$

$$\Leftrightarrow \exists v \in M_n \otimes A \quad \text{s.t.} \quad p = vv^* \quad q = v^*v.$$

$$p \sim_s q$$

→ 同値類を $[p]_0$.

$$\Leftrightarrow \exists r \in P_\infty(A) \quad \text{s.t.} \quad p \oplus r \sim q \oplus r.$$

$$K_0(A) = \{ [p]_0 - [q]_0 \mid p, q \in P_\infty(A) \}$$

$$K_0^+(A) = \{ [p]_0 \mid p \in P_\infty(A) \}$$

$$\begin{array}{c} \varphi_{nm} \text{ と } \varphi_{n+1} \\ \curvearrowright \\ G_n \xrightarrow{\varphi_n} G_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} \dots \rightarrow G_m \end{array}$$

Inductive limit (Abelian grp)

$$G_1 \xrightarrow{\varphi_1} G_2 \xrightarrow{\varphi_2} G_3 \xrightarrow{\varphi_3} \dots \rightarrow G. \quad \text{に対し.}$$

$(G, \{\mu_n\}_{n=1}^\infty)$ を inductive limit. とす.

$$\rightarrow \mu_n: G_n \rightarrow G$$

$$(1) \quad G_n \xrightarrow{\varphi_n} G_{n+1}$$

$$\begin{array}{ccc} \mu_n & \searrow & \swarrow \mu_{n+1} \\ & G & \end{array}$$

(2) $(H, \{\lambda_n\})$ も (1) をみたすなら.

$$\begin{array}{ccc} \mu_n & G_n & \lambda_n \\ \swarrow & \searrow & \searrow \\ & G & \xrightarrow{\exists \lambda} H \end{array}$$

とできる.

このとき $G = \bigcup \mu_n(G_n)$ である. さらに次の lemma が成り立つ

Lemma 1. $g \in G_n \text{ is } \bar{x} \neq 1, \mu_n(g) = 0 \text{ is not true.}$

$\exists m \geq n \text{ s.t. } \varphi_{nm}(g) = 0.$

AF-alg. A_n : finite dim. C^* alg. is embedding (unital inj. homo)

$$A_1 \xrightarrow{\alpha_{12}} A_2 \xrightarrow{\alpha_{23}} A_3 \xrightarrow{\alpha_{34}} A_4 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow A = \overline{\cup A_n}^{||\cdot||}$$

$$\alpha_{mn}: A_n \hookrightarrow A_m, \alpha_n: A_n \hookrightarrow A \text{ exists.}$$

Thm 2. $A = \bigoplus_{i=1}^K M_{n_i}, B = \bigoplus_{j=1}^L M_{m_j}, \varphi: A \rightarrow B$: unital homo. exists.

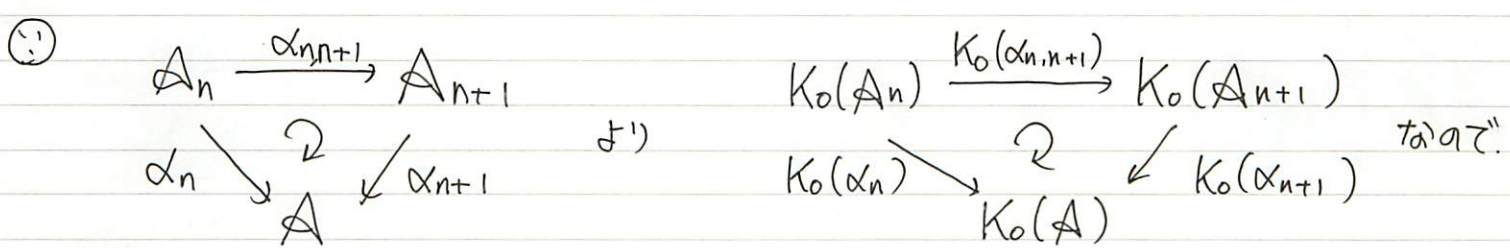
$\exists A = [a_{ij}] \in M_{L \times K}(\{0\} \cup \mathbb{N}) \text{ s.t.}$

$$A \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_L \end{bmatrix} \text{ and } \varphi \simeq_u \bigoplus_{j=1}^L \left(\bigoplus_{i=1}^K M_{n_i} \otimes I_{a_{ji}} \right) \text{ exists.}$$

Lemma 3. $p, q \in P_{\infty}(A) \text{ is } \bar{x} \neq 1, ||p - q|| < \frac{1}{2} \Rightarrow p \sim q.$

Thm 4. $A_1 \xrightarrow{\alpha_{12}} A_2 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow A \text{ exists}$

$$K_0(A) \simeq \varinjlim (K_0(A_n), K_0(\alpha_{n,n+1})) = (\varinjlim K_0(A_n), \mu_n)$$



$\exists \chi: \varinjlim K_0(A_n) \rightarrow K_0(A) \text{ s.t.}$

$$\begin{array}{ccc}
 & K_0(A_n) & \\
 \mu_n \swarrow & \cong & \searrow K_0(\alpha_n) \\
 \varinjlim K_0(A_n) & \xrightarrow{\lambda} & K_0(A)
 \end{array}$$

とできる。以下 λ が iso. を示す。

Surj. $K_0(A) \ni [p]_0$ をとる。今 $p \in A$ に $\bar{x} \in \mathbb{C}$ $\exists m \in \mathbb{N}, \exists x = x^* \in A_n$ s.t. $\|p - x\| < \frac{1}{4}$ とできる。すると $\sigma(x) \subset (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \cup (\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$ である。

$$\begin{aligned}
 \textcircled{!} \quad & \| (p - \lambda I)^{-1} (x - \lambda I) - 1 \| = \| (p - \lambda I)^{-1} ((x - \lambda I) - (p - \lambda I)) \| \\
 & \leq \frac{1}{4} \cdot \| (p - \lambda I)^{-1} \|. \text{ 故に } \| (p - \lambda I)^{-1} \| < 4 \text{ ならば } (x - \lambda I) \text{ は invertible}
 \end{aligned}$$

q を x の $[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$ の spectrum proj. とすると $\|x - q\| < \frac{1}{4}$ 。故に $q \in A_n$ 。
 $\therefore \|p - q\| < \frac{1}{2}$ 故に Lemma 3 故に $p \sim q \therefore [p]_0 = [q]_0$ 。

$$\therefore [p]_0 = [q]_0 = K_0(\alpha_n)([q]_0) = \lambda_0 \mu_n([q]_0)$$

Inj. $\lambda(q) = 0$ とする ($q \in \varinjlim K_0(A_n)$) すると $\exists n \in \mathbb{N}, h \in K_0(A_n)$ s.t. $\mu_n(h) = q$ 。今 $h = [p]_0 - [q]_0 \in K_0(A_n)$ とすると

$$0 = \lambda \cdot \mu_n([p]_0 - [q]_0) = K_0(\alpha_n)([p]_0 - [q]_0) = [p]_0 - [q]_0$$

$\therefore p \sim_s q$ in $P_{\infty}(A)$ $\therefore \exists r \in P_{\infty}(A)$ s.t. $p \oplus r \sim q \oplus r$ in $P_{\infty}(A)$

surj. のときと同様に $r \in P_{\infty}(A_n)$ としてよい。 (n は くり直り)

今 $\exists v \in M_m \otimes A$ s.t. $vv^* = p \oplus r, v^*v = q \oplus r$ とおくと。

$$\exists x \in M_m \otimes A_n \text{ s.t. } \|v - x\| < \frac{1}{4}. \quad (\text{n は くり直り})$$

$$(p \oplus r)x(q \oplus r) = x \quad \text{とできる。}$$

x を $(p \oplus r)x(q \oplus r)$ とくり直せばよい。

||v-x|| < 1/4 かつ kernel が一致する

ker v ran v

今 $x = U \cdot |x\rangle$, $\ker U = \ker x$, $\text{ran } U = \text{ran } x$ とわかる。

$$uu^* = p \oplus r , u^*u = q \oplus r , u \in M_m \otimes A_n \text{ かつ}$$

$$p \sim_s q \text{ in } P_\infty(A_n) \quad \therefore h = 0 \quad \therefore g = 0$$

Thm 5. A, B : AF-alg. のとき.

$$(B_1 \xrightarrow{\beta_{12}} B_2 \xrightarrow{\beta_{23}} B_3 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow B)$$

$$(K_0(A), K_0^+(A), [I_A]_0) \xrightarrow[\cong]{\cong} (K_0(B), K_0^+(B), [I_B]_0)$$

$$\Rightarrow A \cong B.$$

Lemma 6. A, B : finite dim. C^* -alg.

これらの条件を単に unital とする

$$\psi : K_0(A) \rightarrow K_0(B) , \psi(K_0^+(A)) \subset K_0^+(B) , \psi([I_A]_0) = [I_B]_0$$

$$\Rightarrow \exists \varphi : A \rightarrow B : \text{unital homo. s.t. } K_0(\varphi) = \psi.$$

$$\odot A = \bigoplus_{i=1}^k M_{n_i} , B = \bigoplus_{j=1}^l M_{m_j} \text{ とすると}$$

up to unitary eqv.

$$K_0(A) = (\mathbb{Z}^k, \mathbb{Z}_+^k, (n_1, n_2, \dots, n_k))$$

$$K_0(B) = (\mathbb{Z}^l, \mathbb{Z}_+^l, (m_1, \dots, m_l)) \text{ である.}$$

$$\text{今 } \psi(e_i) = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{li}) = Ae_i \quad (A \in M_{lk}(\{0\} \cup \mathbb{N})) \text{ とすると}$$

(0, ..., 1, 0, ..., 0)

$$\psi([I_A]_0) = [I_B]_0 \text{ かつ } A \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_l \end{bmatrix} \text{ がわかる.}$$

Thm 2 のように homo. を作り φ とわかる。 $K_0(\varphi) = \psi$ がわかる。

Lemma 7. A : finite dim. C^* -alg. B : AF-alg.

$\psi: K_0(A) \rightarrow K_0(B)$: unital homo.

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}, \exists \varphi: A \rightarrow B_m$: unital homo. s.t. $K_0(\beta_m) \cdot K_0(\varphi) = \psi$.
 ↑ up to unitary eq. in B

⊙ $K_0(B) = \bigcup K_0(\beta_m)(K_0(B_m))$ ㊦. $\exists n \in \mathbb{N}$ s.t

$\psi(K_0(A)) \subset K_0(\beta_n)(K_0(B_n))$ とできる.

今 $F_j \in P_\infty(B_n)$ を $K_0(\beta_n)([F_j]_0) = \psi(e_i)$ とするよにとる.

ここで $\rho: K_0(A) \rightarrow K_0(B_n)$ としたいが, unital になるかが問題
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $e_i \mapsto [F_j]_0$

そこで $\psi([I_A]_0)$

$$K_0(\beta_n)([I_{B_n}]_0 - \sum_{j=1}^k n_i [F_j]_0) = 0 \text{ ㊦}$$

$\exists m \geq n$ s.t

$$K_0(\beta_{nm}) \cdot ([I_{B_m}]_0 - \sum_{j=1}^k n_i [F_j]_0) = 0$$

$$[I_{B_m}] = \sum_{j=1}^k n_i [\beta_{nm}(F_j)]_0 \text{ とする. ㊦}$$

$\rho: K_0(A) \rightarrow K_0(B_m)$ としたい. ㊦ unital homo. ㊦
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $e_i \mapsto [\beta_{nm}(F_j)]_0$

Lemma 6 ㊦ $\exists \varphi: A \rightarrow B_m$: unital homo.

もし $\varphi': A \rightarrow B_{m'}$ もこれをみたすとする. $\exists \ell \geq m, m'$ s.t

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B_m \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow \\ B_{m'} & \rightarrow & B_\ell \end{array}$$

の上下が同じ重複度とでき, uni. equ. ㊦

Proof of Thm 5

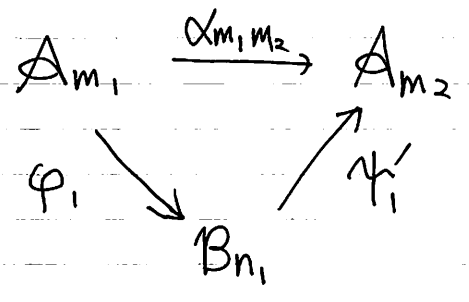
$m_1 = 1$ とする.

A_{m_1} に対し $\exists n_1 \in \mathbb{N} \exists \varphi_1 : A_{m_1} \rightarrow B_{n_1}$: unital homo. s.t.

$$K_0(\beta_{n_1}) \cdot K_0(\varphi_1) = \pi \cdot K_0(\alpha_{m_1})$$

B_{n_1} に対し $\exists m_2 \in \mathbb{N} \exists \psi'_1 : B_{n_1} \rightarrow A_{m_2}$: unital homo s.t.

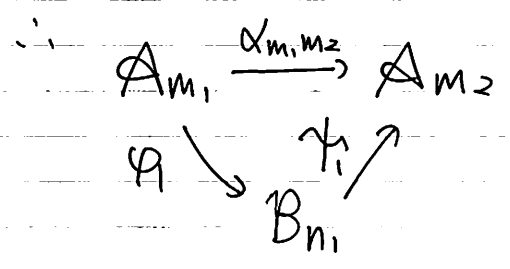
$$K_0(\alpha_{m_2}) \cdot K_0(\psi'_1) = \pi \cdot K_0(\beta_{n_1}) \quad \square \text{で"か"と}$$



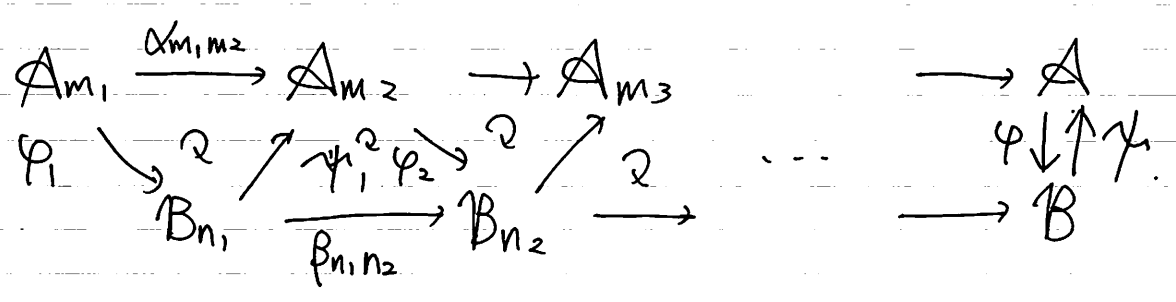
$$\begin{aligned}
 & K_0(\alpha_{m_2}) \cdot K_0(\psi'_1) \cdot K_0(\varphi_1) \\
 &= \pi^{-1} \cdot K_0(\beta_{n_1}) \cdot K_0(\varphi_1) = K_0(\alpha_{m_1}) \\
 &= K_0(\alpha_{m_2}) \cdot K_0(\alpha_{m_1, m_2}) \quad \square)
 \end{aligned}$$

$\psi'_1 \circ \varphi_1$ と α_{m_1, m_2} は uni. eq.

$\therefore \exists \psi_1 : B_{n_1} \rightarrow A_{m_2}$ s.t. $\psi_1 \simeq_u \psi'_1$ かつ $\psi_1 \circ \varphi_1 = \alpha_{m_1, m_2}$.



とできる. \square で"か"を返せば.



とできる. $\psi = \varphi^{-1}$ かつ $A \simeq B$.

なお: $K_0(\varphi) = \pi$ である.