§1. C^*alg. と v.N. alg.

<u>Def 1.1.</u> $*$-alg. $\mathcal{A}$ が C^*alg. であるとは norm $\|\cdot\|$ が定義されていて

(1). $\|\cdot\|$ に関し complete.

(2) ${}^\forall a, b \in \mathcal{A}$ に対し $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$, $\|a^*a\| = \|a\|^2$.

をみたすときをいう.

<u>Remark.</u> (1), (2) から $\|a\| = \|a^*\|$ が導かれる.

$\because$ $\|a\|^2 = \|a^*a\| \leq \|a^*\|\cdot\|a\|$ $\therefore \|a\| \leq \|a^*\|$.

<u>例 1.1.</u> H : Hilbert sp.

$B(H) := \{ H$ 上の bdd. op. 全体 $\}$

$= \{ A : H \to H : \text{linear} \mid \sup_{\substack{\|\xi\|=1 \\ \xi\in H}} \|A\xi\| < \infty \}$. は C^*alg.

このとき norm は

$\|A\| = \sup_{\|\xi\|=1} \|A\xi\|$ で与えられる.

特に $\dim H = n$ のとき $B(H) \simeq M_n(\mathbb{C})$ である.

<u>例 1.2.</u> C^*alg. $\mathcal{A}$ の closed $*$-subalg. $\mathcal{B}$ は C^*alg.

<u>例 1.3.</u> $\mathcal{A}_n$: finite dim. C^*alg. (matrix alg. の direct sum) が

$\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ をみたすとき.

$\mathcal{A} = \overline{\bigcup \mathcal{A}_n}$ も C^*alg. になる. これを AF alg. という.

とくに $\mathcal{A}_n = \bigotimes^n M_k$ とし $\mathcal{A}_n = \bigotimes^n M_k = \bigotimes^n M_k \otimes I \subset \bigotimes^{n+1} M_k = \mathcal{A}_{n+1}$

とみたとき $\mathcal{A} = \overline{\bigcup \mathcal{A}_n}$ を k^∞ 型の UHF-alg. という.

例1.4. X : cpt Hausdorff sp. とするとき.

$C(X)$ は C^*-alg. なお $\|f\| = \sup_{x\in X}|f(x)|$ である.

例1.5. $\{S_k\}_{k=1}^n \subset B(H)$ が条件

(1) $S_k^* S_k = I$.

(2) $\sum_{k=1}^n S_k S_k^* = I$ をみたすとき.

$C^*(\{S_k\}) =: \mathcal{O}_n$ を Cuntz-alg. という.

Def 1.2. C^*-alg. が W^*-alg. であるとは.

$\exists (\pi, H)$: inj. representation. i.e., $\pi : A \longrightarrow B(H)$: homo.

s.t. $\pi(A)$ が WOT で closed.

Remark. GNS rep. があるので inj. rep. はいつでもある.

B(H)の top. について. その1.

$B(H)$には. いろいろ位相が入るが. ここでは3つだけ紹介する.

(1) norm top. :

$$A_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \|A_\alpha - A\| \longrightarrow 0.$$

(2) SOT (strong operator topology) :

$$A_\alpha \xrightarrow{s} A \overset{def}{\Longleftrightarrow} {}^\forall x \in H \text{ に対し. } \|(A_\alpha - A)x\| \longrightarrow 0.$$

(3) WOT (weak op. top.) :

$$A_\alpha \xrightarrow{w} A \overset{def}{\Longleftrightarrow} {}^\forall x, y \in H \text{ に対し, } |\langle x, (A_\alpha - A)y \rangle| \longrightarrow 0.$$

Prop 1.3. norm top $\succ$ SOT $\succ$ WOT である.

☺ $\forall x, y \in H$, $A \in B(H)$ に対し.

$|\langle x, Ay \rangle| \leq \|x\| \cdot \|Ay\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$. よりわかる //

例.1.6. $A_n = e_{nn}$. (matrix unit.) $\longrightarrow 0$ (SOT)

$\longrightarrow$ 収束しない (norm top)

$A_n = e_{n1} \longrightarrow 0$ (WOT)

$\longrightarrow$ 収束しない (SOT) である.

Thm 1.4. $\mathcal{A} < B(H)$: C^*alg. で. $\mathcal{A}\xi = \{0\} \Rightarrow \xi = 0$ をみたすとすると.

$\overline{\mathcal{A}}^{SOT} = \overline{\mathcal{A}}^{WOT} = \mathcal{A}''$ が成立.

Remark. $\mathcal{A}' = \{X \in B(H) \mid AX = XA, \forall A \in \mathcal{A}\}$ である

なお $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}''$ はすぐにわかる.

☺ • $\overline{\mathcal{A}}^{SOT} \subset \overline{\mathcal{A}}^{WOT}$ は Prop.1.3. から.

• $\overline{\mathcal{A}}^{WOT} \subset \mathcal{A}''$ $\quad$ $\forall A \in \overline{\mathcal{A}}^{WOT}$ とすると.

$\therefore A_\alpha \xrightarrow{WOT} A$ $(A_\alpha \in \mathcal{A})$ とでき. $\forall x, y \in H$, $\forall B \in \mathcal{A}'$ に対し.

$\langle x, ABy \rangle = \lim \langle x, A_\alpha By \rangle = \lim \langle B^* x, A_\alpha y \rangle = \langle B^* x, Ay \rangle$

$= \langle x, BAy \rangle$ $\quad \therefore AB = BA \quad \therefore A \in \mathcal{A}''$ である.

• $\mathcal{A}'' \subset \overline{\mathcal{A}}^{SOT}$

このために. $\forall T \in \mathcal{A}''$, $\forall x_1, \cdots, x_n \in H$ に対し, $\exists A \in \mathcal{A}$,

s.t. $\sum_{i=1}^{n} \|(T-A)x_i\|^2 < 1 \quad -\clubsuit$ を示せばよい.

Remark. net $\Lambda = \{H$の有限部分集合$\}$とし、partial order を包含でいれる。

ここで $A_\alpha \in \mathcal{A}$ を、$\circledast$ をみたすもの とすると、$A_\alpha \to T$ となる。

∵ $\forall x \in H, \forall \varepsilon > 0$ に対し、$\alpha \geq \{\frac{1}{\varepsilon}x\}$ とすると、

$$\sum_{x_i \in \alpha} \|(T - A_\alpha)x_i\|^2 < 1 \quad より$$

$$\|(T - A_\alpha)\tfrac{1}{\varepsilon}x\|^2 < 1 \quad \therefore \|(T - A_\alpha)x\| < \varepsilon. \quad //$$

まず、$n=1$ を考える。

P を $\overline{\mathcal{A}x_1}$ へのproj. とすると、$P \in \mathcal{A}'$ である。

∵ $\mathcal{A}PH = \mathcal{A}\cdot\overline{\mathcal{A}\cdot x_1} \subset \overline{\mathcal{A}x_1} = PH$ なので、

(⊂) $\forall y \in \overline{\mathcal{A}x_1}, \forall B \in \mathcal{A}$ に対し、$A_n x_1 \longrightarrow y$ とすると、

$BA_n x_1 \longrightarrow By$ となる。$\therefore By \in \overline{\mathcal{A}x_1}$

$\forall A \in \mathcal{A}$ に対し、$PAP = AP$ が成立。

ここで $PA = (A^*P)^* = (PA^*P)^* = PAP = AP$ となり、$P \in \mathcal{A}'$ //.

次に、$y := P^\perp x_1$ とすると、$P^\perp \in \mathcal{A}'$ より

$\mathcal{A}y = \mathcal{A}P^\perp x_1 = P^\perp \mathcal{A}x_1 = \{0\}$. となり、仮定から $y = 0$ となる。

$\therefore x_1 \in PH = \overline{\mathcal{A}x_1}$ となる。

今、$P \in \mathcal{A}', T \in \mathcal{A}''$ より $PT = TP$ だから、

$Tx_1 \in TPH = PTH \subset PH = \overline{\mathcal{A}x_1}$

$\therefore \exists A \in \mathcal{A}$ s.t. $\|Tx_1 - Ax_1\|^2 < 1$ とできる。

さて. $n \geq 2$ のときを考えよう.

Hilbert sp. を $H^{(n)} := \bigoplus^n H$ に.

$A \in B(H)$ を $A^{(n)} := \bigoplus^n A$ に.

$\mathcal{A}$ を $\mathcal{A}^{(n)} := \{A^{(n)} \mid A \in \mathcal{A}\}$ に拡張する.

まず $\mathcal{A}^{(n)\prime}$ と $\mathcal{A}^{(n)\prime\prime}$ を考えよう.

<u>$\mathcal{A}^{(n)\prime}$ について</u>.

$X \in B(H^{(n)})$ として. $X = [X_{ij}]_{i,j=1}^n$, $X_{ij} \in B(H)$ とする

ここで $A^{(n)} = \mathrm{diag}(A, \cdots, A)$ と表せるから.

$A^{(n)}X = [AX_{ij}]$, $XA^{(n)} = [X_{ij}A]$ となる.

$\therefore X \in \mathcal{A}^{(n)\prime} \Longleftrightarrow AX_{ij} = X_{ij}A \quad \forall A \in \mathcal{A}$.

$\Longleftrightarrow X_{ij} \in \mathcal{A}'$ である.

とくに matrix unit. $e_{ij} \in \mathcal{A}^{(n)\prime}$ である.

<u>$\mathcal{A}^{(n)\prime\prime}$ について</u>.

$T \in \mathcal{A}^{(n)\prime\prime}$ をとり. $T = [T_{ij}]$ とおくと.

$$e_{ij}T = \begin{array}{c} \\ i \to \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} & 0 & \\ T_{j1} & T_{j2} \cdots & T_{jn} \\ & 0 & \end{bmatrix}, \quad Te_{ij} = \begin{array}{c} j \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} & T_{1i} & \\ 0 & T_{2i} & 0 \\ & \vdots & \\ & T_{ni} & \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{より} \quad \begin{cases} T_{ii} = T_{jj} \\ T_{jk} = 0 \ (k \neq j) \\ T_{ki} = 0 \ (k \neq i) \end{cases}$$

$$\therefore T_{ij} = \begin{cases} T_{11} & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \text{となる.} \qquad \therefore T = \mathrm{diag}(T_{11}, \cdots, T_{11})$$

さらに. $\forall X = [X_{ij}] \in \mathcal{A}^{(n)\prime}$ に対し. $TX = XT$ より

$T_{11}X_{11} = X_{11}T_{11}$. $\therefore T_{11} \in \mathcal{A}''$ である. $\therefore \mathcal{A}^{(n)\prime\prime} = (\mathcal{A}'')^{(n)}$ である.

さて．ここに $n=1$ の結果をあてはめると．

$\forall x^{(n)} \in H^{(n)}$, $T^{(n)} \in (\mathcal{A}'')^{(n)} = (\mathcal{A}^{(n)})''$ に対し． $x^{(n)} = (x_1, \cdots, x_n)$ とすると．

$\exists A^{(n)} \in \mathcal{A}^{(n)}$ s.t.

$1 > \|(T^{(n)} - A^{(n)})x^{(n)}\|^2 = \sum \|(T-A)x_i\|^2$ となる

Def 1.5. $M \subset B(H)$ が von Neumann alg.

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ M : C^*-alg. かつ. $\overline{M}^{WOT} = M$.

例 1.7. finite dim. C^*-alg in $B(H)$ は v.N. alg.

例 1.8. X : cpt Hausdorff, (X, μ) : finite meas. sp. のとき．

$L^\infty(X)$ は $L^2(X)$ のかけ算作用素とみれば. v.N. alg. になる.

Remark. C^*-alg. は $C(X)$ の非可換化 → proj. は少ない. spectrum proj. もないかも.

v.N. alg は $L^\infty(X)$ の非可換化 → proj. はいっぱい. spectrum proj. も入ってる.

例 1.9. $\mathcal{A}_2 = \overset{\infty}{\otimes} M_2$, $\mathcal{A}_3 = \overset{\infty}{\otimes} M_3$ とする. なお. $\mathcal{A}_2 \not\cong \mathcal{A}_3$ である.

ここに $\overset{\infty}{\otimes} tr$ を考え. その GNS-rep. π_2, π_3 を考えると．

$\overline{\pi_2(\mathcal{A}_2)}^{WOT} = \overline{\pi_3(\mathcal{A}_3)}^{WOT}$ になる. これを AFD-II_1 factor という.

例 1.10. G : locally cpt. grp. M : v.N. alg. とし.

$\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, M$: σ-weak cont. homo. が与えられたとする.

(Remark. $\begin{array}{ccc} G \times M & \longrightarrow & M \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (t, A) & \longmapsto & \alpha_t(A) \end{array}$: が σ-weak と G の top. で cont.)

§2でやる.

ここで. MとGのrep.を次で与える.

$K = H \otimes L^2(G) = L^2(G, H)$とし.

${}^\forall A \in M, t, s \in G, \xi \in L^2(G,H)$に対し.

$\pi_\alpha : M \longrightarrow B(K) \qquad u : G \longrightarrow B(K)$ を.

$(\pi_\alpha(A)\xi)(t) = \alpha_t^{-1}(A)\cdot\xi(t) \ , \qquad (u(s)\xi)(t) = \xi(s^{-1}t)$

で定義する. ここで. $u(s)\pi_\alpha(A)u(s)^* = \pi_\alpha(\alpha_s(A))$をみたす.

∵ $(u(s)\pi_\alpha(A)u(s)^*\xi)(t)$

$= (\pi_\alpha(A)u(s)^*\xi)(s^{-1}t) = \alpha_{s^{-1}t}^{-1}(A)\cdot(u(s^{-1})\xi)(s^{-1}t)$

$= \alpha_{t^{-1}}(\alpha_s(A))\xi(t) = (\pi_\alpha(\alpha_s(A))\xi)(t)$ //.

$M \rtimes_\alpha G = W^*(\pi_\alpha(M), u(G))$ を

MとGのαに関する接合積という.

とくに$M = \mathbb{C}$のときは.

$K = L^2(G)$ であり. uはLeft regular rep.である.

このとき.

$\mathbb{C} \rtimes_\alpha G = R(G) = L(G)$ などで表し. grp v.N. alg. という.

$L(\mathbb{F}_2) \overset{?}{\simeq} L(\mathbb{F}_3)$ などの問題もある.

§2. 7つの位相 と predual.

B(H) に. norm, WOT, SOT の位相が入ることを話したが さらに 4つふやす.

Def 2.1

(1). σ-weak :

$$A_\alpha \xrightarrow{\sigma w} A \overset{def}{\iff} \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\|^2<\infty,\ x_n, y_n\in H \text{ に対し.}$$

$$\left|\sum\langle x_n, (A_\alpha - A)y_n\rangle\right| \to 0.$$

(2) σ-strong : $A_\alpha \xrightarrow{\sigma s} A$

$\overset{def}{\iff} \sum\|x_n\|^2<\infty$ に対し. $\sum\|(A_\alpha - A)x_n\|^2 \longrightarrow 0$

(3) σ-strong* : $A_\alpha \xrightarrow{\sigma s*} A$.

$\overset{def}{\iff} \sum\|x_n\|^2<\infty$ に対し. $\sum\|(A_\alpha - A)x_n\|^2 + \|(A_\alpha^* - A^*)x_n\|^2 \to 0$.

(4) strong* : $A_\alpha \xrightarrow{s*} A$

$\overset{def}{\iff} {}^\forall x\in H$ に対し. $\|(A_\alpha - A)x\|^2 + \|(A_\alpha^* - A^*)x\|^2 \longrightarrow 0$.

なお位相の強弱は.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{norm} & \succ & \sigma s* & \succ & \sigma s & \succ & \sigma w \\ & & \curlyvee & & \curlyvee & & \curlyvee \\ & & s* & \succ & s & \succ & w \end{array}$$

となっている.

Def 2.2. B(H) の finite linear functional sp. $B(H)^*$ で.

σw-cont. のものを $B(H)_*$ とかき. B(H) の predual という.

$$B(H)_* := \{ f\in B(H)^* \mid f \text{ は } \sigma w\text{-cont.}\}$$

Thm 2.3.

(1) $\sum\|x_n\|^2<\infty$, $\sum\|y_n\|^2<\infty$ に対し.

$$\begin{array}{cccc} \varphi: B(H) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ A & \longmapsto & \sum_n \langle x_n, Ay_n\rangle \end{array}$$ は σw-cont.

(2) $\varphi: B(H)\longrightarrow \mathbb{C}$ が $\sigma s*$-cont. なら.

$^\exists x_n, y_n\in H$ s.t. $\sum\|x_n\|^2<\infty$, $\sum\|y_n\|^2<\infty$

$\varphi(A)=\sum\langle x_n, Ay_n\rangle$ とできる.

∵ (1) は明らか.

(2) φ が $\sigma s*$-cont. とすると. $^\exists x_n$, $\sum\|x_n\|^2<\infty$ s.t.

$|\varphi(A)|\leq\{\sum_n(\|Ax_n\|^2+\|A^*x_n\|^2)\}^{\frac{1}{2}}$ とできる.

∵ semi-norm と cont. の議論から出るが, 今回はスキップ.
(A course in ft.nal anal. P108 IV.3.1.).

ここで $\overline{H}$ を H の共役 Hilbert sp. とする. i.e.,

$\overline{H}=\{\overline{x}\mid x\in H\}$.

和: $\overline{x}+\overline{y}=\overline{x+y}$, スカラー倍: $\lambda\cdot\overline{x}=\overline{\overline{\lambda}x}$

内積: $(\overline{x},\overline{y})_{\overline{H}}=\langle y, x\rangle_H$ であるこれで Hilbert sp. になる.

さらに. $H_n=\begin{cases} H & n>0 \\ \overline{H} & n<0\end{cases}$ とし. $\widehat{H}:=\bigoplus_{n=-\infty}^{\infty}H_n$ とおき.

$\widetilde{x}=(\cdots,\overline{x_n},\cdots,\overline{x_1},x_1,\cdots,x_n,\cdots)=((\overline{x_n}),(x_n))\in\widehat{H}$ とする.

今. $^\forall A \in B(H)$ に対し.

$$\hat{A} : \hat{H} \longrightarrow \hat{H} \quad \text{とすると. } \hat{A} \in B(\hat{H}) \text{ であり.}$$
$$((\overline{y_{-n}}),(y_n)) \mapsto ((\overline{A^* y_{-n}}),(Ay_n))$$

$\|\hat{A}\tilde{x}\|^2 = \|((\overline{A^* x_n}),(Ax_n))\|^2 = \sum(\|Ax_n\|^2 + \|A^* x_n\|^2)$ より.

$|\varphi(A)| \leq \left(\sum(\|Ax_n\|^2 + \|A^* x_n\|^2)\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\hat{A}\cdot\tilde{x}\|$ となる.

$$\therefore f : \overline{\{\hat{A}\tilde{x} : A \in B(H)\}} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{は linear ft.nal である.}$$
$$\hat{A}\tilde{x} \longmapsto \varphi(A)$$

(上から well-defined と bdd. が出る)

Remark. $\hat{H}$ を出すのは. f が linear になるためである.

$$\widehat{\lambda A}\tilde{x} = ((\overline{(\lambda A)^* x_n}),(\lambda A x_n)) = ((\overline{\bar{\lambda} A^* x_n}),(\lambda A x_n))$$
$$= \lambda((\overline{A^* x_n}),(Ax_n)) = \lambda \cdot \hat{A} \cdot \tilde{x}$$

$\therefore$ Riesz の定理から. $\exists \tilde{y} = ((\overline{y_{-n}}),(y_n)) \in \hat{H}$ s.t.

$$\varphi(A) = \langle \tilde{y}, \hat{A}\tilde{x} \rangle = \langle ((\overline{y_{-n}}),(y_n)), ((\overline{A^* x_n}),(Ax_n)) \rangle_{\hat{H}}$$
$$= \sum (\overline{y_{-n}}, \overline{A^* x_n}) + \langle y_n, Ax_n \rangle$$
$$= \sum (\langle A^* x_n, y_{-n} \rangle + \langle y_n, Ax_n \rangle)$$
$$= \sum (\langle x_n, Ay_{-n} \rangle + \langle y_n, Ax_n \rangle) \quad \text{とできる.} \quad //$$

Cor 2.4. $\varphi \in B(H)^*$ に対し TFAE

(1) φ は σw-cont.

(2) φ は $\sigma s*$-cont.

(3) $\exists x_n, y_n$, $\sum\|x_n\|^2 < \infty$, $\sum\|y_n\|^2$ s.t. $\varphi(A) = \sum\langle x_n, Ay_n \rangle$.

Def 2.5. CONS $\{x_j\}$ に対し.

$$T(H) := \{A \in B(H) \mid \sum \langle x_j, |A| x_j \rangle < \infty\}.$$

を trace class という. $A \in T(H)$ に対し.

$$\mathrm{tr}(A) := \sum \langle x_j, A x_j \rangle$$ とする

Remark. $A \in T(H)$ なら $\mathrm{tr}(A)$ は収束する. また CONS のとり方によらない.

一般に $A \in T(H)$ に対し. $^\exists \lambda_n \geq 0$, $\sum \lambda_n < \infty$, CONS $^\exists\{x_n\}, \{y_n\}$ s.t

$A = \sum \lambda_n |x_n\rangle\langle y_n|$ が知られている

ただし. $|x\rangle\langle y| z = \langle y, z \rangle \cdot x$ である

これを用いると.

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{tr}(\cdot A) : & B(H) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & X & \longmapsto & \mathrm{tr}(XA) \end{array}$$ は.

$$\mathrm{tr}(XA) = \sum_{m,n} \langle y_m, X \cdot \lambda_n |x_n\rangle\langle y_n | y_m \rangle$$

$$= \sum_n \langle y_n, X \lambda_n x_n \rangle$$ となる.

Thm 2.6. $\varphi \in B(H)^*$ に対し. 次は同値.

(1) φ が σw-cont.

(2) $^\exists A \in T(H)$ s.t. $\varphi = \mathrm{tr}(\cdot A)$

☺ (2)⇒(1) は上の議論から.

(1)⇒(2) は Cor 2.4 より. $A = \sum |y_n\rangle\langle x_n|$ とすればよい.

このときAがtrace classである

∵ $A = W|A|$ としておく. $\{e_i\}$: CONSとして.

$$\sum\langle e_i, |A| e_i\rangle = \sum\langle e_i, W^* A e_i\rangle = \sum\langle We_i, Ae_i\rangle$$
$$= \sum_i \langle We_i, \sum_n |y_n\rangle\langle x_n| e_i\rangle$$
$$= \sum_i \sum_n \langle We_i, y_n\rangle\langle x_n, e_i\rangle$$
$$\leq \sum_i \sum_n |\langle We_i, y_n\rangle\langle x_n, e_i\rangle| \leq \sum_n \|y_n\|^2 + \|x_n\|^2 \quad //.$$

Def 2.7. (参考).

$\varphi \in B(H)^*$ が normal

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall\{A_\alpha\} \subset B(H)_+$, $A_\alpha \uparrow A = \sup A_\alpha$. に対し.

$$\varphi(\sup A_\alpha) = \sup \varphi(A_\alpha)$$

Thm 2.8. TFAE.

(1) φ は normal

(2) $\varphi \in B(H)_*$.

(3). $\varphi(A) = \mathrm{tr}(TA)$ $\quad ({}^\exists T \in T(H))$

Remark. これらの議論は $B(H)$ を M にしても成立.

Remark. $T(H)^* = B(H)$ が知られているため.

$(B(H)_*)^* \simeq B(H)$ とできる. なので predual とよばれる.

§3 v.N. alg の type

この章では. H: Hilbert sp. を separable とし.

$M \subset B(H)$: v.N. alg.

$P(M) = \{ P \in M \mid \text{proj.} \}$ とする.

Def 3.1.

$Z(M) = M \cap M'$ を M の center という. また.

$Z(M) = \mathbb{C} \cdot I$ のとき. Mを factor という.

Remark. $E \in P(Z(M))$ とすると. $E^{\perp} \in P(Z(M))$ なので

$M = EM + E^{\perp}M = EME \oplus E^{\perp}ME^{\perp}$ と分解できる

$\longrightarrow$ 本質的には factor の部分が大事.

Def 3.3. $E, F \in P(M)$ に対し. 同値関係を.

$E \sim F \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^{\exists}V \in M$ s.t. $VV^* = E, V^*V = F$ で入れる.

$V = EV = VF = EVF$

∵ 同値関係であること.

$E \sim E$ は $V = E$ とすればよい

$E \sim F$ のとき. V と V^*をおきかえれば. $F \sim E$ となる.

$E \sim F, F \sim G$ のとき. $VV^* = E, V^*V = F, \quad UU^* = F, U^*U = G$

とすれば. $VU(VU)^* = VUU^*V^* = VFV^* = VV^*VV^* = E^2 = E$.

$(VU)^*(VU) = U^*V^*VU = U^*FU = G$ となり $E \sim G$

また. $E \prec F \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^{\exists}E_1 \in P(M)$ s.t. $E \sim E_1 \leq F$. とすると $\underbrace{\text{順序}}_{\text{同値類の}}$関係になる!

順序関係になることを示す前に2つ準備をする.

Lemma 3.4.

2つの直交するproj.列 $\{E_j : j\in J\}, \{F_j : j \in J\} \subset P(M)$ が.

$E_j \sim F_j$ $(\forall j \in J)$ をみたすなら $\sum E_j \sim \sum F_j$

∵ $\sum$ の limit は WOT, SOT, σ-weak のどれでも収束.

まず. $\exists V_j \in M$ s.t. $V_j V_j^* = E_j$, $V_j^* V_j = F_j$ とできる

ここで $V = \sum V_j$ とおくと. V_j の domain, range はそれぞれ直交するから.

これはSOTで収束して.

$$VV^* = \sum V_j V_j^* = \sum E_j$$
$$V^*V = \sum V_j^* V_j = \sum F_j$$
となる //

Thm 3.5. $E, F \in P(M)$ に対し.

$E \prec F$, $F \prec E \Rightarrow E \sim F$.

∵ まず. $E \prec F$ なので $\exists F_1 \in P(M)$ s.t. $E \sim F_1 \le F$.

$F \prec E$ なので $\exists E_1 \in P(M)$ s.t $F \sim E_1 \le E$ とできる.

∴ $\exists W, V$ s.t. $W^*W = E$, $WW^* = F_1$

$V^*V = F$, $VV^* = E_1$ とできる.

今. $E_0 = E$, $F_0 = F$ とおき.

$E_n := VF_{n-1}V^*$, $F_n := WE_{n-1}W^*$ とおくと.

$E_n, F_n \in P(M)$ かつ proj. の減少列になる.

∵ 帰納法で. $E_n^2 = VF_{n-1}V^*VF_{n-1}V^* = VF_{n-1}FF_{n-1}V^* = VF_{n-1}V^* = E_n$ //

さらに、$E_\infty = \bigwedge_{n=1}^{\infty} E_n$, $F_\infty = \bigwedge_{n=1}^{\infty} F_n$ とおくと、

(注：E_n に vector sp. K_n が対応するとして、
$K = \cap K_n$ は closed subsp. E_∞ はここへの proj.)

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} (E_n - E_{n+1}) + E_\infty$$
$$F = \sum_{n=0}^{\infty} (F_n - F_{n+1}) + F_\infty$$
とできる

∵ $K_0 = K \oplus \bigoplus_{n=0}^{\infty} (K_0 \cap K_1^\perp)$ とできるから、

なおもし $x \in \left(\oplus (K_0 \cap K_1^\perp)\right)^\perp \cap K_0 \Rightarrow x \in (K_0 \cap K_1^\perp)^\perp \cap K_0 = K_1$ となる

以下 $x \in K_n$ が出て、$x \in K$ となる。

ここで、$W(E_n - E_{n+1})W^* = F_{n+1} - F_{n+2}$

$V(F_n - F_{n+1})V^* = E_{n+1} - E_{n+2}$.

$W E_\infty W^* = F_\infty$

∵ $W E_\infty W^* \leq W E_{n-1} W^* = F_n$. より $W E_\infty W^* \leq F_\infty$

$W^* F_\infty W \leq W^* F_{n+1} W = E_n$ より $W^* F_\infty W \leq E_\infty$.

∴ $F_\infty \leq W E_\infty W^*$ ∴ $F_\infty = W E_\infty W^*$

∴ Lemma 3.4 より $E \sim F$ である。 //.

順序関係の証明.

(i) $E \prec E$ は明らか.

(ii) $E \prec F, F \prec E \Rightarrow E \sim F$ は Thm 3.5 から.

(iii) $E \prec F, F \prec G \Rightarrow E \prec G$

∵ $E \sim E_1 \leq F$, $VV^* = E$, $V^*V = E_1$

$F \sim F_1 \leq G$, $WW^* = F$, $W^*W = F_1$ とできるが.

$VW(VW)^* = VWW^*V^* = VFV^* = VV^* = E$.

$(VW)^*VW = W^*V^*VW = W^*E_1W \leq W^*FW$

$= F_1 \leq G$ となり $E \prec G$ がわかる

さて v.N. alg. の type を考えよう.

Def 3.6: $E \in P(M)$ について. 次で定める.

(1) E が Abel $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ EME が commutative

(2) E が finite $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $F \in P(M), E \sim F \leq E \Rightarrow E = F$.

(3) E が infinite $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ E が finite でない

(4) E が properly infinite $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall P \in P(Z(M))$ に対し. PE は 0 or infinite

(5) E が purely infinite $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $^\nexists F \in P(M)$ s.t. $0 \neq F \leq E$ が finite

Def 3.7. v.N. alg. を次のように分類する.

(1) M が finite, properly infinite, purely infinite ,

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ I が 〃 .

(2) M が semi-finite $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall E \in P(Z(M))$ に対し. $^\exists F \in P(M)$ s.t. $0 \neq F \leq E$ かつ finite

(3) M が I型 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall E \in P(Z(M))$ に対し. $^\exists F \in P(M)$ s.t. $0 \neq F \leq E$ かつ Abel.

(4) M が II型 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ M が semi-finite かつ. 0以外の Abel をもたない.

(5) M が III型 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ M が 0以外の finite proj. をもたない.

<u>Remark</u>. M が facter $(Z(M)=\mathbb{C}\cdot I)$ のときは少しかんたんになる

(3') M がⅠ型 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ M が non-zero Abel をもつ

(4') M がⅡ型 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ M が non-zero Abel をもたず、finite proj. をもつ.

(5') M がⅢ型 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ M が non-zero finite proj. をもたない.

<u>例</u> (1). $M_n(\mathbb{C})$ や $B(H)$ において. 1次元proj. P は Abel.

∵ $PB(H)P=\mathbb{C}\cdot P$ より明らか. $\longrightarrow B(H)$ はⅠ型

(2). M が tracial faithful state をもてば. $\forall E\in P(M)$ は finite.

∵ $E,F\in P(M)$, $E\sim F\leq E$ とすると.

$tr(E-F)=tr(VV^*-V^*V)=0$ ∴ $E-F=0$ //

$\longrightarrow$ tracial state をもてば. Ⅰ型かⅡ型.

次ページを先に

(4) Araki-Woods factor.

C^*-alg. $\overset{\infty}{\bigotimes} M_2(\mathbb{C})$ 上の state を以下で与える.

まず φ_λ を M_2 上の state で. $(\lambda\in[0,1]$

$$\varphi_\lambda(A)=Tr\left(\frac{1}{1+\lambda}\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}A\right)$$ で与えられるものとし.

$\overset{\infty}{\bigotimes} M_2$ 上の state を $\psi_\lambda:=\overset{\infty}{\bigotimes}\varphi_\lambda$ で与える.

ここでこの GNS rep. (π_λ, H_λ) を考え. $M_\lambda=\pi_\lambda(\overset{\infty}{\bigotimes} M_2)$ とすると次がいえる.

<u>Thm 3.8</u>. M_λ は factor であり.

(1) $\lambda=0$ のとき $M_\lambda\simeq B(H)$

(2) $\lambda=1$ のとき M_λ は II_1-factor.

(3) $\lambda \in (0.1)$ のとき.

M_λ は III_λ - factor である.

例 (3) $B(H) \ni I$ は infinite.

∵ H の CONS を $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ とし. S を Shift op. とすると.

$S^*S = I, \quad SS^* = I - |e_1\rangle\langle e_1|$ なので.

$I \sim I - |e_1\rangle\langle e_1| \leq I$ であるが, $I - |e_1\rangle\langle e_1| \neq I$ より. I は infinite

Fact I型は

I_n型 : $M_n(\mathbb{C})$

I_∞型 : $B(H)$ に限られる.