—Joint Workshop—
第13回 信州関数解析シンポジウム
& 第3回 信州若里数理解析研究会

—講演概要集—

信州若里数理解析研究会：2 月 12 日 (水)

伊藤 昇 (信州大学・特別招待講演)

題目：A q-analogue of Arnold strangeness / The non-orientable genus for knots and links

(前半) 1994 年に Arnold が平面曲線や波面の基本 3 不変量 J^+, J^-, St を導入した．1996 年には，実代数曲線に対する Rokhlin の式を応用して Viro が J^- の q-類似を考案し，その結果を拡張した．また 2013 年には，Hopf の曲率積分を一般化する形で Lanzat-Polyak が J^+ の q-類似を与えた．一方で，St の q-類似については長らく未解決のままだったが，2023 年に講演者が未解決の問題に対する一つの解答として St の q-類似を構築した．最近になり，St の q-類似における変数 q に関するテイラー級数の n 次係数について幾何的意味と連動した代数的意味を明らかにした．

(後半) 結び目を境界とする曲面に関する問題については，種数に関するミルナー予想を含む 100 年近くの歴史がある．特に向きづけ可能曲面の最小種数については，まず交代結び目の範囲では村杉 (1958 年) や Crowell (1959 年) によって決定され，一般の範囲では Ozsváth-Szabó による Heegaard Floer homology (2003 年) に基づき最小種数が理論的に決定された．一方，向きづけ不可能曲面の種数については寺垣内 (2004 年) や平澤-寺垣内 (2006 年)，市原-水嶋 (2010 年) などの論文による個別のクラスについての開拓的な研究や，村上-安原 (1995 年)，Kalfagianni-Lee (2016 年) らによる不等式評価の研究が蓄積されたものの，等式による一般論や計算法が未開拓のままであった．しかし，2020 年に講演者ら (伊藤-瀧村) と Kindred が，それぞれ独立に交代結び目の向きづけ不可能曲面の種数を決定する等式を発見した．本講演では講演者らの手法を紹介し，その手法を応用した (紐の数を 2 本にした) 2 成分交代絡み目の等式への拡張に相当する川尻和果との共同研究についても触れる．

鈴木 章斗 (公立小松大学・招待講演)

題目：2 次元今野関数

　単純ランダムウォークでは次元によらず、時間スケールされた位置の極限分布がガウシアンになるが、その量子版である量子ウォークでは、極限分布の存在は次元に無関係に示されているものの、確率密度関数の形状は、1 次元における今野関数と、2 次元における特殊な状況でしかわかっていない。本講演では、この 2 次元の確率密度関数は今野関数の 2 次元への拡張にはなっておらず、より一般の場合において 2 次元への今野関数の一般化が得られることを報告する。本講演は、浅原 (滋賀大)、船川 (北海学園大)、関 (北大) との共同研究の成果に基づく。

岡本 葵 (大阪大学・招待講演)

題目：微分を含む高階非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題の非適切性

周期境界条件において，非線形項に微分を含む高階非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題を考える．非線形 Schrödinger 方程式の非適切は，Chihara (2002), Christ (preprint) により示されている．本講演では，高階非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題は周期境界条件の下で非適切となることを述べる．ユークリッド空間では，分散性による局所平滑化作用により，初期値問題は適切となるが，周期境界条件下では，共鳴相互作用が発生し，分散性が強い場合であっても解写像が連続にならないことを示す．なお，本講演の内容は，近藤俊希氏（大阪大学）との共同研究に基づく．

中里 亮介 (信州大学・招待講演)

題目：On the compressible Navier-Stokes-Korteweg equations with zero sound speed

多次元全領域 $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 3)$ において, 圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 方程式の初期値問題 (NSK) を考察する. 圧縮性粘性流体の数理モデルの解析においては, 音速パラメータ γ が真に正であることを仮定するのが自然であるが, ここでは $\gamma = 0$ とした特殊な状況下での (NSK) の解の性質を考察し, 特に以下で述べる (1) と (2) について得られた結果を紹介する: (1) [Foias-Temam 型の実解析性評価] 1989 年に Foias-Temam は, 非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解に Fourier multiplier $e^{\sqrt{t}|\nabla|} := \mathcal{F}^{-1}e^{\sqrt{t}|\xi|}\mathcal{F}$ を作用させ, その Sobolev ノルムの有界性を証明した. ここでは Fourier-Herz 空間を基調とした時空関数空間を導入し, 同様の評価が (NSK) の解に対しても成り立つことを示す. (2) [L^p-L^1 減衰評価] 初期値に弱 L^1 型の有界性を仮定した際に, (NSK) の解の Fourier-Herz ノルムが熱方程式の解と同じ時間減衰率を持つことを証明する. 特に (1) で得られる実解析性評価の応用で, 解の高階微分についても同様の評価が成り立つことを紹介する. 本講演の内容は, 大阪大学の小林孝行氏との共同研究に基づく.

河邊 淳 (信州大学・招待講演)

題目：連続な表現測度による非線形汎関数の Choquet 積分表示

X は空でない集合，$\mathcal{D}$ は X の部分集合からなる族で $\emptyset \in \mathcal{D}$ とする．$\mu(\emptyset) = 0$ を満たす単調増加な集合関数 $\mu\colon \mathcal{D} \to [0,\infty]$ は非加法的測度と呼ばれ，ゲーム理論や不確実性理論で重要な役割を果たしている．この種の加法性をもたない集合関数に対しては，Lebesgue 積分のような線形性をもつ積算概念を整合的には定義できない．そこで，理論の展開では，非線形な積算概念である Choquet 積分，Sugeno 積分，Shilkret 積分などが援用される．

この発表で取り扱う非線形汎関数の Choquet 積分表示定理は，一般に次のように定式化される．$\Phi \subset [0,\infty]^X$ と $\Psi \subset \mathbb{R}^X$ は零関数 0 を含む関数空間とする．$I(0) = 0$ を満たす単調な非線形汎関数 $I\colon \Phi \to [0,\infty]$ または $J\colon \Psi \to \mathbb{R}$ が与えられたとき，非加法的測度 $\mu\colon 2^X \to [0,\infty]$ が存在して，各 $f \in \Phi$ に対して

$$I(f) = \mathrm{Ch}(\mu, f) := \int_0^\infty \mu(\{f > t\})dt$$

が成り立つとき，I は Choquet 積分表示可能といい，有限な非加法的測度 $\mu\colon 2^X \to [0,\infty)$ が存在して，各 $f \in \Psi$ に対して

$$J(f) = \mathrm{Ch}^a(\mu, f) := \int_0^\infty \mu(\{f > t\})dt - \int_{-\infty}^0 \{\mu(X) - \mu(\{f > t\})\}\, dt$$

が成り立つとき，J は反対称ショケ積分表示可能という．また，μ を I と J の表現測度という．この発表では，表現測度 μ が，開集合，閉集合，コンパクト集合，可測集合などの取り扱いやすい集合族上で内側からも外側からも同時に連続となるために非線形汎関数や関数空間から生成される集合族に課すべき条件を見出し，連続な表現測度による Choquet 積分表示定理を抽象的な枠組みで定式化する．

加賀谷 佳輝 (信州大学・招待講演)

題目：コーシー分布に従う独立な確率変数の平均に対する大偏差原理

本講演では, コーシー分布に関する大偏差原理の問題を扱う. 大偏差原理とは, 確率分布の期待値から遠い所の確率の漸近的な挙動を特徴付ける理論であり, 稀な事象の解析において重要な意味を持つ. コーシー分布とは, 指数 1 の安定分布であり, 位置パラメーター μ と尺度パラメーター σ で特徴付けられる. その確率密度関数は, 指数 2 の安定分布であるガウス分布と同じく釣り鐘型であるが, その標本は外れ値を許すという点が特徴的である. その反映として期待値を持たないため, 大偏差原理の既知の一般論は適用できない. 講演では, コーシー分布の大偏差原理を考えるにあたり得られた成果, 未解決の課題について説明する. なお, 本講演の内容は信州大学の乙部厳己氏との共同研究に基づく.

信州関数解析シンポジウム：2 月 13 日 (木)

松澤 泰道 (信州大学)

題目：Klein-Gordon 方程式の量子化と正準交換関係の表現論

Klein-Gordon 方程式に従う実スカラー場の量子化を考える．すなわち，適当な Hilbert 空間に作用する自己共役作用素の族で Klein-Gordon 方程式と正準交換関係を満たすものを構成する．特に正準交換関係を満たす自己共役作用素の族は正準交換関係の表現と呼ばれ,「何を 1 粒子とみなすか」ということに対応している． 2 つの表現が与えられたとき，それらがユニタリ同値またはユニタリ非同値であるかは基本的な問いであり，すでに一般論が知られている．一方，具体的な場合について，2 つの表現が同値かどうかを判定する条件はあまり知られていない．本講演ではこの点について，これまでに得られている結果を説明したい．

穂坂 大将 (横浜国立大学・招待講演)

題目：行列の摂動論によるジョンソングラフ上量子ウォークの解析

本講演では、ジョンソングラフと呼ばれるグラフに対し、他のグラフを接続したグラフ上における量子ウォークの挙動について考察する。特に、今回は接続するグラフとしてスターグラフを採用した際に、ほとんど全ての量子ウォークが 2 つのグラフの間を周期的に移動するような興味深い現象が発生することを固有値解析の結果、得ることができたため紹介する。この現象は、本講演では拍動現象と呼び、従来の量子探索アルゴリズムの一種の拡張と考えられる。また、解析手法については、行列における摂動論を用いて量子ウォークの時間発展作用素の固有値を調べる事ができたため、それらについても紹介する。

山本 和 (信州大学)

題目：BB84 プロトコルと情報攪乱定理

量子コンピュータの発展に伴い、RSA 暗号をはじめとする従来の暗号技術の安全性が問題視されている。そのため、セキュアな通信の実現には量子耐性の確保が不可欠である。量子耐性を備えた暗号技術の一つとして量子鍵配送（QKD）が注目されており、QKD は量子の性質を利用することで盗聴不可能かつ安全な通信を実現する。本講演では、量子鍵配送の代表的な方式である BB84 プロトコルを取り上げ、その仕組みの解説に加え、エラー確率と相互情報量に関する不等式「情報攪乱定理」の紹介を行う。

富岡 駿允 (北海道大学・招待講演)

題目：Perron-Frobenius の定理の逆問題

Perron-Frobenius の定理は，各成分が正の正方行列の最大固有値が単純であるという定理である．一般の Hilbert 空間上の作用素に対しても，Hilbert cone という概念を用いて同様の主張が成立つことが知られている．本講演では，この定理の逆問題「有界正自己共役作用素 A が $\|A\|$ を単純固有値に持つならば，A はある Hilbert cone に関して正値性保存，エルゴード的であるなどの性質が言えるか」について発表する．また下に有界な自己共役作用素の生成する熱半群への応用についても述べる．本講演の内容は，北海道大学の宮尾忠宏先生との共同研究 arXiv:2405.11136 <https://arxiv.org/abs/2405.11136 > (修正版が近日公開予定) に基づく．

大野 博道 (信州大学)

題目：Böttcher-Wenzel 不等式の拡張とその応用

Böttcher-Wenzel 不等式は，2 つの行列の可換子のヒルベルト・シュミットノルムが，元の行列のヒルベルト・シュミットノルムの積の $\sqrt{2}$ 倍で抑えられることを示した不等式である．この不等式にはいくつかの拡張版が存在しているが，今回は新たな拡張として，ノルムを重み付きのヒルベルト・シュミットノルムに変えた場合の不等式について考察し，行列が 2×2 の場合や特別な条件の場合について，最も良い不等式を得ることができたので紹介する．また，この拡張を用いることで得られる新たな不確定性関係についても解説する．

以上