Cellular 代数

和田 堅太郎 (信州大学理学部)

2016 年 9 月 1 日 更新

§ 0. はじめに

このノートは, cellular 代数について著者が勉強したことをまとめたものです。2016 年 8 月 26 日 ～ 8 月 30 日に, 大阪府立大学で行われた「Summer School on Quasi-hereditary Algebras」において, cellular 代数に関する講演の機会を頂いたのに合わせて, これまでに書いていたものを整理し, 公開することにしました。あくまで個人的なノートを公開しているに過ぎないので, 利用する際は, **読者自身の責任のもとで利用**して頂くようにお願いします。ただし, 何か間違い等を見つけた場合は, “こいつは馬鹿だなぁ” で済ませずに, 著者まで知らせてもらえると助かります。また, アホな人間が書いたノートですので, 無駄な議論を延々としている部分も多々見受けられると思いますが, その辺はご容赦頂きたいと思います。

なお, cellular 代数に関しては, C.Xi 氏による良いサーベイ [X3] が既にありますので, そちらも参考にしてもらうといいと思います (このノートを書く際にも多いに参考にさせて頂きました)。

Notation : Artin 環 $\mathscr{A}$ と $x \in \mathscr{A}$ に対し, x で生成される $\mathscr{A}$ の両側イデアルを $\mathscr{A}x\mathscr{A}$ と表す。つまり, $\mathscr{A}x\mathscr{A} = \{\sum_i a_i x b_i \,|\, a_i, b_i \in \mathscr{A}\}$ である。

Artin 環 $\mathscr{A}$ に対し，有限生成左 $\mathscr{A}$-加群のなす圏を $\mathscr{A}$-mod で表す。単に $\mathscr{A}$-加群というときは，左 $\mathscr{A}$-加群を考えることにする。また $M \in \mathscr{A}$-mod と既約 $\mathscr{A}$-加群 L に対し，M における L の組成重複度を $[M : L]$ で表す。

$\mathscr{A}$-mod の Grothendieck 群を $K_0(\mathscr{A}\text{-mod})$ で表し，$M \in \mathscr{A}$-mod の $K_0(\mathscr{A}\text{-mod})$ における像を $[M]$ で表す。

Contents

更新情報

2016-8-23 ノートを公開しました。
2016-9-1 Theorem 1.6 を修正し, Remark 1.7 を追加しました。
Remark 4.26 を追加しました。
Proposition B.5 (iii) を修正しました。

§ 1. Cellular 代数

Definition 1.1 ([GL]). R を可換環とし, $\mathscr{A}$ を R 上の結合代数とする。ある有限半順序集合 $(\Lambda, \geq)$ と有限集合 $\mathcal{T}(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ に対し，$\mathscr{A}$ の R-自由基底

$$\mathcal{C} = \{c^\lambda_{\mathfrak{st}} \,|\, \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda),\, \lambda \in \Lambda\}$$

が存在し，以下の条件 (i), (ii) を満たす時，$\mathscr{A}$ は $\mathcal{C}$ を ***cellular* 基底**とする ***cellular* 代数**であるという：

(i) R-準同型写像

$$\iota : \mathscr{A} \to \mathscr{A} \;\; s.t. \;\; \iota(c^\lambda_{\mathfrak{st}}) = c^\lambda_{\mathfrak{ts}} \quad (c^\lambda_{\mathfrak{st}} \in \mathcal{C})$$

は, 代数の反自己同型を与える。*(*定義より明らかに *involution* である。*)*

(ii) 任意の $a \in \mathscr{A}$ と $c^\lambda_{\mathfrak{st}} \in \mathcal{C}$ に対し，

(1.1.1)
$$a \cdot c^\lambda_{\mathfrak{st}} \equiv \sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{T}(\lambda)} r^{(a,\mathfrak{s})}_{\mathfrak{u}} c^\lambda_{\mathfrak{ut}} \mod \mathscr{A}(> \lambda) \quad (r^{(a,\mathfrak{s})}_{\mathfrak{u}} \in R)$$

が成り立つ。ここで，$\mathscr{A}(> \lambda)$ は

$$\{c^{\lambda'}_{\mathfrak{s}'\mathfrak{t}'} \,|\, \mathfrak{s}', \mathfrak{t}' \in \mathcal{T}(\lambda'),\, \lambda' \in \Lambda \;\, s.t. \;\, \lambda' > \lambda\}$$

によって張られる $\mathscr{A}$ の R-部分加群であり，(1.1.1) に現れる $r^{(a,\mathfrak{s})}_{\mathfrak{u}}$ は，$\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ の取り方には依らずに定まる。

1.2. $\mathscr{A}$ を可換環 R 上の $\mathcal{C} = \{c^\lambda_{\mathfrak{st}} \,|\, \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda),\, \lambda \in \Lambda\}$ を cellular 基底とする cellular 代数であるとする。定義より, $\iota(\mathscr{A}(> \lambda)) = \mathscr{A}(> \lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ であることに注意して，(1.1.1) の両辺に ι を施すと，

$$c^\lambda_{\mathfrak{ts}} \cdot \iota(a) \equiv \sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{T}(\lambda)} r^{(a,\mathfrak{s})}_{\mathfrak{u}} c^\lambda_{\mathfrak{tu}} \mod \mathscr{A}(> \lambda)$$

を得る。ここで，$\iota(a)$ を a に置き換えると，

(1.2.1)
$$c^\lambda_{\mathfrak{ts}} \cdot a \equiv \sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{T}(\lambda)} r^{(\iota(a),\mathfrak{s})}_{\mathfrak{u}} c^\lambda_{\mathfrak{tu}} \mod \mathscr{A}(> \lambda)$$

となる。$\lambda \in \Lambda$ に対し，

$$\mathscr{A}(> \lambda) := \langle c^{\lambda'}_{\mathfrak{s}'\mathfrak{t}'} \,|\, \mathfrak{s}', \mathfrak{t}' \in \mathcal{T}(\lambda'),\, \lambda' \in \Lambda \text{ s.t. } \lambda' > \lambda \rangle_{R\text{-span}}$$
$$\mathscr{A}(\geq \lambda) := \langle c^{\lambda'}_{\mathfrak{s}'\mathfrak{t}'} \,|\, \mathfrak{s}', \mathfrak{t}' \in \mathcal{T}(\lambda'),\, \lambda' \in \Lambda \text{ s.t. } \lambda' \geq \lambda \rangle_{R\text{-span}}$$

とおくと，(1.1.1), (1.2.1) より，$\mathscr{A}(>\lambda)$ 及び，$\mathscr{A}(\geq\lambda)$ は $\mathscr{A}$ の両側イデアルとなる。よって，$\mathscr{A}(\geq\lambda)/\mathscr{A}(>\lambda)$ は

$$\{\overline{c}^{\lambda}_{\mathfrak{st}} := c^{\lambda}_{\mathfrak{st}} + \mathscr{A}(>\lambda) \,|\, \mathfrak{s},\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)\}$$

を R-自由基底とする $(\mathscr{A},\mathscr{A})$-両側加群である。

1.3. (Cell 加群.) $\mathfrak{t}\in\mathcal{T}(\lambda)$ に対し，$\mathscr{A}(\geq\lambda)/\mathscr{A}(>\lambda)$ の R-部分加群

$$\Delta_{\mathfrak{t}}(\lambda) := \left\langle \overline{c}^{\lambda}_{\mathfrak{st}} \,|\, \mathfrak{s}\in\mathcal{T}(\lambda)\right\rangle_{R\text{-span}}$$

を考えると，(1.1.1) より，$a\in\mathscr{A}$, $\overline{c}^{\lambda}_{\mathfrak{st}}\in\Delta_{\mathfrak{t}}(\lambda)$ に対し，

$$a\cdot\overline{c}^{\lambda}_{\mathfrak{st}} = \sum_{\mathbf{u}\in\mathcal{T}(\lambda)} r^{(a,\mathfrak{s})}_{\mathbf{u}}\overline{c}^{\lambda}_{\mathfrak{ut}}$$

となるので，$\Delta_{\mathfrak{t}}(\lambda)$ は $\mathscr{A}(\geq\lambda)/\mathscr{A}(>\lambda)$ の左 $\mathscr{A}$-部分加群となる。さらに， $\mathfrak{t},\mathfrak{t}'\in\mathcal{T}(\lambda)$ に対し，

$$\Delta_{\mathfrak{t}}(\lambda)\to\Delta_{\mathfrak{t}'}(\lambda) \text{ s.t. } \overline{c}^{\lambda}_{\mathfrak{st}}\mapsto\overline{c}^{\lambda}_{\mathfrak{st}'} \quad (\mathfrak{s}\in\mathcal{T}(\lambda))$$

は，左 $\mathscr{A}$-加群の同型写像となる。つまり，左 $\mathscr{A}$-加群 $\Delta_{\mathfrak{t}}(\lambda)$ は $\mathfrak{t}\in\mathcal{T}(\lambda)$ の取り方に依らない。そこで，$\lambda\in\Lambda$ に対し，

$$\{c^{\lambda}_{\mathfrak{s}} \,|\, \mathfrak{s}\in\mathcal{T}(\lambda)\}$$

を R-自由基底とする R-自由加群を $\Delta(\lambda)$ とおき，$\Delta(\lambda)$ 上に $\mathscr{A}$ の左作用を

(1.3.1) $$a\cdot c^{\lambda}_{\mathfrak{s}} = \sum_{\mathfrak{u}\in\mathcal{T}(\lambda)} r^{(a,\mathfrak{s})}_{u} c^{\lambda}_{\mathfrak{u}}$$

によって定めると，$\Delta(\lambda)$ は左 $\mathscr{A}$-加群となる。ここで，$r^{(a,\mathfrak{s})}_{\mathfrak{u}}\in R$ は (1.1.1) におけるものである。明らかに，任意の $\mathfrak{t}\in\mathcal{T}(\lambda)$ に対し，

(1.3.2) $$\Delta(\lambda)\to\Delta_{\mathfrak{t}}(\lambda) \text{ s.t. } c^{\lambda}_{\mathfrak{s}}\mapsto\overline{c}^{\lambda}_{\mathfrak{st}} \quad (\mathfrak{s}\in\mathcal{T}(\lambda))$$

は，左 $\mathscr{A}$-加群の同型写像となり，

(1.3.3) $$\Delta(\lambda)\to\mathscr{A}(\geq\lambda)/\mathscr{A}(>\lambda) \text{ s.t. } c^{\lambda}_{\mathfrak{s}}\mapsto\overline{c}^{\lambda}_{\mathfrak{st}} \quad (\mathfrak{s}\in\mathcal{T}(\lambda))$$

は，左 $\mathscr{A}$-加群の単射準同型写像となる。$\Delta(\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda)$ を $\mathscr{A}$ の**左 cell 加群**という。

同様に，$\lambda \in \Lambda$ に対し，

$$\{c_{\mathfrak{s}}^{\sharp\lambda} \,|\, \mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda)\}$$

を R-自由基底とする R-自由加群を $\Delta^\sharp(\lambda)$ とおき，$\Delta^\sharp(\lambda)$ 上に $\mathscr{A}$ の右作用を

$$c_{\mathfrak{s}}^{\sharp\lambda} \cdot a = \sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{u}^{(\iota(a),\mathfrak{s})} c_{\mathfrak{u}}^{\sharp\lambda} \tag{1.3.4}$$

によって定めると，$\Delta^\sharp(\lambda)$ は右 $\mathscr{A}$-加群となる。ここで，$r_{\mathfrak{u}}^{(\iota(a),\mathfrak{s})} \in R$ は (1.2.1) におけるものである。明らかに，任意の $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ に対し，

$$\Delta^\sharp(\lambda) \to \mathscr{A}(\geq \lambda)/\mathscr{A}(> \lambda) \text{ s.t. } c_{\mathfrak{s}}^{\sharp\lambda} \mapsto \overline{c}_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}}^{\lambda} \quad (\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda)) \tag{1.3.5}$$

は，右 $\mathscr{A}$-加群の単射準同型写像となる。$\Delta^\sharp(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ を $\mathscr{A}$ の**右 cell 加群**という。

定義より，$\mathscr{A}(\geq \lambda)$, $\mathscr{A}(> \lambda)$ は ι で不変であるので，ι は商代数 $\mathscr{A}/\mathscr{A}(> \lambda)$ 上の anti-involution を誘導し，(1.1.1), (1.2.1) より，$\mathscr{A}(\geq \lambda)/\mathscr{A}(> \lambda)$ は $\mathscr{A}/\mathscr{A}(> \lambda)$ の ι で不変な両側イデアルとなる。$\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ を 1 つ固定し，(1.3.3) (resp. (1.3.5)) によって, $\Delta(\lambda)$ (resp. $\Delta^\sharp(\lambda)$) を $\mathscr{A}(\geq \lambda)/\mathscr{A}(> \lambda)$ に含まれる $\mathscr{A}/\mathscr{A}(> \lambda)$ の左イデアル (resp. 右イデアル) と思うと，$\mathscr{A}(\geq \lambda)/\mathscr{A}(> \lambda)$ の中で，

$$\Delta^\sharp(\lambda) = \iota(\Delta(\lambda)) \quad (c_{\mathfrak{s}}^{\sharp\lambda} = \overline{c}_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}}^{\lambda} = \iota(\overline{c}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\lambda}) = \iota(c_{\mathfrak{s}}^{\lambda}) \text{ for } \mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda)) \tag{1.3.6}$$

となる。また，(1.1.1), (1.2.1) より，

$$\Delta(\lambda) \otimes_R \Delta^\sharp(\lambda) \to \mathscr{A}(\geq \lambda)/\mathscr{A}(> \lambda) \text{ s.t. } c_{\mathfrak{s}}^{\lambda} \otimes c_{\mathfrak{t}}^{\sharp\lambda} \mapsto \overline{c}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\lambda} \quad (\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)) \tag{1.3.7}$$

は $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群の同型写像を与える。

1.4. 半順序集合 $(\Lambda, \geq)$ 上に，半順序 $\geq$ と整合的な全順序を 1 つ定め，

$$\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\} \text{ s.t. } i < j \text{ if } \lambda_i < \lambda_j$$

とおく。$\lambda_k \in \Lambda$ に対し，

$$\mathscr{A}(\lambda_k) := \left\langle c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\lambda_i} \,|\, \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda_i),\, \lambda_i \in \Lambda \text{ s.t. } i \geq k \right\rangle_{R\text{-span}}$$

とおくと，(1.1.1), (1.2.1) より，$\mathscr{A}(\lambda_k)$ は $\mathscr{A}$ の両側イデアルとなり，両側イデアルの列

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}(\lambda_1) \supset \mathscr{A}(\lambda_2) \supset \cdots \supset \mathscr{A}(\lambda_m) \supset \mathscr{A}(\lambda_{m+1}) = 0 \tag{1.4.1}$$

を得る。定義と (1.1.1), (1.2.1) より，$\mathscr{A}(\lambda_k)/\mathscr{A}(\lambda_{k+1})$ は

$$\{c_{\mathfrak{st}}^{\lambda_k} + \mathscr{A}(\lambda_{k+1}) \,|\, \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda_k)\}$$

を R-自由基底とする $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群となる。明らかに，

(1.4.2)
$$\mathscr{A}(\lambda_k)/\mathscr{A}(\lambda_{k+1}) \to \mathscr{A}(\geq \lambda_k)/\mathscr{A}(> \lambda_k) \text{ s.t. } c_{\mathfrak{st}}^{\lambda_k} + \mathscr{A}(\lambda_{k+1}) \mapsto \overline{c}_{\mathfrak{st}}^{\lambda_k} \quad (\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda_k))$$

は，$(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群の同型写像を与える。以下，$c_{\mathfrak{st}}^{\lambda_k} + \mathscr{A}(\lambda_{k+1}) \in \mathscr{A}(\lambda_k)/\mathscr{A}(\lambda_{k+1})$ も $\overline{c}_{\mathfrak{st}}^{\lambda_k}$ と表す。

$\lambda_k \in \Lambda$ に対し, (1.3.3), (1.3.5), (1.4.2) を用いると，

(1.4.3)
$$\begin{aligned} &\Delta(\lambda_k) \subset \mathscr{A}(\geq \lambda_k)/\mathscr{A}(> \lambda_k) \cong \mathscr{A}(\lambda_k)/\mathscr{A}(\lambda_{k+1}) \quad \text{as left } \mathscr{A}\text{-modules}, \\ &\Delta^\sharp(\lambda_k) \subset \mathscr{A}(\geq \lambda_k)/\mathscr{A}(> \lambda_k) \cong \mathscr{A}(\lambda_k)/\mathscr{A}(\lambda_{k+1}) \quad \text{as right } \mathscr{A}\text{-modules} \end{aligned}$$

を得る。また，(1.1.1), (1.2.1) より，

(1.4.4)
$$\Delta(\lambda_k) \otimes_R \Delta^\sharp(\lambda_k) \to \mathscr{A}(\lambda_k)/\mathscr{A}(\lambda_{k+1}) \text{ s.t. } c_{\mathfrak{s}}^{\lambda_k} \otimes_R c_{\mathfrak{t}}^{\sharp\lambda_k} \mapsto \overline{c}_{\mathfrak{st}}^{\lambda_k} \quad (\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda_k))$$

は $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群の同型写像を与える。

各 $\lambda_k \in \Lambda$ に対し, $\iota(\mathscr{A}(\lambda_k)) = \mathscr{A}(\lambda_k)$ となるので，ι は商代数 $\mathscr{A}/\mathscr{A}(\lambda_{k+1})$ 上の anti-involution $\iota : \mathscr{A}/\mathscr{A}(\lambda_{k+1}) \to \mathscr{A}/\mathscr{A}(\lambda_{k+1})$ を誘導し，(1.1.1), (1.2.1) より，$\mathscr{A}(\lambda_k)/\mathscr{A}(\lambda_{k+1})$ は $\mathscr{A}/\mathscr{A}(\lambda_{k+1})$ の ι で不変な両側イデアルとなる。(1.4.3) を用いて, $\Delta(\lambda_k)$ (resp. $\Delta^\sharp(\lambda_k)$) を $\mathscr{A}(\lambda_k)/\mathscr{A}(\lambda_{k+1})$ に含まれる $\mathscr{A}/\mathscr{A}(\lambda_{k+1})$ の左イデアル (resp. 右イデアル) と思うと，$\mathscr{A}(\lambda_k)/\mathscr{A}(\lambda_{k+1})$ の中で,

(1.4.5)
$$\Delta^\sharp(\lambda_k) = \iota(\Delta(\lambda_k)) \quad (c_{\mathfrak{s}}^{\sharp\lambda_k} = \overline{c}_{\mathfrak{ts}}^{\lambda_k} = \iota(\overline{c}_{\mathfrak{st}}^{\lambda_k}) = \iota(c_{\mathfrak{s}}^{\lambda_k}) \text{ for } \mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda_k))$$

となる。さらに，ここまでの議論より可換図式

$$\begin{tikzcd} \Delta(\lambda_k) \otimes_R \iota(\Delta(\lambda_k)) \arrow[r, "\cong", "(1.4.4)"'] \arrow[d, "x\otimes\iota(y)\mapsto y\otimes\iota(x)"'] & \mathscr{A}(\lambda_k)/\mathscr{A}(\lambda_{k+1}) \arrow[d, "\iota"] \\ \Delta(\lambda_k) \otimes_R \iota(\Delta(\lambda_k)) \arrow[r, "\cong", "(1.4.4)"'] & \mathscr{A}(\lambda_k)/\mathscr{A}(\lambda_{k+1}) \end{tikzcd}$$

を得る。

以上のことを踏まえて，以下のように cellular 代数の基底を用いない別の定義を与える。

Definition 1.5 ([KX1])**.** $\mathscr{A}$ を可換環 R 上の結合代数で，有限階数の自由 R-加群であるものとする。また，代数の反自己同型 $\iota : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ で $\iota^2 = \mathrm{Id}$ であるもの *(anti-involution)* が与えられているとする。

$\mathscr{A}$ の両側イデアル $\mathcal{J}$ が次の条件 (i), (ii) を満たすとき，$\mathcal{J}$ を $\mathscr{A}$ の ***cell* イデアル**という：

(i) $\iota(\mathcal{J}) = \mathcal{J}$.

(ii) $\mathscr{A}$ の左イデアル $\Delta \subset \mathcal{J}$ で次の (a), (b) を満たすものが存在する：

(a) Δ は有限階数の R-自由加群である。

(b) $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群の同型写像 $\alpha : \Delta \otimes_R \iota(\Delta) \to \mathcal{J}$ で次の図式が可換になるものが存在する：

(1.5.1)
$$\begin{CD} \Delta \otimes_R \iota(\Delta) @>{\cong}>{\alpha}> \mathcal{J} \\ @V{x\otimes\iota(y)\mapsto y\otimes\iota(x)}VV @VV{\iota}V \\ \Delta \otimes_R \iota(\Delta) @>{\cong}>{\alpha}> \mathcal{J} \end{CD}$$

((i) と ι が *anti-involution* であることより，$\iota(\Delta) \subset \mathcal{J}$ は $\mathscr{A}$ の右イデアルとなることに注意。*)*

$\mathscr{A}$ の両側イデアルの列

(1.5.2)
$$\mathscr{A} = \mathcal{J}_1 \supset \mathcal{J}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{J}_m \supset \mathcal{J}_{m+1} = 0$$

で，$\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$ が $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$ の *cell* イデアルになるようなものが存在するとき，$\mathscr{A}$ を ***cellular* 代数** という。このとき，両側イデアルの列 (1.5.2) を $\mathscr{A}$ の ***cell chain*** という。

また，$\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$ の左イデアル $\Delta_i \subset \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$ で条件 (ii) を満たすものを，**左 *cell* 加群** といい，$\iota(\Delta_i)$ を **右 *cell* 加群** という。ここで，Δ_i *(resp.* $\iota(\Delta_i)$*)* を自然な全射 $\mathscr{A} \to \mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$ を通じて左 $\mathscr{A}$-加群 *(resp.* 右 $\mathscr{A}$-加群*)* と思う。

Theorem 1.6 (König-Xi [KX1])**.** $2 \in R^\times$ であるとき*, Definition 1.1* と *Definition 1.5* とは同値である。

Proof. Definition 1.1 ⇒ Definition 1.5 : (1.4.1) が cell chain となることは既に見た。

Definition 1.5 ⇒ Definition 1.1 :

$$\mathscr{A} = \mathcal{J}_1 \supset \mathcal{J}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{J}_m \supset \mathcal{J}_{m+1} = 0$$

を $\mathscr{A}$ の cell chain とする。$\Lambda = \{1, 2, \dots, m\}$ とおき，自然な順序を入れる。

各 $i \in \Lambda$ に対し，$\Delta_i \subset \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$ を左 cell 加群とする。cell chain の定義より，$(\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}, \mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1})$-両側加群の同型写像

$$\alpha_i : \Delta_i \otimes_R \iota(\Delta_i) \to \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$$

が存在し，図式

$$
\begin{tikzcd}
\Delta_i \otimes_R \iota(\Delta_i) \arrow[r, "\cong", "\alpha_i"'] \arrow[d, "x\otimes\iota(y)\mapsto y\otimes\iota(x)"'] & \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1} \arrow[d, "\iota"] \\
\Delta_i \otimes_R \iota(\Delta_i) \arrow[r, "\cong", "\alpha_i"'] & \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}
\end{tikzcd}
\tag{1.6.1}
$$

は可換となる。$\mathcal{T}(i)$ を Δ_i の R-自由基底の添え字集合とし，$\{c_\mathfrak{t} \mid \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(i)\}$ を Δ_i の R-自由基底とすると，$\{\iota(c_\mathfrak{t}) \mid \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(i)\}$ は $\iota(\Delta_i)$ の R-自由基底となる。自然な全射 $\mathcal{J}_i \to \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$ と α_i^{-1} の合成 $((\mathscr{A},\mathscr{A})$-両側加群の準同型)

$$\beta_i : \mathcal{J}_i \to \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1} \xrightarrow{\alpha_i^{-1}} \Delta_i \otimes_R \iota(\Delta_i)$$

を考え，$\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(i)$ に対し，$b_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \in \beta_i^{-1}(c_\mathfrak{s} \otimes \iota(c_\mathfrak{t}))$ を 1 つ取り，

$$\iota(b_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}) = b_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}} + x_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \quad (x_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \in \mathcal{J}_{i+1})$$

であるとする (可換図式 (1.6.1) に注意)。このとき, $b_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} = \iota^2(b_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}) = b_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} + x_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}} + \iota(x_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}})$ より,

$$\iota(x_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}) = -x_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}}$$

を得る。そこで, $\mathcal{T}(i)$ 上に適当に全順序を決めて, $2 \in R^\times$ であることに注意して, $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(i)$ に対し,

$$
\begin{aligned}
&c_{\mathfrak{s}\mathfrak{s}}^{(i)} := b_{\mathfrak{s}\mathfrak{s}} + \frac{1}{2} x_{\mathfrak{s}\mathfrak{s}} \quad \text{if } \mathfrak{t} = \mathfrak{s}, \\
&c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{(i)} := b_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} + x_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} - x_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}}, \quad c_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}}^{(i)} := b_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}} + 2x_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} - x_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}} \quad \text{if } \mathfrak{s} > \mathfrak{t}
\end{aligned}
$$

と定めると,

$$\iota(c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{(i)}) = c_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}}^{(i)} \tag{1.6.2}$$

を得る。明らかに

$$\{c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{(i)} \mid \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(i),\, i \in \Lambda\} \text{ は } \mathscr{A} \text{ の } R\text{-自由基底} \tag{1.6.3}$$

である。また，$c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{(i)}$ の取り方より，$a \in \mathscr{A}$ に対し，

$$a \cdot c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{(i)} \equiv \sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{T}(i)} r_\mathfrak{u}^{(a,\mathfrak{s})} c_{\mathfrak{u}\mathfrak{t}}^{(i)} \mod \mathcal{J}_{i+1} \tag{1.6.4}$$

が成り立つ。ここで，$r_{\mathfrak{u}}^{(a,\mathfrak{s})} \in R$ は $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(i)$ の取り方には依らない。($\beta_i(c_{\mathfrak{st}}^{(i)}) = c_{\mathfrak{s}} \otimes \iota(c_{\mathfrak{t}})$ かつ β_i は $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群の準同型であることに注意。) さらに，

$$\mathcal{J}_{i+1} = \langle c_{\mathfrak{s}'\mathfrak{t}'}^{(j)} \,|\, \mathfrak{s}', \mathfrak{t}' \in \mathcal{T}(j),\, j > i \rangle_{R\text{-span}} \tag{1.6.5}$$

である。(1.6.2), (1.6.3). (1.6.4), (1.6.5) より，$\{c_{\mathfrak{st}}^{(i)} \,|\, \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(i),\, i \in \Lambda\}$ は $\mathscr{A}$ の cellular 基底である。 □

Remark 1.7. Definition 1.1 における条件 (i) を,

(i)' $\mathscr{A}$ 上の anti-involution $\iota : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ で $\iota(c_{\mathfrak{st}}^{\lambda}) \equiv c_{\mathfrak{ts}}^{\lambda} \mod \mathscr{A}(> \lambda)$ $(c_{\mathfrak{st}}^{\lambda} \in \mathcal{C})$ をみたすものが存在する。

とおきかえれば，Theorem 1.6 は $2 \notin R^{\times}$ の場合にも成り立つ。cellular 代数の表現論においては, Definition 1.1 における条件 (i) を (i)' におきかえても，何も問題はない (全ての主張はそのまま成り立つ)。

Remark 1.8. $\mathscr{A}$ が cellular 代数であるとき，その cellular 基底や cell chain の取り方, 及び，anti-involution の取り方は，**一意的ではない**。

Proposition 1.9 ([KX1, Proposition 4.1])**.** *R は体であると仮定する。このとき, $\mathcal{J}$ を $\mathscr{A}$ の cell イデアルとすると，以下の (i), (ii) のいずれかが成り立つ。*

(i) $J^2 = 0$ である。

(ii) ある原始ベキ等元 $e \in \mathscr{A}$ が存在して $\mathcal{J} = \mathscr{A} e \mathscr{A}$ となる。さらに，積写像

$$\mathscr{A} e \otimes_R e\mathscr{A} \to \mathscr{A} e \mathscr{A}, \quad ae \otimes eb \mapsto aeb \quad (a, b \in \mathscr{A})$$

は $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群としての同型を与え,

$$e\mathscr{A} e \cong R \textit{ as algebras}$$

となる。特に, $\mathcal{J}$ は $\mathscr{A}$ の *heredity* イデアルである。

Proof. Lemma B.4 でより一般の形で示される。 □

Proposition 1.9 より, 以下の系を得る。

Corollary 1.10. *R は体であるとし，$\mathscr{A}$ は R 上の cellular 代数であるとする。*

$$\mathscr{A} = \mathcal{J}_1 \supset \mathcal{J}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{J}_m \supset \mathcal{J}_{m+1} = 0 \tag{1.10.1}$$

を (任意の) cell chain とする。このとき，以下の条件 (i) と (ii) は同値である。

(i) *cell chain* (1.10.1) は *heredity chain* である。

(ii) 全ての $k = 1, \ldots, m$ に対し，$\mathscr{A} / \mathscr{A}_{k+1}$ の *cell* イデアル $\mathcal{J}_k / \mathcal{J}_{k+1}$ は *nilpotent* でない。

cellular 代数 $\mathscr{A}$ が与えられたとき，以下の操作によって，新たな cellular 代数を構成することができる。

Proposition 1.11. $\mathscr{A}$ を *cellular* 代数とするとき，以下が成り立つ。

(i) $\mathscr{A}=\mathcal{J}_1\supset\mathcal{J}_2\supset\cdots\supset\mathcal{J}_m\supset\mathcal{J}_{m+1}=0$ を $\mathscr{A}$ の *cell chain* とするとき，商代数 $\mathscr{A}/\mathcal{J}_k$ *(*$2\le k\le m$*)* も *cellular* 代数である。
(ii) ι を $\mathscr{A}$ の *cellular* 構造を定める *anti-involution* とする。このとき，$e\in\mathscr{A}$ を $\iota(e)=e$ であるベキ等元とすると，$e\mathscr{A}e$ も *cellular* 代数となる。
(iii) $\mathscr{B}$ を *cellular* 代数とすると，$\mathscr{A}\otimes_R\mathscr{B}$ も *cellular* 代数である。
(iv) $\mathscr{A}$ の *trivial extension* $T(\mathscr{A})$ も *cellular* 代数である。

Proof. (i). Definition 1.5 より明らか。

(ii). $\mathscr{A}=\mathcal{J}_1\supset\mathcal{J}_2\supset\cdots\supset\mathcal{J}_m\supset\mathcal{J}_{m+1}=0$ を $\mathscr{A}$ の cell chain とする。$\iota(e)=e$ であることに注意すれば, $e\mathscr{A}e$ は,

$$e\mathscr{A}e=e\mathcal{J}_1e\supset e\mathcal{J}_2e\supset\cdots\supset e\mathcal{J}_me\supset e\mathcal{J}_{m+1}e=0$$

を cell chain とする cellular 代数になることが, Definition 1.5 より容易に確かめられる。

(iii). $\mathcal{C}_{\mathscr{A}}=\{c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\lambda_{\mathscr{A}}}\,|\,\mathfrak{s},\mathfrak{t}\in\mathcal{T}(\lambda_{\mathscr{A}}),\,\lambda_{\mathscr{A}}\in\Lambda_{\mathscr{A}}\}$, $\mathcal{C}_{\mathscr{B}}=\{c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\lambda_{\mathscr{B}}}\,|\,\mathfrak{s},\mathfrak{t}\in\mathcal{T}(\lambda_{\mathscr{B}}),\,\lambda_{\mathscr{B}}\in\Lambda_{\mathscr{B}}\}$ をそれぞれ $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ の cellular 基底とする。このとき,

$$\Lambda:=\Lambda_{\mathscr{A}}\times\Lambda_{\mathscr{B}}$$

とおき, Λ 上の半順序を,

$$(\lambda_{\mathscr{A}},\lambda_{\mathscr{B}})>(\mu_{\mathscr{A}},\mu_{\mathscr{B}})\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}(\lambda_{\mathscr{A}}>\mu_{\mathscr{A}})\text{ or }(\lambda_{\mathscr{A}}=\mu_{\mathscr{A}}\text{ かつ }\lambda_{\mathscr{A}}>\mu_{\mathscr{B}})$$

によって定める。また, $\lambda=(\lambda_{\mathscr{A}},\lambda_{\mathscr{B}})\in\Lambda$ に対し,

$$\mathcal{T}(\lambda):=\mathcal{T}(\lambda_{\mathscr{A}})\times\mathcal{T}(\lambda_{\mathscr{B}})$$

とおき, $\mathfrak{s}=(\mathfrak{s}_{\mathscr{A}},\mathfrak{s}_{\mathscr{B}})$, $\mathfrak{t}=(\mathfrak{t}_{\mathscr{A}},\mathfrak{t}_{\mathscr{B}})\in\mathcal{T}(\lambda)$ に対し,

$$c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\lambda}:=c_{\mathfrak{s}_{\mathscr{A}}\mathfrak{t}_{\mathscr{A}}}^{\lambda_{\mathscr{A}}}\otimes c_{\mathfrak{s}_{\mathscr{B}}\mathfrak{t}_{\mathscr{B}}}^{\lambda_{\mathscr{B}}}$$

とおけば,

$$\mathcal{C}=\{c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\lambda}\,|\,\mathfrak{s},\mathfrak{t}\in\mathcal{T}(\lambda),\,\lambda\in\Lambda\}$$

は $\mathscr{A}\otimes_R\mathscr{B}$ の cellular 基底となる。

(iv). [X3, §1.4. Examples 4] を参照。 □

1.12. $\mathscr{A}$ を cellular 代数とし, ι をその cellular 構造を定める anti-involution とする。R が体であるとき, Theorem 2.13 (vi) で見るように, $\mathscr{A}$ の原始ベキ等元 e に対し, $\iota(e)$ は e と同値である原始ベキ等元となる (i.e. $\mathscr{A}e \cong \mathscr{A}\iota(e)$)。さらに, R が体, かつ $\operatorname{char} R \neq 2$ のとき, [KX2, Proposition 8.2] によって, $\mathscr{A}$ の原始ベキ等元の各同値類の中に, ι によって不変であるものが必ず含まれることが示されている。そこで, $\{e_i \,|\, i \in I\}$ を $\mathscr{A}$ の原始ベキ等元全体の集合上の同値関係に関する完全代表系で, それぞれ ι で不変なものとし, $e = \sum_{i \in I} e_i$ とおくと, e は ι で不変なので, Proposition 1.11 (ii) (及び, その証明) より, $\mathscr{A}$ の basic 代数 $e\mathscr{A}e$ は $\mathscr{A}$ の cellular 構造を引き継ぐことが分かる。

より強く, 森田同値における cellular 構造の不変性に関しては, 以下のことが知られている。

Theorem 1.13 ([KX2, Theorem 8.1, Proposition 8.2])**.** *$\mathscr{A}$ を体 $\mathbb{F}$ ($\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$) 上の有限次元代数とすると, 以下のことが成り立つ。*

(i) *$\mathscr{A}$ が ι を anti-involution とする cellular 代数であるとき, $\mathscr{A}$ の原始ベキ等元の各同値類の中に, ι で不変なものが必ず存在する。特に, $\mathscr{A}$ の basic 代数は $\mathscr{A}$ の cellular 構造を引き継ぐ。*

(ii) *$\mathscr{A}$ が cellular 代数であることと, $\mathscr{A}$ の basic 代数が cellular 代数であることとは同値である。*

Remark 1.14. 体 $\mathbb{F}$ の標数が 2 であるとき, $\mathbb{F}$ 上の cellular 代数の cellular 構造が森田同値のもとで保たれない例が [KX2] で与えられている。それは以下のようなものである。

$$\mathscr{A} = \operatorname{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{F}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c, d \in \mathbb{F} \right\}$$

とする。まず, $\mathscr{A}$ に含まれるベキ等元を考えよう。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = a, \\ b(a+d) = b, \\ c(a+d) = c, \\ bc + d^2 = d \end{cases}$$

である。

$a + d \neq 1$ であるとき, 2 番目, 3 番目 の条件より, $b = c = 0$ となり, 1 番目, 4 番目の条件より, $a = 0$ or 1, $d = 0$ or 1 となる。よって, $a + d \neq 1$ であるような $\mathscr{A}$ のベキ等元は,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のいずれかである。

$a+d=1$ であるとすると, 1 番目 (及び 4 番目) の条件より, $bc=ad=a(1-a)$ となる。よって, $a+d \neq 1$ である $\mathscr{A}$ のベキ等元は,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix} \text{ s.t. } \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix} = 0 \tag{1.14.1}$$

となる。(1.14.1) の形のベキ等元は原始ベキ等元である。また,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であることに注意しよう。よって,

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix} \in \mathscr{A} \;\middle|\; \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix} = 0 \right\} \tag{1.14.2}$$

が $\mathscr{A}$ の原始ベキ等元の集合である。

$\mathscr{A}$ 上の線形変換

$$\iota : \mathscr{A} \to \mathscr{A}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$$

を考えると, ι は, $\iota^2 = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$ である $\mathscr{A}$ の反自己同型を与える。また,

$$\Delta = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{F} \right\} \subset \mathscr{A}$$

とおくと, Δ は $\mathscr{A}$ の左イデアルであり,

$$\iota(\Delta) = \left\{ \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{F} \right\}$$

は $\mathscr{A}$ の右イデアルとなる。このとき,

$$\alpha : \Delta \otimes_{\mathbb{F}} \iota(\Delta) \to \mathscr{A}, \quad \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c & d \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix}$$

を考えると, α は $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群の同型写像となり, さらに, 図式 (1.6.1) ($\mathcal{J} = \mathscr{A}$ とおく) は可換になる。よって, $\mathscr{A}$ は (ι を anti-involution とする) cellular 代数となる。このとき, Δ の基底として $\left\{ \mathfrak{s} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathfrak{t} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ が取れるので, $\Lambda = \{\lambda\}$, $\mathcal{T}(\lambda) = \{\mathfrak{s}, \mathfrak{t}\}$ とおき,

$$c^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{s}} := \alpha(\mathfrak{s} \otimes \iota(\mathfrak{s})) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad c^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} := \alpha(\mathfrak{s} \otimes \iota(\mathfrak{t})) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c^\lambda_{\mathfrak{ts}} := \alpha(\mathfrak{t} \otimes \iota(\mathfrak{s})) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad c^\lambda_{\mathfrak{tt}} := \alpha(\mathfrak{t} \otimes \iota(\mathfrak{t})) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば, $\mathcal{C} = \{c^\lambda_{\mathfrak{ss}}, c^\lambda_{\mathfrak{st}}, c^\lambda_{\mathfrak{ts}}, c^\lambda_{\mathfrak{tt}}\}$ は $\mathscr{A}$ の cellular 基底となる。このとき, 左 $\mathscr{A}$-加群として,

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathfrak{s}} &= \mathbb{F}c^\lambda_{\mathfrak{ss}} \oplus \mathbb{F}c^\lambda_{\mathfrak{ts}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F} \right\} \\ &\cong \Delta_{\mathfrak{t}} = \mathbb{F}c^\lambda_{\mathfrak{st}} \oplus \mathbb{F}c^\lambda_{\mathfrak{tt}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F} \right\} \\ &\cong \Delta = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F} \right\} \end{aligned}$$

であることに注意しよう (右 cell 加群についても同様)。

さて, $\mathscr{A}$ の原始ベキ等元は, (1.14.2) で与えられていた。よって $\mathscr{A}$ の原始ベキ等元で, ι 不変であるものは,

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix} \in \mathscr{A} \mid \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix} = 0, \quad a = 1-a \right\}$$

となる。もし $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$ であるならば, $a = 1-a \Leftrightarrow a = 2^{-1}$ となるが, $\operatorname{char}\mathbb{F} = 2$ であるときは $a = 1-a$ となる $a \in \mathbb{F}$ は存在しない。よって, $\operatorname{char}\mathbb{F} = 2$ であるときは, ι で不変となる原始ベキ等元が存在しないので, 上で定めた $\mathscr{A}$ の cellular 構造は, $\mathscr{A}$ の basic 代数には引き継がれないことが分かる。

§ 2. Cellular 代数の表現論

この節では，$\mathscr{A}$ は **体 $\mathbb{F}$ 上** の $\mathcal{C}=\{c^\lambda_{\mathfrak{st}}\,|\,\mathfrak{s},\mathfrak{t}\in\mathcal{T}(\lambda),\,\lambda\in\Lambda\}$ を cellular 基底とする cellular 代数とし，ι をその cellular 構造を定める anti-involution とする。

2.1. $\mathfrak{s},\mathfrak{t}\in\mathcal{T}(\lambda)$ に対し，(1.1.1), (1.2.1) より，

$$c^\lambda_{\mathfrak{us}}c^\lambda_{\mathfrak{tv}}\equiv r_{\mathfrak{st}}c^\lambda_{\mathfrak{uv}}\quad\mathrm{mod}\ \mathscr{A}(>\lambda)\tag{2.1.1}$$

となる $r_{\mathfrak{st}}\in\mathbb{F}$ が $\mathfrak{u},\mathfrak{v}\in\mathcal{T}(\lambda)$ の取り方に寄らずに定まる。そこで, cell 加群 $\Delta(\lambda)$ 上の双線形形式 $\langle\,,\,\rangle:\Delta(\lambda)\times\Delta(\lambda)\to\mathbb{F}$ を

$$c^\lambda_{\mathfrak{us}}c^\lambda_{\mathfrak{tv}}\equiv\langle c^\lambda_{\mathfrak{s}},c^\lambda_{\mathfrak{t}}\rangle c^\lambda_{\mathfrak{uv}}\quad\mathrm{mod}\ \mathscr{A}(>\lambda)\quad(\mathfrak{s},\mathfrak{t}\in\mathcal{T}(\lambda))\tag{2.1.2}$$

によって定める (つまり，(2.1.1) の $r_{\mathfrak{st}}$ を用いて $\langle c^\lambda_{\mathfrak{s}},c^\lambda_{\mathfrak{t}}\rangle=r_{\mathfrak{st}}$ とする)。

Lemma 2.2. *$\langle\,,\,\rangle:\Delta(\lambda)\times\Delta(\lambda)\to F$ を (2.1.2) によって定まる cell 加群 $\Delta(\lambda)$ ($\lambda\in\Lambda$) 上の双線形形式とするとき, 以下のことが成り立つ。*

(i) $x,y\in\Delta(\lambda)$ に対し, $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$.
(ii) $a\in\mathscr{A}$, $x,y\in\Delta(\lambda)$ に対し, $\langle a\cdot x,y\rangle=\langle x,\iota(a)\cdot y\rangle$.
(iii) $\mathfrak{s},\mathfrak{t}\in\mathcal{T}(\lambda)$, $x\in\Delta(\lambda)$ に対し，$c^\lambda_{\mathfrak{st}}\cdot x=\langle c^\lambda_{\mathfrak{t}},x\rangle c^\lambda_{\mathfrak{s}}$.

Proof. $\langle\,,\,\rangle$ は双線型なので, $x=c^\lambda_{\mathfrak{s}}$, $y=c^\lambda_{\mathfrak{t}}$ ($\mathfrak{s},\mathfrak{t}\in\mathcal{T}(\lambda)$) の場合を示せばよい。

(i). (2.1.2) より,

$$\langle c^\lambda_{\mathfrak{s}},c^\lambda_{\mathfrak{t}}\rangle c^\lambda_{\mathfrak{uv}}\equiv c^\lambda_{\mathfrak{us}}c^\lambda_{\mathfrak{tv}}=\iota(c^\lambda_{\mathfrak{vt}}c^\lambda_{\mathfrak{su}})\equiv\iota(\langle c^\lambda_{\mathfrak{t}},c^\lambda_{\mathfrak{s}}\rangle c^\lambda_{\mathfrak{vu}})=\langle c^\lambda_{\mathfrak{t}},c^\lambda_{\mathfrak{s}}\rangle c^\lambda_{\mathfrak{uv}}\qquad\mathrm{mod}\ \mathscr{A}(>\lambda)$$

なので, $\langle c^\lambda_{\mathfrak{s}},c^\lambda_{\mathfrak{t}}\rangle=\langle c^\lambda_{\mathfrak{t}},c^\lambda_{\mathfrak{s}}\rangle$ ($\mathfrak{s},\mathfrak{t}\in\mathcal{T}(\lambda)$) を得る。

(ii). $a\in\mathscr{A}$, $\mathfrak{s},\mathfrak{t},\mathfrak{u},\mathfrak{v}\in\mathcal{T}(\lambda)$ に対し,

$$\begin{aligned}\langle a\cdot c^\lambda_{\mathfrak{s}},\,c^\lambda_{\mathfrak{t}}\rangle c^\lambda_{\mathfrak{uv}}&=\sum_{\mathfrak{s}'\in\mathcal{T}(\lambda)}r^{(a,\mathfrak{s})}_{\mathfrak{s}'}\langle c^\lambda_{\mathfrak{s}'},\,c^\lambda_{\mathfrak{t}}\rangle c^\lambda_{\mathfrak{uv}}\quad((1.3.1)\text{ より})\\&\equiv\sum_{\mathfrak{s}'\in\mathcal{T}(\lambda)}r^{(a,\mathfrak{s})}_{\mathfrak{s}'}c^\lambda_{\mathfrak{us}'}c^\lambda_{\mathfrak{tv}}\quad\mathrm{mod}\ \mathscr{A}(>\lambda)\quad((2.1.2)\text{ より})\\&\equiv(c^\lambda_{\mathfrak{us}}\cdot\iota(a))c^\lambda_{\mathfrak{tv}}\quad\mathrm{mod}\ \mathscr{A}(>\lambda)\quad((1.2.1)\text{ より})\\&=c^\lambda_{\mathfrak{us}}(\iota(a)\cdot c^\lambda_{\mathfrak{tv}})\\&\equiv\sum_{\mathfrak{t}'\in\mathcal{T}(\lambda)}r^{(\iota(a),\mathfrak{t})}_{\mathfrak{t}'}c^\lambda_{\mathfrak{us}}c^\lambda_{\mathfrak{t}'\mathfrak{v}}\quad\mathrm{mod}\ \mathscr{A}(>\lambda)\quad((1.1.1)\text{ より})\\&\equiv\sum_{\mathfrak{t}'\in\mathcal{T}(\lambda)}r^{(\iota(a),\mathfrak{t})}_{\mathfrak{t}'}\langle c^\lambda_{\mathfrak{s}},c^\lambda_{\mathfrak{t}'}\rangle c^\lambda_{\mathfrak{uv}}\quad((2.1.2)\text{ より})\\&=\langle c^\lambda_{\mathfrak{s}},\,\iota(a)\cdot c^\lambda_{\mathfrak{t}}\rangle c^\lambda_{\mathfrak{uv}}\quad((1.3.1)\text{ より})\end{aligned}$$

なので, $\langle a\cdot c^\lambda_{\mathfrak{s}},\, c^\lambda_{\mathfrak{t}}\rangle = \langle c^\lambda_{\mathfrak{s}},\, \iota(a)\cdot c^\lambda_{\mathfrak{t}}\rangle$ を得る。

(iii). $\mathfrak{s},\mathfrak{t},\mathfrak{u},\mathfrak{v}\in\mathcal{T}(\lambda)$ に対し, 単射準同型 (1.3.3) を用いて, $\Delta(\lambda)$ を $\mathscr{A}(\geq\lambda)/\mathscr{A}(>\lambda)$ の部分加群と思うと,

$$\begin{aligned} c^\lambda_{\mathfrak{st}}\cdot c^\lambda_{\mathfrak{u}} &\equiv c^\lambda_{\mathfrak{st}}c^\lambda_{\mathfrak{uv}} \mod \mathscr{A}(>\lambda) \quad ((1.3.3)\text{ より}) \\ &\equiv \langle c^\lambda_{\mathfrak{t}},\, c^\lambda_{\mathfrak{u}}\rangle c^\lambda_{\mathfrak{sv}} \mod \mathscr{A}(>\lambda) \quad ((2.1.2)\text{ より}) \\ &\equiv \langle c^\lambda_{\mathfrak{t}},\, c^\lambda_{\mathfrak{u}}\rangle c^\lambda_{\mathfrak{s}} \quad ((1.3.3)\text{ より}) \end{aligned}$$

となるので，$c^\lambda_{\mathfrak{st}}\cdot c^\lambda_{\mathfrak{u}} = \langle c^\lambda_{\mathfrak{t}},\, c^\lambda_{\mathfrak{u}}\rangle c^\lambda_{\mathfrak{s}}$ を得る。 □

2.3. $\langle\,,\,\rangle : \Delta(\lambda)\times\Delta(\lambda)\to\mathbb{F}$ を (2.1.2) によって定まる cell 加群 $\Delta(\lambda)$ ($\lambda\in\Lambda$) 上の双線形形式とする。この双線形形式に関する根基を $\mathrm{rad}_{\langle,\rangle}\,\Delta(\lambda)$ で表す。つまり，

$$\mathrm{rad}_{\langle,\rangle}\,\Delta(\lambda) := \{x\in\Delta(\lambda)\mid \langle x,y\rangle = 0 \text{ for all } y\in\Delta(\lambda)\}$$

とおく。Lemma 2.2 (ii) より，$\mathrm{rad}_{\langle,\rangle}\,\Delta(\lambda)$ は $\Delta(\lambda)$ の $\mathscr{A}$-部分加群となる。そこで，

$$\begin{aligned} &L(\lambda) := \Delta(\lambda)/\,\mathrm{rad}_{\langle,\rangle}\,\Delta(\lambda) \quad (\lambda\in\Lambda), \\ &\Lambda_0 := \{\lambda\in\Lambda\mid L(\lambda)\neq 0\} \end{aligned}$$

とおく。

Proposition 2.4.

(i) $\lambda\in\Lambda_0$ に対し，$\mathrm{rad}_{\langle,\rangle}\,\Delta(\lambda)$ は $\Delta(\lambda)$ の一意的な極大部分加群である。よって，$\mathrm{rad}_{\langle,\rangle}\,\Delta(\lambda) = \mathrm{rad}\,\Delta(\lambda)$ である *(*$\mathrm{rad}\,\Delta(\lambda)$ は $\Delta(\lambda)$ の *Jacobson* 根基*)*。さらに，$L(\lambda)$ は絶対既約 $\mathscr{A}$-加群である。

(ii) $\lambda,\mu\in\Lambda_0$ に対し，$L(\lambda)\cong L(\mu)\Leftrightarrow\lambda=\mu$ である。

(iii) $\{L(\lambda)\mid\lambda\in\Lambda_0\}$ は既約 $\mathscr{A}$-加群の同型類の完全代表系を与える。

(iv) $\lambda\in\Lambda,\ \mu\in\Lambda_0$ に対し，

$$[\Delta(\lambda):L(\mu)]\neq 0\Rightarrow\lambda\geq\mu$$

である。さらに，$\lambda\in\Lambda_0$ であるとき，$[\Delta(\lambda):L(\lambda)]=1$ である。

Proof. (i). $\lambda\in\Lambda_0$ に対し,

$$x\in\Delta(\lambda)\setminus\mathrm{rad}_{\langle,\rangle}\,\Delta(\lambda)$$

を取ると, 定義より, ある $y \in \Delta(\lambda)$ が存在して, $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \neq 0$ となるものが存在する。$\{c_{\mathfrak{s}}^{\lambda} \mid \mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda)\}$ が $\Delta(\lambda)$ の基底だったので,

$$y = \sum_{\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{s}} c_{\mathfrak{s}}^{\lambda} \quad (r_{\mathfrak{s}} \in \mathbb{F}) \tag{2.4.1}$$

と表せる。各 $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ に対し, $y_{\mathfrak{t}} \in \mathscr{A}$ を,

$$y_{\mathfrak{t}} = \sum_{\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{s}} c_{\mathfrak{ts}}^{\lambda} \quad (r_{\mathfrak{s}} \text{ は (2.4.1) のもの}) \tag{2.4.2}$$

と定める。このとき,

$$\begin{aligned} y_{\mathfrak{t}} \cdot x &= \sum_{\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{s}} c_{\mathfrak{ts}}^{\lambda} \cdot x \\ &= \sum_{\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{s}} \langle c_{\mathfrak{s}}^{\lambda}, x\rangle c_{\mathfrak{t}}^{\lambda} \quad (\text{Lemma 2.2 (iii) より}) \\ &= \langle y, x\rangle c_{\mathfrak{t}}^{\lambda} \end{aligned}$$

となる。これが各 $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ に対し成り立ち，$\langle y, x\rangle \neq 0$ であり, 体 $\mathbb{F}$ 上で考えていることより, $\Delta(\lambda)$ は $\mathscr{A}$-加群として, x によって生成される。このことが，任意の $x \in \Delta(\lambda) \setminus \mathrm{rad}_{\langle,\rangle} \Delta(\lambda)$ に対して成り立つので, $\mathrm{rad}_{\langle,\rangle} \Delta(\lambda)$ は $\Delta(\lambda)$ の一意的な極大部分加群である。

また, 上の議論は勝手な $\mathbb{F}$ の拡大体 $\mathbb{F}'$ に係数拡大してもそのまま成り立つので，$L(\lambda)$ は $\mathbb{F}'$ 上でも既約である。よって, $L(\lambda)$ は絶対既約である。

(ii). まず, (2.4.2) の $y_{\mathfrak{t}}$ は $\mathscr{A}(\geq \lambda)$ に含まれることに注意すれば, (i) の議論より, $\lambda \in \Lambda_0$ ならば,

$$\mathscr{A}(\geq \lambda) \cdot L(\lambda) \neq 0 \tag{2.4.3}$$

であることが分かる。一方で, $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し, (1.1.1), (1.2.1) より,

$$c_{\mathfrak{uv}}^{\mu} c_{\mathfrak{st}}^{\lambda} \in \mathscr{A}(\geq \lambda) \cap \mathscr{A}(\geq \mu) \quad (\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda), \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \mathcal{T}(\mu))$$

を得る。このことより,

(2.4.4)
$$\begin{aligned} \mathscr{A}(\geq \mu) \cdot \big(\mathscr{A}(\geq \lambda)/\mathscr{A}(> \lambda)\big) \neq 0 &\Rightarrow \mathscr{A}(\geq \lambda) \cap \mathscr{A}(\geq \mu) \cap \big(\mathscr{A}(\geq \lambda) \setminus \mathscr{A}(> \lambda)\big) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \lambda \geq \mu \end{aligned}$$

を得る。よって, $\lambda, \mu \in \Lambda_0$ に対し,

$$
\begin{aligned}
L(\lambda) \cong L(\mu) &\Rightarrow \mathscr{A}(\geq \mu) \cdot L(\lambda) \neq 0 \quad ((2.4.3)\ \text{より}) \\
&\Rightarrow \mathscr{A}(\geq \mu) \cdot \Delta(\lambda) \neq 0 \\
&\Rightarrow \mathscr{A}(\geq \mu) \cdot \big(\mathscr{A}(\geq \lambda)/\mathscr{A}(> \lambda)\big) \neq 0 \quad ((1.3.3)\ \text{より}) \\
&\Rightarrow \lambda \geq \mu \quad ((2.4.4)\ \text{より})
\end{aligned}
$$

を得るが, λ と μ を入れ替えて考えれば，全く同様にして, $\mu \geq \lambda$ を得る。よって，$\lambda, \mu \in \Lambda_0$ に対し, $L(\lambda) \cong L(\mu) \Leftrightarrow \lambda = \mu$ を得る。

(iii). L を既約 $\mathscr{A}$-加群とし, $L \ni x \neq 0$ を取ると, $\mathscr{A}$-加群の全射準同型

$$\varphi : \mathscr{A} \to L, \quad a \mapsto a \cdot x$$

が存在する。このとき，全ての $\mu \in \Lambda$ に対し, $\mathscr{A}(\geq \mu) \cdot L = 0$ とすると, $\mathscr{A} \cdot L = 0$ となってしまうので，ある $\mu \in \Lambda$ が存在して $\mathscr{A}(\geq \mu) \cdot L \neq 0$ となる。このとき，$\mathscr{A}(> \mu) \cdot L \neq 0$ ならば，ある $\mu' > \mu$ に対し, $\mathscr{A}(\geq \mu') \cdot L \neq 0$ となる。この議論を繰り返せば, ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して,

$$\mathscr{A}(\geq \lambda) \cdot L \neq 0 \text{ かつ } \mathscr{A}(> \lambda) \cdot L = 0 \tag{2.4.5}$$

となるものが存在することが分かる (λ が極大のときは $\mathscr{A}(> \lambda) = 0$ である)。このとき, $\mathscr{A}(> 0) \cdot L = 0$ より, φ は, $\mathscr{A}$-加群の準同型

$$\overline{\varphi} : \mathscr{A}/\mathscr{A}(> \lambda) \to L, \quad \overline{a} \mapsto \overline{a} \cdot x := a \cdot x \quad (\overline{a} = a + \mathscr{A}(> \lambda) \in \mathscr{A}/\mathscr{A}(> \lambda))$$

を誘導する。$\overline{\varphi}$ を $\mathscr{A}(\geq \lambda)/\mathscr{A}(> \lambda)$ に制限すると, $\mathscr{A}$-加群の準同型

$$\overline{\varphi}_{\geq \lambda} : \mathscr{A}(\geq \lambda)/\mathscr{A}(> \lambda) \to L$$

を得る。ここで, $\mathscr{A}(\geq \lambda)$ は $\mathscr{A}$ の両側イデアルであることと, $\mathscr{A} \cdot x = L$ に注意すれば,

$$\overline{\varphi}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow a \cdot x = 0 \ ({}^{\forall} a \in \mathscr{A}(\geq \lambda)) \Rightarrow \mathscr{A}(\geq \lambda) \cdot L = 0$$

となるが, いま, $\mathscr{A}(\geq \lambda) \cdot L \neq 0$ であるので, $\overline{\varphi}_{\geq 0}$ は 0-写像ではない。よって, L が既約加群であることより，$\overline{\varphi}_{\geq \lambda}$ は $\mathscr{A}$-加群の全射準同型である。ここで, $\lambda \notin \Lambda_0$ であるとすると, (2.1.1), (2.1.2) より, $\mathscr{A}(\geq \lambda) \cdot \big(\mathscr{A}(\geq \lambda)/\mathscr{A}(> \lambda)\big) = 0$ となるが, このとき, L が $\mathscr{A}(\geq \lambda)/\mathscr{A}(> \lambda)$ の商加群であることから, $\mathscr{A}(\geq \lambda) \cdot L = 0$ となり (2.4.5) に矛盾する。よって, $\lambda \in \Lambda_0$ である。(1.3.7) より, 左 $\mathscr{A}$-加群として,

$$\mathscr{A}(\geq \lambda)/\mathscr{A}(> \lambda) \cong \Delta(\lambda)^{\oplus \dim_{\mathbb{F}} \Delta^{\sharp}(\lambda)}$$

であり，(i) より, $\operatorname{Top}\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda)/\operatorname{rad}\Delta(\lambda) \cong L(\lambda)$ であることから, 全射準同型 $\overline{\varphi}_{\geq\lambda}$ より, $L \cong L(\lambda)$ を得る。よって, 任意の既約 $\mathscr{A}$-加群はある $L(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda_0)$ と同型であることが分かったので (iii) を得る。

(iv). $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し, (1.3.3) と (2.4.4) より,

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\geq \mu) \cdot \Delta(\lambda) \neq 0 &\Rightarrow \mathscr{A}(\geq \mu) \cdot \big(\mathscr{A}(\geq \lambda)/\mathscr{A}(> \lambda)\big) \neq 0\\ &\Rightarrow \lambda \geq \mu\end{aligned}$$

を得る。一方で, (2.1.2) より, $\mathscr{A}(\geq \lambda) \cdot (\operatorname{rad}_{\langle\,,\,\rangle}\Delta(\lambda)) = 0$ なので,

$$\mathscr{A}(\geq \mu) \cdot (\operatorname{rad}_{\langle\,,\,\rangle}\Delta(\lambda)) \neq 0 \Rightarrow \lambda > \mu \tag{2.4.6}$$

を得る。

L を $\operatorname{rad}_{\langle\,,\,\rangle}\Delta(\lambda)$ の組成因子であるとすると, (iii) の議論より,

$$\mathscr{A}(\geq \mu) \cdot L \neq 0 \text{ かつ } \mathscr{A}(> \mu) \cdot L = 0$$

となる $\mu \in \Lambda_0$ が存在し, $L \cong L(\mu)$ となるが, (2.4.6) より,

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\geq \mu) \cdot L \neq 0 &\Rightarrow \mathscr{A}(\geq \mu) \cdot (\operatorname{rad}_{\langle\,,\,\rangle}\Delta(\lambda)) \neq 0\\ &\Rightarrow \lambda > \mu\end{aligned}$$

を得る。よって, $\lambda \in \Lambda$, $\mu \in \Lambda_0$ に対し,

$$[\operatorname{rad}_{\langle\,,\,\rangle}\Delta(\lambda) : L(\mu)] \neq 0 \Rightarrow \lambda > \mu$$

となる。また, 定義より,

$$\Delta(\lambda)/\operatorname{rad}_{\langle\,,\,\rangle}\Delta(\lambda) \cong \begin{cases} L(\lambda) & \text{if } \lambda \in \Lambda_0,\\ 0 & \text{if } \lambda \notin \Lambda_0\end{cases}$$

であるので, (iv) を得る。 □

Remark 2.5. $\lambda \in \Lambda_0$ に対し，$L(\lambda)$ は絶対既約 $\mathscr{A}$-加群であるので，特に

$$\operatorname{End}_{\mathscr{A}}(L(\lambda)) \cong \mathbb{F} \tag{2.5.1}$$

となる。

2.6. 左 $\mathscr{A}$-加群 M に対し，$\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(M, \mathbb{F})$ 上に $\mathscr{A}$ の左作用を

$$(a \cdot \varphi)(x) := \varphi(\iota(a) \cdot x) \quad (a \in \mathscr{A}, \varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(M, \mathbb{F}),\, x \in M)$$

と定めると，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(M,\mathbb{F})$ は左 $\mathscr{A}$-加群となる。これを $M^{\circledast}$ と表す。このとき, 完全反変関手

$$\circledast : \mathscr{A}\text{-mod} \to \mathscr{A}\text{-mod}, \quad M \mapsto M^{\circledast}$$

を得る。ι が $\mathscr{A}$ 上の anti-involution であることに注意すれば, 関手の同型

$$\circledast \circ \circledast \cong \mathrm{Id}_{\mathscr{A}\text{-mod}}$$

を得る。よって，$M, N \in \mathscr{A}$-mod に対し, $\mathbb{F}$-線形空間の同型

(2.6.1) $$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(M,N) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(N^{\circledast}, M^{\circledast}) \quad (i \geq 0)$$

が成り立つ (cf. [X1, Theorem 2.5])。

cell 加群 $\Delta(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ に対し，

$$\nabla(\lambda) := \Delta(\lambda)^{\circledast}$$

とおく。

Proposition 2.7.

(i) $\lambda \in \Lambda$ に対し，左 $\mathscr{A}$-加群の同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\Delta^{\sharp}(\lambda), \mathbb{F}) \cong \nabla(\lambda)$$

が成り立つ。ここで，右 *cell* 加群 $\Delta^{\sharp}(\lambda)$ に対し，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\Delta^{\sharp}(\lambda),\mathbb{F})$ を自然な方法で左 $\mathscr{A}$-加群と思う。
(i.e. $(a\cdot\psi)(x) := \psi(x \cdot a)$ *for* $a \in \mathscr{A}$*,* $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\Delta^{\sharp}(\lambda),\mathbb{F})$*,* $x \in \Delta^{\sharp}(\lambda)$*.)*

(ii) $\lambda \in \Lambda_0$ に対し，左 $\mathscr{A}$-加群の同型

$$L(\lambda)^{\circledast} \cong L(\lambda)$$

が成り立つ。

(iii) $\lambda \in \Lambda$*,* $\mu \in \Lambda_0$ に対し，

$$[\nabla(\lambda) : L(\mu)] = [\Delta(\lambda) : L(\mu)].$$

(iv) $\lambda, \mu \in \Lambda_0$ に対し，$\mathbb{F}$-線形空間の同型

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(L(\lambda), L(\mu)) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(L(\mu), L(\lambda)) \quad (i \geq 0).$$

が成り立つ。

Proof. (i). $\mathbb{F}$-線形写像 $f : \Delta(\lambda) \to \Delta^{\sharp}(\lambda)$ s.t. $f(c_{\mathfrak{s}}^{\lambda}) = c_{\mathfrak{s}}^{\sharp\lambda}$ $(\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda))$ を考えると, 明らかに f は同型である。写像

$$g : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\Delta^{\sharp}(\lambda), \mathbb{F}) \to \nabla(\lambda) \text{ s.t. } g(\varphi)(x) := \varphi \circ f(x) \quad (\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\Delta^{\sharp}(\lambda), \mathbb{F}), x \in \Delta(\lambda))$$

を考えると, 明らかに g は $\mathbb{F}$-線形同型写像である (逆写像は $g^{-1}(\psi)(x^{\sharp}) := \psi \circ f^{-1}(x^{\sharp})$ $(\psi \in \nabla(\lambda), x^{\sharp} \in \Delta^{\sharp}(\lambda))$ によって与えられる)。よって, g が左 $\mathscr{A}$-加群の準同型であることを示せばよい。$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\Delta^{\sharp}(\lambda), \mathbb{F})$, $a \in \mathscr{A}$, $\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda)$ に対し,

$$\begin{aligned}
g(a \cdot \varphi)(c_{\mathfrak{s}}^{\lambda}) &= (a \cdot \varphi) \circ f(c_{\mathfrak{s}}^{\lambda}) \\
&= (a \cdot \varphi)(c_{\mathfrak{s}}^{\sharp\lambda}) \\
&= \varphi(c_{\mathfrak{s}}^{\sharp\lambda} \cdot a) \\
&= \varphi\big(\sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{u}}^{(\iota(a),\mathfrak{s})} c_{\mathfrak{u}}^{\sharp\lambda}\big) \quad ((1.3.4) \text{ より}) \\
&= \varphi\Big(f\big(\sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{u}}^{(\iota(a),\mathfrak{s})} c_{\mathfrak{u}}^{\lambda}\big)\Big) \\
&= (\varphi \circ f)(\iota(a) \cdot c_{\mathfrak{s}}^{\lambda}) \quad ((1.3.1) \text{ より}) \\
&= g(\varphi)(\iota(a) \cdot c_{\mathfrak{s}}^{\lambda}) \\
&= a \cdot (g(\varphi))(c_{\mathfrak{s}}^{\lambda})
\end{aligned}$$

であるので, g は $\mathscr{A}$-加群の準同型である。

(ii). $x \in \Delta(\lambda)$ に対し, $L(\lambda) = \Delta(\lambda)/\mathrm{rad}_{\langle\,,\,\rangle}\Delta(\lambda)$ における x の像を $\overline{x}$ で表す。このとき, (2.1.2) で定義される $\Delta(\lambda)$ 上の双線形形式 $\langle\,,\,\rangle$ を用いて, $L(\lambda)$ 上の双線形形式 $\langle\,,\,\rangle_{L(\lambda)}$ を,

$$\langle\,,\,\rangle_{L(\lambda)} : L(\lambda) \times L(\lambda) \to \mathbb{F}, \quad \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle_{L(\lambda)} := \langle x, y \rangle \quad (\overline{x}, \overline{y} \in L(\lambda))$$

によって定めると，これは well-defined であり，さらに非退化である。そこで，$\mathbb{F}$-線形写像

$$h : L(\lambda) \to L(\lambda)^{\circledast}, \quad \overline{x} \mapsto \langle \overline{x}, - \rangle_{L(\lambda)}$$

を考えると, Lemma 2.2 (ii) より, h は 左 $\mathscr{A}$-加群の準同型であり, $\langle\,,\,\rangle_{L(\lambda)}$ が非退化であることから h は単射であり, $\dim_{\mathbb{F}} L(\lambda) = \dim_{\mathbb{F}} L(\lambda)^{\circledast} < \infty$ なので, h は同型写像である。

(iii). $\circledast$ が完全反変関手であることに注意すれば, $\nabla(\lambda) := \Delta(\lambda)^{\circledast}$, $L(\lambda)^{\circledast} \cong L(\lambda)$ であることより (iii) を得る。

(iv). (2.6.1) と (ii) より従う。 $\square$

Remark 2.8. 体 $\mathbb{F}$ 上の (cellular 代数とは限らない) 有限次元代数 $\mathscr{A}$ が, $\iota^2 = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$ となる反自己同型 $\iota : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ を持っていれば, 2.6 の定義と全く同様にして, 完全反変関手

$$\circledast : \mathscr{A}\text{-mod} \to \mathscr{A}\text{-mod}, \quad M \mapsto M^{\circledast} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(M, \mathbb{F})$$

が定義できる。このとき, 一般には, 既約 $\mathscr{A}$-加群は完全反変関手 $\circledast$ に関して self-dual になるとは限らない (i.e. Proposition 2.7 (ii) が成り立つとは限らない)。

例えば,

$$\mathscr{A} = \mathbb{F}\Big(1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2 \Big) \Big/ \langle \alpha\beta\alpha,\ \beta\alpha\beta \rangle_{\mathrm{ideal}}$$

とし, $\mathscr{A}$ 上の反自己同型

$$\iota : \mathscr{A} \to \mathscr{A}, \quad e_1 \mapsto e_2,\ e_2 \mapsto e_1,\ \alpha \mapsto \alpha,\ \beta \mapsto \beta$$

を考えると, 明らかに $\iota^2 = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$ であるが, このとき, 頂点 $1, 2$ に対応する既約 $\mathscr{A}$-加群をそれぞれ L_1, L_2 とすると,

$$L_1^{\circledast} \cong L_2, \quad L_2^{\circledast} \cong L_1$$

となる。

2.9. $\lambda \in \Lambda_0$ に対し，$P(\lambda)$ を $L(\lambda)$ の射影被覆とする。$P(\lambda)$ が射影加群であることに注意して，$\mathscr{A}$ の両側イデアルの列 (1.4.1) (よって $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群の列) に完全関手 $- \otimes_{\mathscr{A}} P(\lambda)$ を施すと，$P(\lambda)$ の 左 $\mathscr{A}$-部分加群の列

$$P(\lambda) = P_1 \supset P_2 \supset \cdots \supset P_m \supset P_{m+1} = 0 \quad (P_k = \mathscr{A}(\lambda_k) \otimes_{\mathscr{A}} P(\lambda)) \tag{2.9.1}$$

を得る。(1.4.4) より，$(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群として

$$\mathscr{A}(\lambda_k)/\mathscr{A}(\lambda_{k+1}) \cong \Delta(\lambda_k) \otimes_{\mathbb{F}} \Delta^{\sharp}(\lambda_k)$$

であるので，左加群の同型

$$\begin{aligned} P_k/P_{k+1} &\cong \big(\mathscr{A}(\lambda_k)/\mathscr{A}(\lambda_{k+1})\big) \otimes_{\mathscr{A}} P(\lambda) \\ &\cong \Delta(\lambda_k) \otimes_{\mathbb{F}} \Delta^{\sharp}(\lambda_k) \otimes_{\mathscr{A}} P(\lambda) \\ &\cong \Delta(\lambda_k)^{\oplus \dim_{\mathbb{F}} \Delta^{\sharp}(\lambda_k) \otimes_{\mathscr{A}} P(\lambda)} \end{aligned} \tag{2.9.2}$$

を得る。一方で，$\mu \in \Lambda$, $\lambda \in \Lambda_0$ に対し, $\mathbb{F}$-線形空間として,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\Delta^{\sharp}(\mu) \otimes_{\mathscr{A}} P(\lambda), \mathbb{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P(\lambda), \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\Delta^{\sharp}(\mu), \mathbb{F}))$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P(\lambda), \nabla(\mu)) \quad \text{(by Prop. 2.7 (i))}$$

であるので,

(2.9.3)
$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{F}} \Delta^{\sharp}(\mu) \otimes_{\mathscr{A}} P(\lambda) &= \dim_{\mathbb{F}}(\Delta^{\sharp}(\mu) \otimes_{\mathscr{A}} P(\lambda), \mathbb{F}) \\ &= \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P(\lambda), \nabla(\mu)) \\ &= [\nabla(\mu) : L(\lambda)] \quad \text{((2.5.1) に注意)} \\ &= [\Delta(\mu) : L(\lambda)] \quad \text{(by Prop. 2.7 (iii))}\end{aligned}$$

を得る。(2.9.1), (2.9.2), (2.9.3) より以下を得る。

Proposition 2.10. $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ *s.t.* $i < j$ *if* $\lambda_i < \lambda_j$ とすると，$\lambda \in \Lambda_0$ に対し，$P(\lambda)$ の 左 $\mathscr{A}$-部分加群の列

$$P(\lambda) = P_1 \supset P_2 \supset \cdots \supset P_m \supset P_{m+1} = 0 \ \textit{s.t.} \ P_k/P_{k+1} \cong \Delta(\lambda_k)^{\oplus[\Delta(\lambda_k):L(\lambda)]}$$

が存在する。特に，$K_0(\mathscr{A}\text{-mod})$ において,

(2.10.1)
$$[P(\lambda)] = \sum_{\mu \in \Lambda} [\Delta(\mu) : L(\lambda)][\Delta(\mu)]$$

が成り立つ。

2.11. (分解定数, 分解行列, Cartan 行列.) $\lambda \in \Lambda$, $\mu \in \Lambda_0$ に対し，

$$[\Delta(\lambda) : L(\mu)]$$

を $\mathscr{A}$ の**分解定数**という。また,

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &:= \big([\Delta(\lambda) : L(\mu)]\big)_{\lambda \in \Lambda, \mu \in \Lambda_0}, \\ \mathbf{C} &:= \big([P(\lambda) : L(\mu)]\big)_{\lambda, \mu \in \Lambda_0}\end{aligned}$$

とおき，$\mathbf{D}$ を $\mathscr{A}$ の**分解行列**, $\mathbf{C}$ を $\mathscr{A}$ の **Cartan 行列**という。

2.12. (Linkage classes on cell modules.) $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し，ある Λ の元の列

$$\lambda = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k = \mu$$

で各 i $(1 \leq i \leq k)$ に対し，$\Delta(\lambda_{i-1})$ と $\Delta(\lambda_i)$ が共通の組成因子を持つとき，$\lambda \sim \mu$ であると定めると，“$\sim$” は Λ 上の同値関係を定める。この同値関係に関する同値類 (linkage class) を用いて，$\mathscr{A}$ のブロックが以下の Theorem 2.13 (vii), (viii) のように分類される。

Theorem 2.13 ([GL]). $\varLambda_0 = \{\lambda \in \varLambda \mid L(\lambda) := \Delta(\lambda)/\operatorname{rad}_{\langle,\rangle}\Delta(\lambda) \neq 0\}$ とおく。このとき，以下のことが成り立つ。

(i) $\lambda \in \varLambda_0$ に対し，$\operatorname{rad}_{\langle,\rangle}\Delta(\lambda)$ は $\Delta(\lambda)$ の一意的な極大部分加群 *(*よって $\operatorname{rad}_{\langle,\rangle}\Delta(\lambda) = \operatorname{rad}\Delta(\lambda)$*)* である。さらに， $L(\lambda)$ は絶対既約 $\mathscr{A}$-加群である。

(ii) $\lambda, \mu \in \varLambda_0$ *(*$\lambda \neq \mu$*)* に対し，$L(\lambda) \not\cong L(\mu)$ である。さらに, $\{L(\lambda) \mid \lambda \in \varLambda_0\}$ は既約 $\mathscr{A}$-加群の同型類の完全代表系を与える。

(iii) $\lambda \in \varLambda$, $\mu \in \varLambda_0$ に対し，

$$[\Delta(\lambda) : L(\mu)] \neq 0 \Rightarrow \lambda \geq \mu$$

である。さらに，$\lambda \in \varLambda_0$ であるとき，$[\Delta(\lambda) : L(\lambda)] = 1$ である。

(iv) $\lambda \in \varLambda_0$ に対し，$P(\lambda)$ を $L(\lambda)$ の射影被覆とする。このとき，$\lambda, \mu \in \varLambda_0$ に対し，

$$[P(\lambda) : L(\mu)] = \sum_{\nu \in \varLambda}[\Delta(\nu) : L(\lambda)][\Delta(\nu) : L(\mu)].$$

よって，$\mathbf{C} = \mathbf{D}^T\mathbf{D}$ を得る。ここで，$\mathbf{D}^T$ は $\mathbf{D}$ の転置行列である。

(v) $\mathscr{A}$：半単純 $\Leftrightarrow \Delta(\lambda) = L(\lambda)$ *(*$^\forall\lambda \in \varLambda$*)* $\Leftrightarrow$ $\mathbf{D}$：単位行列.

(vi) e を $\mathscr{A}$ の原始ベキ等元とするとき，e と $\iota(e)$ は同値である。

(vii) $\lambda \in \varLambda$ に対し，$\Delta(\lambda)$ は $\mathscr{A}$ のあるブロックに属する。
(注意：$\lambda \in \varLambda_0$ ならば，(i) より $\Delta(\lambda)$ は一意的な *simple top* を持つので直既約であり，あるブロックに属することは明らかである。*)*

(viii) $\lambda, \mu \in \varLambda$ に対し，

$$\lambda \sim \mu \Leftrightarrow \ \Delta(\lambda) \text{ と } \Delta(\mu) \text{ は同じブロックに属する}.$$

Proof. (i)-(iii) は Proposition 2.4 の主張である。(iv) は Proposition 2.10 より従う。

(v). $\mathscr{A}$ が半単純であるとすると，(i) より，全ての $\lambda \in \varLambda_0$ に対し，$\Delta(\lambda) = L(\lambda)$ となり，$\mathscr{A}$ が半単純であることより，(2.5.1) にも注意すると，

$$\dim_F \mathscr{A} = \sum_{\lambda \in \varLambda_0}(\dim_{\mathbb{F}} L(\lambda))^2 = \sum_{\lambda \in \varLambda_0}(\dim_{\mathbb{F}} \Delta(\lambda))^2$$

を得る。一方で，(1.4.1), (1.4.4), (1.4.5) (あるいは, cell chain の定義) より，

$$\dim_{\mathbb{F}} \mathscr{A} = \sum_{\lambda \in \varLambda}(\dim_{\mathbb{F}} \Delta(\lambda))^2$$

であるので，$\varLambda = \varLambda_0$ でなくてはならない。よって，全ての $\lambda \in \varLambda$ に対し，$\Delta(\lambda) = L(\lambda)$ となる。

逆に，全ての $\lambda \in \varLambda$ に対し，$\Delta(\lambda) = L(\lambda)$ であるとすると，(iv) より，全ての $\lambda \in \varLambda$ に対し，$P(\lambda) = L(\lambda)$ となるので，$\mathscr{A}$ は半単純である。

"$\Delta(\lambda) = L(\lambda)$ $({}^\forall \lambda \in \Lambda) \Leftrightarrow \mathbf{D}$：単位行列" であることは定義より明らか。

(vi). e を $\mathscr{A}$ の原始ベキ等元とし，$P(\lambda) \cong \mathscr{A} e$ であるとする。

任意の $\mu \in \Lambda$ に対し，F-線形空間の同型

$$\Delta^\sharp(\mu) \otimes_{\mathscr{A}} P(\lambda) = \Delta^\sharp(\mu) \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{A} e \cong \Delta^\sharp(\mu) \cdot e \tag{2.13.1}$$

を得る。ここで，(1.3.6) より，$\mathscr{A}(\geq \mu)/\mathscr{A}(> \mu)$ の中で，$\Delta^\sharp(\mu) = \iota(\Delta(\mu))$ であるので，

$$\Delta^\sharp(\mu) \cdot e = \iota(\Delta(\mu))\overline{e} = \iota(\overline{e})\Delta(\mu) = \iota(e) \cdot \Delta(\mu) \subset \mathscr{A}(\geq \mu)/\mathscr{A}(> \mu) \tag{2.13.2}$$

となる (ここで，$\overline{e} = e + \mathscr{A}(> \mu) \in \mathscr{A}/\mathscr{A}(> \mu)$)。よって， (2.13.1), (2.13.2) より, F-線形空間の同型

$$\Delta^\sharp(\mu) \otimes_{\mathscr{A}} P(\lambda) \cong \iota(e) \cdot \Delta(\mu) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}\iota(e), \Delta(\mu)) \tag{2.13.3}$$

を得る。$\iota(e)$ も原始ベキ等元なので，$\mathscr{A}$-加群として $\mathscr{A}\iota(e) \cong P(\nu)$ であるとすると，(2.13.3) より，

$$\dim_{\mathbb{F}} \Delta^\sharp(\mu) \otimes_{\mathscr{A}} P(\lambda) = \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P(\nu), \Delta(\mu)) = [\Delta(\mu) : L(\nu)]$$

を得るが，一方で, (2.9.3) より，$\dim_{\mathbb{F}} \Delta^\sharp(\mu) \otimes_{\mathscr{A}} P(\lambda) = [\Delta(\mu) : L(\lambda)]$ であるので，

$$[\Delta(\mu) : L(\lambda)] = [\Delta(\mu) : L(\nu)]$$

を得る。これが任意の $\mu \in \Lambda$ に対し成り立つので，(iii) より，

$$\begin{aligned}
&[\Delta(\lambda) : L(\lambda)] = [\Delta(\lambda) : L(\nu)] = 1 \Rightarrow \lambda \geq \nu, \\
&[\Delta(\nu) : L(\lambda)] = [\Delta(\nu) : L(\nu)] = 1 \Rightarrow \nu \geq \lambda
\end{aligned}$$

となるので，$\lambda = \nu$ となり，

$$\mathscr{A} e \cong P(\lambda) = P(\nu) \cong \mathscr{A}\iota(e)$$

を得る。

(vii). $L(\mu)$, $L(\nu)$ を $\Delta(\lambda)$ の組成因子とすると，(iv) より，

$$\begin{aligned}
[P(\mu) : L(\nu)] &= \sum_{\lambda' \in \Lambda} [\Delta(\lambda') : L(\mu)][\Delta(\lambda') : L(\nu)] \\
&= [\Delta(\lambda) : L(\mu)][\Delta(\lambda) : L(\nu)] + \sum_{\lambda' \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} [\Delta(\lambda') : L(\mu)][\Delta(\lambda') : L(\nu)] \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

となるので，$L(\mu)$ と $L(\nu)$ は同じブロックに属する。

(viii). “$\Rightarrow$” は定義より明らか。

“$\Leftarrow$” を示す。$\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し，$\Delta(\lambda)$ と $\Delta(\mu)$ が同じブロックに属するとする。$L(\lambda')$, $L(\mu')$ をそれぞれ $\Delta(\lambda)$, $\Delta(\mu)$ の組成因子とすると，$\lambda \sim \lambda'$, $\mu \sim \mu'$ かつ $L(\lambda')$ と $L(\mu')$ は同じブロックに属する。よって，$P(\lambda')$ と $P(\mu')$ は同じブロックに属するので，有限次元代数の一般論より，Λ_0 の列

$$\lambda' = \lambda'_0, \lambda'_1, \ldots, \lambda'_k = \mu'$$

で 各 i $(1 \le i \le k)$ に対し, $P(\lambda'_{i-1})$ と $P(\lambda'_i)$ が共通の組成因子 $L(\nu_i)$ を持つものが存在する。このとき，$[P(\lambda'_{i-1}) : L(\nu_i)] \neq 0$ かつ $[P(\lambda'_i) : L(\nu_i)] \neq 0$ なので, (iv) より,

$$[\Delta(\alpha_i) : L(\lambda'_{i-1})] \neq 0 \text{ かつ } [\Delta(\alpha_i) : L(\nu_i)] \neq 0,$$
$$[\Delta(\beta_i) : L(\lambda'_i)] \neq 0 \text{ かつ } [\Delta(\beta_i) : L(\nu_i)] \neq 0$$

を満たす $\alpha_i, \beta_i \in \Lambda$ が存在する。よって，$\lambda'_{i-1} \sim \alpha_i \sim \nu_i \sim \beta_i \sim \lambda'_i$ を得る。これが各 i $(1 \le i \le k)$ に対し成り立つので,

$$\lambda \sim \lambda' = \lambda'_0 \sim \lambda'_1 \sim \cdots \sim \lambda'_{k-1} \sim \lambda'_k = \mu' \sim \mu$$

を得る。 □

Proposition 2.14. *cellular* 代数 $\mathscr{A}$ の *Cartan* 行列 $\mathbf{C}$ の行列式は正の整数である。さらに,

$$\det \mathbf{C} = 1 \Leftrightarrow \Lambda = \Lambda_0$$

である。

Proof. $\mathscr{A}$ の分解行列 $\mathbf{D}$ を

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{D}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_1 = \big([\Delta(\lambda) : L(\mu)]\big)_{\lambda,\mu\in\Lambda_0}, \quad \mathbf{D}_2 = \big([\Delta(\lambda) : L(\mu)]\big)_{\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda_0,\, \mu\in\Lambda_0}$$

となるように取る。このとき，Theorem 2.13 (iv) より,

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}^T\,\mathbf{D} = \mathbf{D}_1^T\,\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2^T\,\mathbf{D}_2 \tag{2.14.1}$$

となる。

$$\mathbf{x}^T(\mathbf{D}_i^T\mathbf{D}_i)\mathbf{x} = (\mathbf{D}_i\mathbf{x})^T\mathbf{D}_i\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{|\Lambda_0|},\ i \in \{1,2\})$$

に注意すれば, $\mathbf{D}_i^T\mathbf{D}_i$ $(i=1,2)$ は半正値であるが, 特に, Theorem 2.13 (iii) より,

$$[\Delta(\lambda):L(\lambda)]=1 \quad (\lambda\in\Lambda_0)$$

であるので, $\mathbf{D}_1^T\mathbf{D}_1$ は正値であることが分かる。よって, (2.14.1) より, $\mathbf{C}$ は正値である。よって，その行列式 $\det\mathbf{C}$ は正の整数である ($\mathbf{C}$ の成分は全て整数である)。

$\mathbf{D}_1$ は $|\Lambda_0|$ 次正方行列であり, 三角性 (Theorem 2.13 (iii)) より，$\det(\mathbf{D}_1)=1$ であるので,

$$\det(\mathbf{D}_1^T\,\mathbf{D}_1)=1$$

である。よって,

$$\Lambda=\Lambda_0\Rightarrow\mathbf{C}=\mathbf{D}_1^T\,\mathbf{D}_1\Rightarrow\det\mathbf{C}=1$$

を得る。逆に $\det\mathbf{C}=1$ とする。このとき, $\det(\mathbf{D}_1^T\,\mathbf{D}_1)=1$ に注意すれば,

$$\begin{aligned}\det\mathbf{C}&=\det((\mathbf{D}_1^T\mathbf{D}_1)^{-1}\mathbf{C})\\&=\det(I+(\mathbf{D}_1^T\mathbf{D}_1)^{-1}\mathbf{D}_2^T\mathbf{D}_2)\\&=1\end{aligned}\tag{2.14.2}$$

を得る。ここで I は $|\Lambda_0|$ 次の単位行列である。$\mathbf{D}_1^T\mathbf{D}_1$ は正値なので,

$$\mathbf{A}^2=\mathbf{D}_1^T\mathbf{D}_1,\quad\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$$

を満たす正則行列 $\mathbf{A}$ が存在する。($(\mathbf{A}^{-1})^T=\mathbf{A}^{-1}$ である。) このとき,

$$\mathbf{A}((\mathbf{D}_1^T\mathbf{D}_1)^{-1}\mathbf{D}_2^T\mathbf{D}_2)\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}_2^T\mathbf{D}_2\mathbf{A}^{-1}=(\mathbf{D}_2\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{D}_2\mathbf{A}^{-1}$$

となる。ここで, $(\mathbf{D}_2\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{D}_2\mathbf{A}^{-1}$ は半正値 (実) 対称行列なので，その固有値は全て非負の実数である。よって, $(\mathbf{D}_1^T\mathbf{D}_1)^{-1}\mathbf{D}_2^T\mathbf{D}_2$ の固有値は全て非負の実数となるが, (2.14.2) より，それらは全て 0 でなくてはならない。よって, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}_2^T\mathbf{D}_2\mathbf{A}^{-1}$ の固有値は全て 0 である。$(\mathbf{A}^{-1})^T=\mathbf{A}^{-1}$ に注意すれば, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}_2^T\mathbf{D}_2\mathbf{A}^{-1}$ は対称行列であり, その固有値が全て 0 であることより，ある直交行列 $\mathbf{P}$ が存在して

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}_2^T\mathbf{D}_2\mathbf{A}^{-1})\mathbf{P}^{-1}=0$$

となる。よって $\mathbf{D}_2^t\mathbf{D}_2=\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}_2^T\mathbf{D}_2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{A}=0$ となり，$\mathbf{D}_2=0$ を得る。 □

Theorem 2.15 ([KX3]). *Cellular* 代数 $\mathscr{A}$ に対し，以下のことは全て同値である。

(i) $\mathscr{A}$ は *quasi-hereditary* 代数である。
(ii) $\mathscr{A}$ の任意の *cell chain* は *heredity chain* である。
(iii) $\mathscr{A} = \mathscr{J}_1 \supset \mathscr{J}_2 \supset \cdots \supset \mathscr{J}_m \supset \mathscr{J}_{m+1} = 0$ を $\mathscr{A}$ の任意の *cell chain* とするとき，全ての $k = 1, \ldots, m$ に対し，$\mathscr{A}/\mathscr{A}_{k+1}$ の *cell* イデアル $\mathscr{J}_k/\mathscr{J}_{k+1}$ は *nilpotent* ではない。
(iv) $\Lambda = \Lambda_0$.
(v) $\mathscr{A}$ の *Cartan* 行列 $\mathbf{C}$ に対し, $\det \mathbf{C} = 1$ である。
(vi) $\mathscr{A}$ の大域次元は有限である。

Proof. まず，Theorem 1.6 及びその証明より，cellular 基底を与えることと，cell chain を与えることとが対応していることに注意する。

(i) $\Rightarrow$ (vi) は一般の quasi-hereditary 代数に対して知られている事実 (Theorem A.8)。

(ii) $\Rightarrow$ (i) は明らか。

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) は Corollary 1.10 より従う。

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv). Cell chain (1.4.1) を考えると，(2.1.2) より ((1.4.2), (1.4.3) にも注意),

$$\Delta(\lambda_k) = \mathrm{rad}_{\langle\,,\,\rangle}\, \Delta(\lambda_k) \Leftrightarrow \mathscr{J}_k/\mathscr{J}_{k+1} : \text{nilpotent}$$

であることが分かる。このことから，(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) を得る。

(iv) $\Leftrightarrow$ (v) は Proposition 2.14 である。

(vi) $\Rightarrow$ (v). 大域次元が有限である有限次元代数の Cartan 行列の行列式は ± 1 であることが知られている。一方で， Proposition 2.14 より，cellular 代数の Cartan 行列の行列式は正の整数である。よって，大域次元が有限である cellular 代数の Cartan 行列の行列式は 1 である。 □

Corollary 2.16. *cellular* 代数 $\mathscr{A}$ がさらに *quasi-hereditary* であるとき，以下のことが成り立つ。*(Theorem 2.15* より，$\Lambda = \Lambda_0$ に注意。*)*

(i) $\{[\Delta(\lambda)] \in K_0(\mathscr{A}\text{-mod}) \mid \lambda \in \Lambda\}$ は $K_0(\mathscr{A}\text{-mod})$ の $\mathbb{Z}$-自由基底である。
(ii) $\lambda \in \Lambda$ に対し，$P(\lambda)$ は Δ-*filtration*

$$P(\lambda) = P_1 \supset P_2 \supset \cdots \supset P_k \supset P_{k+1} = 0 \ \ s.t.\ P_i/P_{i+1} \cong \Delta(\lambda_i) \quad (\lambda_i \in \Lambda)$$

を持ち，$P(\lambda)$ における $\Delta(\mu)$ *(*$\mu \in \Lambda$*)* の重複度は *well-defined* である *(i.e.* 上の Δ-*filtration* の取り方に依らない*)*。この重複度を $(P(\lambda) : \Delta(\mu))$ と表すと，$\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し，

$$(P(\lambda) : \Delta(\mu)) = [\Delta(\mu) : L(\lambda)] \tag{2.16.1}$$

が成り立つ。

Proof. (i). Theorem 2.15 より，$\Lambda = \Lambda_0$ であることに注意すれば，分解行列の三角性 (Theorem 2.13 (iii)) より分かる。

(ii). Δ-filtration が存在すれば，その重複度が well-defined であることは (i) より従う。$P(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ に対し，Δ-filtration の存在，及び，(2.16.1) が成り立つことは，Proposition 2.10 より分かる。 □

§ 3. Cellular 代数であることが知られている代数のリスト

(注意) 以下のリストのうちで, cellular 代数であるために若干の条件が必要なものもありますが, それらの条件等は文献で確認してください。また, 引用文献は適切なものとは限りません (関係する文献を全て調べたわけではないので‥)。情報をお持ちの方は, 知らせて頂けると助かります。

- 対称群の群環, 及び, 対称群に付随した Iwahori-Hecke 代数 ([DJ1]).
- Schur 代数, 及び, q-Schur 代数 ([DJ2]).
- Coxeter 群に付随した Iwahori-Hecke 代数 ([G1], [G2]).
- Ariki-Koike 代数 ([GL], [DJM]).
- cyclotomic q-Schur 代数 ([DJM]).
- generalized q-Schur 代数 ([Do]).
- Brauer 代数 ([GL], [E]).
- Birman-Murakami-Wenzl 代数 ([E]).
- cyclotomic Birman-Murakami-Wentzl 代数 ([Go], [WY])
- Temperley-Lieb 代数 ([GL]).
- cyclotomic Temperley-Lieb 代数 ([RX])
- Jones 代数 ([GL]).
- Partition 代数 ([X2]).
- Cyclotomic Nazarov-Wenzl 代数 ([AMR]).
- U_q-tilting 加群の自己準同型環 ([AST]).
- A 型の cyclotomic Khovanov-Lauda-Rouquier 代数 ([HM1]).
- Khovanov's diagram 代数 ([BS]).
- quiver Schur 代数 ([HM2], [SW]).
- graded Temperley-Lieb 代数 ([PR]).

§ 4. 有限表現型である対称 CELLULAR 代数の分類

この節では，代数的閉体 $\mathbb{F}$ ($\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2$) 上の有限次元代数に対し，有限表現型である対称代数の中で，さらに cellular 代数であるものを分類する。

この節の内容は，大松美咲さんの修士論文 [大松] で扱われているものです。

4.1. この節を通して $\mathbb{F}$ は代数的閉体で $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2$ であるとする。$\mathbb{F}$ 上の有限表現型である対称代数の分類については，以下の結果が知られている ([S] を参照)。

Theorem 4.2 ([R1], [R2], [HW], [W1], [W2], ...)**.** *$\mathbb{F}$ 上の有限次元代数 $\mathscr{A}$ が有限表現型である対称代数ならば，以下のいずれかと森田同値である。*

(i) *重複度 $m \geq 1$ の例外的頂点 S を持つ Brauer tree T_S^m に付随した Brauer tree 代数 $A(T_S^m)$.*
(ii) *重複度 2 の例外的頂点 S をグラフの端に持つ Brauer tree T_S^2 に付随した変形 Brauer tree 代数 $D(T_S^2)$.*
(iii) *Dynkin 型の tilted 代数 $\mathscr{B}$ の trivial extension $T(\mathscr{B})$.*

Remark 4.3. A 型の tilted 代数の trivial extension は，例外的頂点の重複度が $m = 1$ である Brauer tree に付随した Brauer tree 代数と一致することが知られている。

Theorem 1.13 より，$\mathscr{A}$ が cellular 代数ならば，その basic 代数も cellular 構造を引き継ぐので，Theorem 4.2 の分類に現れる代数の中で, cellular 代数であるものを分類すれば良い。その際に，以下の Lemma に挙げる cellular 代数の性質が基本的な役割を果たす。

Lemma 4.4.

(i) *$\mathscr{A}$ が cellular 代数であるとすると，任意の既約 $\mathscr{A}$-加群 L, L' に対し，*

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(L, L') \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(L', L) \ \textit{as } \mathbb{Z}\textit{-modules} \quad (i \geq 0)$$

が成り立つ。

(ii) *$\mathscr{A}$ が cellular 代数であるとき，$\mathscr{A}$ の分解行列を $\mathbf{D}$ とし, Cartan 行列を $\mathbf{C}$ とすれば,*

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}^T \mathbf{D}, \quad \det \mathbf{C} > 0$$

が成り立つ。

(iii) *$\mathscr{A}$ を basic 代数であるとする。このとき，$\mathscr{A}$ が cellular 代数であるならば，$\mathscr{A}$ の任意のベキ等元 e に対し，$e\mathscr{A}e$ も cellular 代数である。*

Proof. (i) は Proposition 2.7 (iv) より従う。(ii) は Theorem 2.13 (iv) と Proposition 2.14 より従う。

$\mathscr{A}$ を basic cellular 代数とし, cellular 構造を定める anti-involution を ι とすると, $\mathscr{A}$ の任意の原始ベキ等元 e に対し, ($\mathscr{A}$ が basic であることより) Theorem 2.13 (vi) より, $\iota(e) = e$ となる。よって，$\mathscr{A}$ の任意のベキ等元 e に対しても $\iota(e) = e$ となるので, Proposition 1.11 (ii) より，$e\mathscr{A}s$ も cellular 代数となるので (iii) を得る。 $\square$

4.5. (Brauer tree T_S^m と Brauer quiver $Q_{T_S^m}$.) 連結で cycle を持たない (辺の重複がない) グラフのことを **tree** という。tree T であって，さらに以下の情報

- 各頂点に対し，その頂点と繋がっている辺の間に巡回順序が定まっている。(便宜上，時計周りに定める。)
- 例外的頂点 S がただ 1 つ存在し，例外的頂点は重複度 $m \geq 1$ を持っている。

を込めたものを **Brauer tree** といい T_S^m と表す。

Brauer tree T_S^m に対し，それに付随した **Brauer quiver** $Q_{T_S^m}$ を以下によって定める：

- T_s^m の辺を $Q_{T_S^m}$ の頂点とする。
- T_S^m において，ある頂点に繋がっている二つの辺 i, j に対し，巡回順序で $i \to j$ となっているとき，$Q_{T_S^m}$ において，i, j に対応する頂点の間に i から j への矢を書く。

定義より，Brauer quiver $Q_{T_S^m}$ は次のような性質を持つ：

- $Q_{T_s^m}$ の cycle と T_S^m の頂点とは 1 対 1 に対応している。
- $Q_{T_s^m}$ の各頂点はちょうど 2 つの cycle に属している。

そこで，$Q_{T_S^m}$ の各頂点が属する 2 つの cycle を α-cycle と β-cycle に，T_S^m の例外的頂点 S に対応する cycle が α-cycle となるように分け，α-cycle に属する頂点 i を始点とする矢を α_i とし, β-cycle に属する頂点 i を始点とする矢を β_i とラベル付けする。また，各頂点 $i \in (Q_{T_S^m})_0$ に対し，

$$A_i : i \text{ を始点かつ終点とする } i \text{ の属する } \alpha\text{-cycle},$$
$$B_i : i \text{ を始点かつ終点とする } i \text{ の属する } \beta\text{-cycle},$$

と定める。特に，A_i が T_S^m の例外的頂点に対応する cycle であるとき，$A_{i;S}$ と表す。

Example 4.6.

(i) $T_S^m = \circ \overset{1}{\text{——}} (S) \overset{2}{\text{——}} \circ \overset{3}{\text{——}} \circ \overset{4}{\text{——}} \circ$ のとき，それに付随する Brauer quiver $Q_{T_S^m}$ は，

$$Q_{T_S^m} = \beta_1 \circlearrowright 1 \underset{\alpha_2}{\overset{\alpha_1}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\beta_3}{\overset{\beta_2}{\rightleftarrows}} 3 \underset{\alpha_4}{\overset{\alpha_3}{\rightleftarrows}} 4 \circlearrowleft \beta_4$$

となる。また,

$$A_{1;S} = \alpha_1\alpha_2,\ B_1 = \beta_1, \quad A_{2;S} = \alpha_2\alpha_1,\ B_2 = \beta_2\beta_3,$$

$$A_3 = \alpha_3\alpha_4,\, B_3 = \beta_3\beta_2, \quad A_4 = \alpha_4\alpha_3,\, B_4 = \beta_4$$

である

(ii)

$$\begin{tikzcd}
 & & & \circ \\
T_S^m = \circ \arrow[r, dash, "1"] & \circ \arrow[r, dash, "2"] & S \arrow[ur, dash, "3"] \arrow[dr, dash, "4"'] & \\
 & & & \circ
\end{tikzcd}$$

のとき，それに付随する Brauer quiver $Q_{T_S^m}$ は，

$$\begin{tikzcd}
 & & 3 \arrow[dd, "\alpha_3"] \arrow[loop right, "\beta3"] \\
Q_{T_S^m} = 1 \arrow[loop left, "\alpha_1"] \arrow[r, shift left, "\beta_1"] & 2 \arrow[l, shift left, "\beta_2"] \arrow[ur, "\alpha_2"] & \\
 & & 4 \arrow[ul, "\alpha_4"] \arrow[loop right, "\beta_4"]
\end{tikzcd}$$

となる。また，

$$A_1 = \alpha_1,\, B_1 = \beta_1\beta_2, \quad A_{2;S} = \alpha_2\alpha_3\alpha_4,\, B_2 = \beta_2\beta_1,$$
$$A_{3;S} = \alpha_3\alpha_4\alpha_2,\, B_3 = \beta_3, \quad A_{4;S} = \alpha_4\alpha_2\alpha_3,\, B_4 = \beta_4$$

である。

4.7. (Brauer tree 代数 $A(T_S^m)$.) Brauer tree T_S^m に対し，Brauer tree 代数 $A(T_S^m)$ を

$$A(T_S^m) := \mathbb{F}Q_{T_S^m}/I_S^m$$

によって定める。ここで，$\mathbb{F}Q_{T_S^m}$ は体 $\mathbb{F}$ 上の Brauer quiver $Q_{T_S^m}$ の path 代数であり，I_S^m は

$$\begin{aligned}
&\{\beta_{i_l}\alpha_i,\, \alpha_{i_k}\beta_i \,|\, i \in (Q_{T_S^m})_0\}, \\
&\cup \{(A_{i;S})^m - B_i \,|\, i \in (Q_{T_S^m})_0 \text{ s.t. } A_i = A_{i;S}\} \\
&\cup \{A_i - B_i \,|\, i \in (Q_{T_S^m})_0 \text{ s.t. } A_i \neq A_{i;S}\}
\end{aligned}$$

によって生成される $\mathbb{F}Q_{T_S^m}$ の両側イデアルである。ここで，α_{k_i}, β_{l_i} は，

$$A_i = \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_k}, \quad B_i = \beta_{i_1}\beta_{i_2}\ldots\beta_{i_l} \quad (i_1 = i \text{ に注意})$$

によって定まるものである。(i.e. i を始点かつ終点とする α-cycle A_i の最後の矢が α_{i_k} で，β-cycle B_i の最後の矢が β_{i_l} である。)

Example 4.8. Example 4.6 の例をそのまま考える。

(i) $T_S^m = \circ \overset{1}{\text{——}} \textcircled{S} \overset{2}{\text{——}} \circ \overset{3}{\text{——}} \circ \overset{4}{\text{——}} \circ$ のとき，

$$Q_{T_S^m} = \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\beta_1"] \arrow[r, shift left, "\alpha_1"] & 2 \arrow[l, shift left, "\alpha_2"] \arrow[r, shift left, "\beta_2"] & 3 \arrow[l, shift left, "\beta_3"] \arrow[r, shift left, "\alpha_3"] & 4 \arrow[l, shift left, "\alpha_4"] \arrow[loop right, "\beta_4"] \end{tikzcd}$$

であり，I_S^m は

$$\begin{aligned} &\{\beta_1\alpha_1,\, \alpha_2\beta_1,\, \beta_3\alpha_2,\, \alpha_1\beta_2,\, \beta_2\alpha_3,\, \alpha_4\beta_3,\, \beta_4\alpha_4,\, \alpha_3\beta_4\} \\ &\cup \{(\alpha_1\alpha_2)^m - \beta_1,\, (\alpha_2\alpha_1)^m - \beta_2\beta_3\} \\ &\cup \{\alpha_3\alpha_4 - \beta_3\beta_2,\, \alpha_4\alpha_3 - \beta_4\} \end{aligned}$$

によって生成される $\mathbb{F}Q_{T_S^m}$ の両側イデアルである。

(ii)

$$T_S^m = \begin{tikzcd} & & & \circ \\ \circ \arrow[r, dash, "1"] & \circ \arrow[r, dash, "2"] & \textcircled{S} \arrow[ur, dash, "3"] \arrow[dr, dash, "4"'] & \\ & & & \circ \end{tikzcd}$$

のとき，

$$Q_{T_S^m} = \begin{tikzcd} & & 3 \arrow[loop right, "\beta_3"] \arrow[d, "\alpha_3"] \\ 1 \arrow[loop left, "\alpha_1"] \arrow[r, shift left, "\beta_1"] & 2 \arrow[l, shift left, "\beta_2"] \arrow[ur, "\alpha_2"] & \\ & & 4 \arrow[loop right, "\beta_4"] \arrow[ul, "\alpha_4"] \end{tikzcd}$$

であり， I_S^m は

$$\begin{aligned} &\{\beta_2\alpha_1,\, \alpha_1\beta_1,\, \beta_1\alpha_2,\, \alpha_4\beta_2,\, \beta_3\alpha_3,\, \alpha_2\beta_3,\, \beta_4\alpha_4,\, \alpha_3\beta_4\} \\ &\cup \{(\alpha_2\alpha_3\alpha_4)^m - \beta_2\beta_1,\, (\alpha_3\alpha_4\alpha_2)^m - \beta_3,\, (\alpha_4\alpha_2\alpha_3)^m - \beta_4\} \\ &\cup \{\alpha_1 - \beta_1\beta_2\} \end{aligned}$$

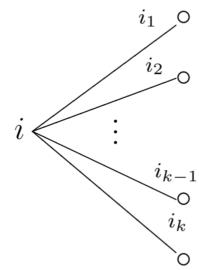
によって生成される $\mathbb{F}Q_{T_S^m}$ の両側イデアルである。

Lemma 4.9. *Brauer tree* T_S^m が直線 *(i.e.* $T = \circ \text{——} \circ \text{——} \dots \text{——} \circ$ *,* 例外的頂点 S 及び重複度 m は任意*)* であるとき，T_S^m に付随する *Brauer tree* 代数 $A(T_S^m)$ は *cellular* 代数である。

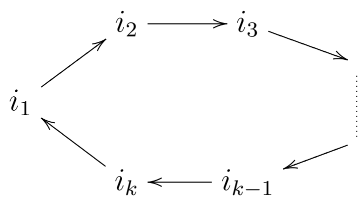
Proof. $A(T_S^m)$ の cellular 基底を具体的に与えれば良い。Example 5.1, Example 5.2, Example 5.3 を参照。 □

Lemma 4.10. *Brauer tree* T_S^m が分岐を持つとき，T_S^m に付随する *Brauer tree* 代数 $A(T_S^m)$ は *cellular* 代数でない。

Proof. Brauer tree T_S^m が頂点 i において分岐



$(k \geq 3)$ を持つとき，この頂点 i に対応する $Q_{T_S^m}$ における cycle は



となる。定義より，Brauer tree 代数 $A(T_S^m)$ の Ext-quiver はこの cycle を充満部分 quiver として含む。よって，

$$\dim_F \mathrm{Ext}^1_{A(T_S^m)}(L(i_j), L(i_{j+1})) = 1, \quad \dim_F \mathrm{Ext}^1_{A(T_S^m)}(L(i_{j+1}), L(i_j)) = 0 \quad (1 \leq j \leq k-1)$$

を得る。ここで $L(i_j)$ は頂点 i_j に対応する既約 $A(T_S^m)$-加群である。特に

$$\mathrm{Ext}^1_{A(T_S^m)}(L(i_j), L(i_{j+1})) \ncong \mathrm{Ext}^1_{A(T_S^m)}(L(i_{j+1}), L(i_j))$$

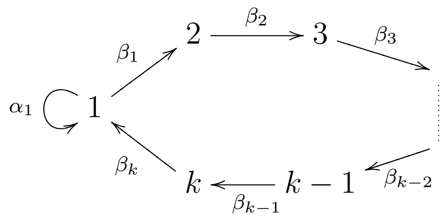
となるので，Lemma 4.4 (i) より，$A(T_S^m)$ は cellular 代数ではない。 $\square$

Lemma 4.9, Lemma 4.10 より，以下の命題を得る。

Proposition 4.11 ([KX1, Proposition 5.3]). *Brauer tree* T_S^m に付随する *Brauer tree* 代数 $A(T_S^m)$ が *cellular* 代数であるための必要十分条件は，*Brauer tree* T_S^m が直線である *(i.e.* 分岐を持たない*)* ことである *(*このとき，例外的頂点 S，及び重複度 m は任意*)*。

4.12. (変形 Brauer tree 代数 $D(T_S^2)$.) T_S^2 を重複度 2 の例外的頂点 S をグラフの端に持つ (i.e. S と繋がっている辺はただ 1 つである) 辺が 2 つ以上ある Brauer tree とする。T_S^2 に付随した Brauer quiver $Q_{T_S^2}$ を考える。T_S^2 において，例外的頂点 S と繋がってい

るただ 1 つの辺に対応する $Q_{T_S^2}$ の頂点を 1 とし，頂点 1 の属する α-cycle, β-cycle が，



であるとする (S がグラフの端にあることより，α-cycle は α_1 (loop) であることに注意)。また，頂点 1 の属する β-cycle に属する頂点の集合を $S'_0 := \{1, 2, \ldots, k\}$ とおく。このとき，各 $j \in S'_0 \setminus \{1\}$ に対し，j を始点かつ終点とする新たな cycle

$$B'_j := \beta_j \beta_{j+1} \ldots \beta_k \alpha_1 \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{j-1}$$

を考える。以上の準備の下で，変形 Brauer tree 代数 $D(T_S^2)$ を

$$D(T_S^2) := \mathbb{F}Q_{T_S^2}/\widetilde{I}_S^2$$

によって定める。ここで，$\mathbb{F}Q_{T_S^2}$ は体 $\mathbb{F}$ 上の Brauer quiver $Q_{T_S^2}$ の path 代数であり，$\widetilde{I}_S^2$ は，

$$\begin{aligned}
&\{\beta_{i_l}\alpha_i,\, \alpha_{i_k}\beta_i \,|\, i \in (Q_{T_S^m})_0 \setminus \{1\}\}, \\
&\cup \{A_1^2 - B_1\} \\
&\cup \{A_i - B_i \,|\, i \in (Q_{T_S^m})_0 \setminus S'_0\} \\
&\cup \{A_j - B'_j \,|\, j \in S'_0 \setminus \{1\}\} \\
&\cup \{\beta_m \beta_1\}
\end{aligned}$$

によって生成される $\mathbb{F}Q_{T_S^2}$ の両側イデアルである。ここで，$\alpha_{k_i}, \beta_{l_i}$ は，

$$A_i = \alpha_{i_1}\alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_k}, \quad B_i = \beta_{i_1}\beta_{i_2} \ldots \beta_{i_l} \quad (i_1 = i \text{ に注意})$$

によって定まるものである。(i.e. i を始点かつ終点とする α-cycle A_i の最後の矢が α_{i_k} で，β-cycle B_i の最後の矢が β_{i_l} である。)

Remark 4.13. [S] では，各 $\lambda \in \mathbb{F}$ に対し，変形 Brauer tree 代数 $D(T_S^2, \lambda)$ を定義しているが (上の $D(T_S^2)$ の定義は $\lambda = 0$ の場合), [S, Proposition 3.6] より，$\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2$ ならば，任意の $\lambda \in \mathbb{F}$ に対し，$D(T_S^2, \lambda) \cong D(T_S^2)$ である。

$\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 2$ の場合は，$D(T_S, 1)$ も考える必要があるが，この節では $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2$ と仮定しているので，気にしない。

Example 4.14.

(i) $T_S^2 = \textcircled{S} \overset{1}{\text{———}} \circ \overset{2}{\text{———}} \circ \overset{3}{\text{———}} \circ \overset{4}{\text{———}} \circ$ のとき，

$$Q_{T_S^2} = \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha_1"] \arrow[r, shift left, "\beta_1"] & 2 \arrow[l, shift left, "\beta_2"] \arrow[r, shift left, "\alpha_2"] & 3 \arrow[l, shift left, "\alpha_3"] \arrow[r, shift left, "\beta_3"] & 4 \arrow[l, shift left, "\beta_4"] \arrow[loop right, "\alpha_4"] \end{tikzcd}$$

であり，$\widetilde{I}_S^2$ は

$$\begin{aligned} &\{\beta_1\alpha_2,\, \alpha_3\beta_2,\, \beta_4\alpha_3,\, \alpha_2\beta_3,\, \beta_3\alpha_4,\, \alpha_4\beta_4\} \\ &\cup \{\alpha_1^2 - \beta_1\beta_2\} \\ &\cup \{\alpha_3\alpha_2 - \beta_3\beta_4,\, \alpha_4 - \beta_4\beta_3\} \\ &\cup \{\alpha_2\alpha_3 - \beta_2\alpha_1\beta_1\} \\ &\cup \{\beta_2\beta_1\} \end{aligned}$$

によって生成される $\mathbb{F}Q_{T_S^2}$ の両側イデアルである。

(ii)

$$T_S^2 = \begin{tikzcd} & & & \textcircled{S} \\ \circ \arrow[r, dash, "4"] & \circ \arrow[r, dash, "3"] & \circ \arrow[ur, dash, "1"] \arrow[dr, dash, "2"'] & \\ & & & \circ \end{tikzcd}$$

のとき，

$$Q_{T_S^2} = \begin{tikzcd} & & 1 \arrow[loop right, "\alpha_1"] \arrow[dd, "\beta_1"] \\ 4 \arrow[loop left, "\beta_4"] \arrow[r, shift left, "\alpha_4"] & 3 \arrow[l, shift left, "\alpha_3"] \arrow[ur, "\beta_3"] & \\ & & 2 \arrow[loop right, "\alpha_2"] \arrow[ul, "\beta_2"] \end{tikzcd}$$

であり， $\widetilde{I}_S^2$ は

$$\begin{aligned} &\{\beta_1\alpha_2,\, \alpha_2\beta_2,\, \beta_2\alpha_3,\, \alpha_4\beta_3,\, \beta_4\alpha_4,\, \alpha_3\beta_4\} \\ &\cup \{\alpha_1^2 - \beta_1\beta_2\beta_3\} \\ &\cup \{\alpha_4\alpha_3 - \beta_4\} \\ &\cup \{\alpha_2 - \beta_2\beta_3\alpha_1\beta_1,\, \alpha_3\alpha_4 - \beta_3\alpha_1\beta_1\beta_2\} \\ &\cup \{\beta_3\beta_1\} \end{aligned}$$

によって生成される $\mathbb{F}Q_{T_S^2}$ の両側イデアルである。

Lemma 4.15. *Brauer tree* $T_S^2 = \textcircled{S} \overset{1}{\text{———}} \circ \overset{2}{\text{———}} \circ$ に対し，T_S^2 に付随する変形 *Brauer tree* 代数 $D(T_S^2)$ は *cellular* 代数ではない。

Proof. $\mathscr{A} = D(T_S^2)$ とおく。定義より，

$$\mathscr{A} = D(T_S^2) = \mathbb{F}\Big(\alpha_1 \circlearrowright 1 \underset{\beta_2}{\overset{\beta_1}{\rightleftarrows}} 2 \circlearrowleft \alpha_2 \Big) \Big/ \Big\langle \beta_1\alpha_2,\, \alpha_2\beta_2,\, \alpha_1^2 - \beta_1\beta_2,\, \alpha_2 - \beta_2\alpha_1\beta_1,\, \beta_2\beta_1 \Big\rangle_{\mathrm{ideal}}$$
$$\cong \mathbb{F}\Big(\alpha_1 \circlearrowright 1 \underset{\beta_2}{\overset{\beta_1}{\rightleftarrows}} 2 \Big) \Big/ \Big\langle \alpha_1^2 - \beta_1\beta_2,\, \beta_2\beta_1 \Big\rangle_{\mathrm{ideal}}$$

である。このとき，$\mathscr{A}$ の基底として，

$$e_1,\, e_2,\, \vdots\, \alpha_1,\, \beta_1,\, \beta_2,\, \vdots\, \alpha_1^2(= \beta_1\beta_2),\, \alpha_1\beta_1,\, \beta_2\alpha_1,\, \vdots\, \alpha_1^3(= \alpha_1\beta_1\beta_2 = \beta_1\beta_2\alpha_1),\, \beta_2\alpha_1\beta_1$$

が取れる。ここで，e_1, e_2 はそれぞれ頂点 $1, 2$ に対応する原始ベキ等元である。

頂点 $1, 2$ に対応する既約加群をそれぞれ L_1, L_2 とし，それぞれの射影被覆を P_1, P_2 とすると，

$$P_1 = \mathscr{A}e_1 = \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}\alpha_1 \oplus \mathbb{F}\beta_2 \oplus \mathbb{F}\alpha_1^2 \oplus \mathbb{F}\beta_2\alpha_1 \oplus \mathbb{F}\alpha_1^3 \tag{4.15.1}$$
$$P_2 = \mathscr{A}e_2 = \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}\beta_1 \oplus \mathbb{F}\alpha_1\beta_1 \oplus \mathbb{F}\beta_2\alpha_1\beta_1 \tag{4.15.2}$$

であり，P_1, P_2 の radical series はそれぞれ

$$P_1 \cong \begin{array}{c} L_1 \\ L_1\ L_2 \\ L_2\ L_1 \\ L_1 \end{array}, \quad P_2 \cong \begin{array}{c} L_2 \\ L_1 \\ L_1 \\ L_2 \end{array} \tag{4.15.3}$$

となる。特に, $D(T_S^2)$ の Cartan 行列 $\mathbf{C} = \big([P_i, L_j]\big)_{1 \le i,j \le 2}$ は,

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。

$\mathscr{A}$ が cellular 代数であると仮定し，

$$\mathit{\Lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\} \text{ s.t. } \mathit{\Lambda}_0 = \{\lambda_1, \lambda_2\} \text{ and } L(\lambda_1) \cong L_1,\, L(\lambda_2) \cong L_2$$

であるとする (cellular 構造を定める $\mathit{\Lambda}$ 上の半順序はまだ定めていない)。また，

$$d_{ij} = [\Delta(\lambda_i) : L(\lambda_j)] \quad (1 \le i \le k,\, j = 1, 2)$$

とおき，分解行列 $\mathbf{D} = \left(d_{ij}\right)_{1\leq i\leq k, 1\leq j\leq 2}$ を考えると，Theorem 2.13 (iii) より $d_{11} = d_{22} = 1$ であることに注意すれば，Lemma 4.4 (ii) より，

$$\mathbf{D}^T\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 + \sum_{i=2}^{k}(d_{i1})^2 & d_{12} + d_{21} + \sum_{i=3}^{k} d_{i1}d_{i2} \\ d_{12} + d_{21} + \sum_{i=3}^{k} d_{i1}d_{i2} & (d_{12})^2 + 1 + \sum_{i=3}^{k}(d_{i2})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{C}$$

を得る。よって，

$$\sum_{i=2}^{k}(d_{i1})^2 = 3, \tag{4.15.4}$$

$$d_{12} + d_{21} + \sum_{i=3}^{k} d_{i1}d_{i2} = 2, \tag{4.15.5}$$

$$(d_{12})^2 + \sum_{i=3}^{k}(d_{i2})^2 = 1 \tag{4.15.6}$$

を得る。

もし，$d_{12} \neq 0$ であるとすると，(4.15.6) より，$d_{12} = 1$ かつ $d_{i2} = 0$ $(i \geq 3)$ となる。このとき，(4.15.5) より，$d_{21} = 1$ となるが，Theorem 2.13 (iii) より，

$$d_{12} = [\Delta(\lambda_1) : L(\lambda_2)] = 1 \Rightarrow \lambda_1 > \lambda_2,$$
$$d_{21} = [\Delta(\lambda_2) : L(\lambda_1)] = 1 \Rightarrow \lambda_2 > \lambda_1$$

となり矛盾する。よって

$$d_{12} = 0$$

である。このとき，(4.15.6) より (必要ならば番号を付けかえて)，

$$d_{32} = 1 \text{ かつ } d_{i2} = 0 \ (i \geq 4)$$

を得る。さらに，(4.15.5) より，

$$d_{21} = 1 \text{ かつ } d_{31} = 1$$

を得る。 最後に (4.15.4) より (必要ならば番号を付けかえて)，

$$d_{41} = 1 \text{ かつ } d_{i1} = 0 \ (i \geq 5)$$

を得る。以上より,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.15.7}$$

を得る。また，分解行列 **D** と Theorem 2.13 (i) より,

$$\Delta(\lambda_1) \cong L(\lambda_1), \quad \Delta(\lambda_2) \cong \begin{matrix} L(\lambda_2) \\ L(\lambda_1) \end{matrix}, \quad \Delta(\lambda_4) \cong L(\lambda_1) \tag{4.15.8}$$

となり，$K_0(\mathscr{A}\text{-mod})$ において,

$$[\Delta(\lambda_3)] = [L(\lambda_1)] + [L(\lambda_2)] \tag{4.15.9}$$

である。Proposition 2.10 より，$P(\lambda_2)$ はある cell 加群 $\Delta(\lambda_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ を部分加群として含むが ($P(\lambda_2)$ の Δ-filtration やその重複度は一意的とは限らないことに注意), Theorem 4.2 より，$\mathscr{A}$ は対称代数なので,

$$\operatorname{Top} P(\lambda_2) \cong \operatorname{soc} P(\lambda_2) \cong L(\lambda_2)$$

となり, (4.15.8), (4.15.9) より，$P(\lambda_2)$ の部分加群となり得る cell 加群は $\Delta(\lambda_3)$ のみであり，さらにその socle が $L(\lambda_2)$ と同型になることより,

$$\Delta(\lambda_3) = \begin{matrix} L(\lambda_1) \\ L(\lambda_2) \end{matrix} \tag{4.15.10}$$

となることが分かる。

(4.15.7) と Theorem 2.13 (iii) より,

$$\lambda_1 < \lambda_2,\ \lambda_1 < \lambda_3,\ \lambda_1 < \lambda_4,\ \lambda_2 < \lambda_3$$

でなくてはならない。よって，Λ 上の cellular 構造を定める半順序と整合的な全順序の候補として,

$$\begin{gathered} \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4, \\ \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_4 < \lambda_3, \\ \lambda_1 < \lambda_4 < \lambda_2 < \lambda_3 \end{gathered} \tag{4.15.11}$$

の 3 通りが考えられる。一方で，$\mathscr{A}$ が対称代数であることより,

$$\operatorname{Top} P(\lambda_1) \cong \operatorname{soc} P(\lambda_1) \cong L(\lambda_1) \tag{4.15.12}$$

である。Λ 上の cellular 構造を定める半順序と整合的な全順序を考えれば，(4.15.7) と Proposition 2.10 より，その全順序に関して最大である $\mu \in \Lambda$ に対し, $\Delta(\mu)$ は $P(\lambda_1)$ の部分加群となるが，(4.15.12) と (4.15.10) より，$\Delta(\lambda_3)$ は $P(\lambda_1)$ の部分加群とはなり得ない。よって，λ_3 が Λ の中で最大にはなり得ないので，(4.15.11) より，Λ 上の cellular 構造を定める半順序と整合的な全順序は，

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$$

のみであることが分かる。よって，再び (4.15.7) と Proposition 2.10 より，$P(\lambda_1)$ は部分加群の列

$$P(\lambda_1) = M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset M_4 \supset M_5 = 0 \text{ s.t. } M_i/M_{i+1} \cong \Delta(\lambda_i) \quad (1 \le i \le 4)$$

となるものが存在する (既に P_2 は用いているため，$M_1, M_2, \ldots$ を用いた)。

$M_4 = \Delta(\lambda_4) \cong L(\lambda_1) \cong \operatorname{soc} P(\lambda_1)$ であることと, (4.15.1), (4.15.3) より，

$$\operatorname{soc} P(\lambda_1) = M_4 = \mathbb{F}\alpha_1^3 \tag{4.15.13}$$

となることが分かる。また，$M_1/M_2 \cong \Delta(\lambda_1) = L(\lambda_1) \cong \operatorname{Top} P(\lambda_1)$ なので，$M_2 = \operatorname{rad} P(\lambda_1)$ であり，(4.15.3) より，

$$M_2/M_4 \cong \operatorname{rad} P(\lambda_1)/\operatorname{rad}^3 P(\lambda_1) \cong \begin{matrix} L_1 & L_2 \\ L_2 & L_1 \end{matrix} \quad (\operatorname{rad}^3 P(\lambda_1) = \operatorname{soc} P(\lambda_1) \text{ に注意}) \tag{4.15.14}$$

となる。さらに，$M_3/M_4 \cong \Delta(\lambda_3) \cong \begin{matrix} L(\lambda_1) \\ L(\lambda_2) \end{matrix}$, $M_2/M_3 \cong \Delta(\lambda_2) \cong \begin{matrix} L(\lambda_2) \\ L(\lambda_1) \end{matrix}$ であるので，短完全列

$$\begin{gathered} 0 \to L(\lambda_2) \to M_3/M_4 \to L(\lambda_1) \to 0 \\ 0 \to L(\lambda_1) \to M_2/M_3 \to L(\lambda_2) \to 0 \end{gathered}$$

は分裂しない。よって (4.15.14) より，

$$\operatorname{Top}(M_2/M_4) \cong L(\lambda_1) \oplus L(\lambda_2), \quad \operatorname{soc}(M_2/M_4) \cong L(\lambda_2) \oplus L(\lambda_1) \tag{4.15.15}$$

でなくてはならない。つまり，短完全列

$$0 \to M_3/M_4 \to M_2/M_4 \to M_2/M_3 \to 0 \tag{4.15.16}$$

は分裂する ($P(\lambda_2)$ の方で，順序 $\lambda_2 < \lambda_3$ が要請されるので，Λ の全順序に矛盾はしない。$P(\lambda_1)$ の Δ-filtration の取り方は一意的でないことに注意) 。よって， (4.15.1), (4.15.13),

(4.15.14), (4.15.15) より，

$$
\begin{aligned}
&M_2/M_4 \equiv \mathbb{F}\alpha_1 \oplus \mathbb{F}\beta_2 \oplus \mathbb{F}\alpha_1^2 \oplus \mathbb{F}\beta_2\alpha_1 \mod \mathbb{F}\alpha_1^3 \\
&\mathrm{soc}(M_2/M_4) \equiv \mathbb{F}\alpha_1^2 \oplus \mathbb{F}\beta_2\alpha_1 \mod \mathbb{F}\alpha_1^3 \\
&\mathrm{Top}(M_2/M_4) \equiv \mathbb{F}\alpha_1 \oplus \mathbb{F}\beta_2 \mod \mathbb{F}\alpha_1^2 \oplus \mathbb{F}\mu_2\alpha_1 \oplus \mathbb{F}\alpha_1^3
\end{aligned}
$$

となる ($M_4 = \mathbb{F}\alpha_1^3$ に注意)。短完全列 (4.15.16) が分裂することに注意すれば，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Top}(M_2/M_4) \supset \mathrm{Top}(M_3/M_4) \cong L(\lambda_1) \quad (\text{ 特に } \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Top}(M_3/M_4) = 1), \\
&\mathrm{soc}(M_2/M_4) \supset \mathrm{soc}(M_3/M_4) \cong L(\lambda_2) \quad (\text{ 特に } \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{soc}(M_3/M_4) = 1), \\
&0 \to \mathrm{soc}(M_3/M_4) \to M_3/M_4 \to \mathrm{Top}(M_3/M_4) \to 0 \quad : \text{exact}
\end{aligned}
$$

であるので (特に $\dim_F(M_3/M_4) = 2$),

$$
\begin{aligned}
&M_3/M_4 \equiv \mathbb{F}(r_1\alpha_1 + r_2\beta_2) \oplus \mathbb{F}(s_1\alpha_1^2 + s_2\beta_2\alpha_1) \mod \mathbb{F}\alpha_1^3 \quad (r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbb{F}), \\
&\mathrm{soc}(M_3/M_4) \equiv \mathbb{F}(s_1\alpha_1^2 + s_2\beta_2\alpha_1) \mod \mathbb{F}\alpha_1^3, \\
&\mathrm{Top}(M_3/M_4) \equiv \mathbb{F}(r_1\alpha_1 + r_2\beta_2) \mod \mathbb{F}(s_1\alpha_1^2 + s_2\beta_2 a_1) \oplus \mathbb{F}\alpha_1^3
\end{aligned}
$$

となる。一方で，$\mathrm{soc}(M_3/M_4) \cong L(\lambda_2)$, $\mathrm{Top}(M_3/M_4) \cong L(\lambda_1)$ なので，

$$
e_1 \cdot \mathrm{soc}(M_3/M_4) = 0, \quad e_2 \cdot \mathrm{Top}(M_3/M_4) = 0
$$

となるので，

$$
s_1 = 0, \quad r_2 = 0
$$

を得る。よって，

$$
M_3/M_4 \equiv \mathbb{F}\alpha_1 \oplus \mathbb{F}\beta_2\alpha_1 \mod \mathbb{F}\alpha_1^3
$$

となるので，

$$
M_3 = \mathbb{F}\alpha_1 \oplus \mathbb{F}\beta_2\alpha_1 \oplus \mathbb{F}\alpha_1^3
$$

となる。いま，M_3 は $P(\lambda_1)$ の $\mathscr{A}$-部分加群であるが，$P(\lambda_1)$ の中で，

$$
\alpha_1 \cdot \alpha_1 = \alpha_1^2 \neq 0 \text{ かつ } \alpha_1 \in M_3, \quad \alpha_1^2 \notin M_3
$$

となるので，M_3 が $P(\lambda_1)$ の $\mathscr{A}$-部分加群であることに矛盾する。

以上の議論より，$\mathscr{A} = D(T_S^2)$ は cellular 代数ではない。 $\square$

Proposition 4.16. 重複度 2 の例外的頂点 S をグラフの端に持つ *Brauer tree* T_S^2 に付随した変形 *Brauer tree* 代数 $D(T_S^2)$ は *cellular* 代数でない。

Proof. 変形 Brauer tree 代数 $D(T_S^2)$ の quiver 自体は Brauer tree 代数 $A(T_S^2)$ の quiver と同じなので，Brauer tree T_S^2 が分岐を持つときは，Lemma 4.10 と同じ議論より，$D(T_S^2)$ は cellular 代数でないことが分かる。よって，T_S^2 が直線のとき，つまり，

$$T_S^2 = \textcircled{S} \overset{1}{\text{———}} \circ \overset{2}{\text{———}} \circ \overset{3}{\text{———}} \ldots \overset{m-1}{\text{———}} \circ \overset{m}{\text{———}} \circ$$

のとき $D(T_S^2)$ が cellular 代数でないことを示せば良い。この場合，Brauer tree T_S^2 の辺 $1, 2$ に対応する Brauer quiver $Q_{T_S^2}$ の頂点をそれぞれ $1, 2$ とし，$Q_{T_S^2}$ の頂点 $1, 2$ に対応する $D(T_S^2)$ の原始ベキ等元をそれぞれ e_1, e_2 とすると，定義より，

$$(e_1 + e_2)D(T_S^2)(e_1 + e_2) \cong D\big(\textcircled{S} \overset{1}{\text{———}} \circ \overset{2}{\text{———}} \circ\big)$$

となることが分かる。よって，Lemma 4.15 より, $(e_1 + e_2)D(T_S^2)(e_1 + e_2)$ は cellular 代数でないので，Lemma 4.4 (iii) より，$D(T_S^2)$ も cellular 代数でない。 □

4.17. Proposition 4.16 の証明で見たように，直線の Brauer tree

$$T_S^2 = \textcircled{S} \overset{1}{\text{———}} \circ \overset{2}{\text{———}} \circ \overset{3}{\text{———}} \ldots \overset{m-1}{\text{———}} \circ \overset{m}{\text{———}} \circ$$

に対し，それに付随する変形 Brauer tree 代数 $D(T_S^2)$ が cellular でないことを示すには，辺が 2 つの場合 (Lemma 4.15) を示せば十分であるが, 辺が 3 つの場合は以下の Lemma のように，Lemma 4.15 より簡単に cellular 代数でないことが分かる。(辺が 3 つ以上ある場合は，T_S^2 の辺 $1, 2, 3$ に対応する $D(T_S^2)$ の原始ベキ等元 e_1, e_2, e_3 に対し，$(e_1 + e_2 + e_3)D(T_S^2)(e_1 + e_2 + e_3)$ を考えれば辺が 3 つの場合に帰着できる。)

Lemma 4.18. *Brauer tree* $T_S^2 = \textcircled{$S$} \overset{1}{\text{———}} \circ \overset{2}{\text{———}} \circ \overset{3}{\text{———}} \circ$ に対し，T_S^2 に付随する変形 *Brauer tree* 代数 $D(T_S^2)$ は *cellular* 代数ではない。

Proof. 定義より，

$$Q_{T_S^2} = \ {}^{\alpha_1}\circlearrowright 1 \underset{\beta_2}{\overset{\beta_1}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\alpha_3}{\overset{\alpha_2}{\rightleftarrows}} 3 \circlearrowleft^{\beta_3}$$

$$\widetilde{I}_T^2 = \big\langle \beta_1\alpha_2,\ \alpha_3\beta_2,\ \beta_3\alpha_3,\ \alpha_2\beta_3,\ \alpha_1^2 - \beta_1\beta_2,\ \alpha_3\alpha_2 - \beta_3,\ \alpha_2\alpha_3 - \beta_2\alpha_1\beta_1,\ \beta_2\beta_1 \big\rangle_{\text{ideal}}$$

$$D(T_S^2) = \mathbb{F}Q_{T_S^2}/\widetilde{I}_S^2$$

$$\cong \mathbb{F}\Big({}^{\alpha_1}\circlearrowright 1 \underset{\beta_2}{\overset{\beta_1}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\alpha_3}{\overset{\alpha_2}{\rightleftarrows}} 3 \Big) \Big/ \Big\langle \beta_1\alpha_2,\ \alpha_3\beta_2,\ \alpha_1^2 - \beta_1\beta_2,\ \alpha_2\alpha_3 - \beta_2\alpha_1\beta_1,\ \beta_2\beta_1 \Big\rangle_{\text{ideal}}$$

である。$D(T_S^2)$ の頂点 $1,2,3$ に対応する既約加群をそれぞれ L_1, L_2, L_3 とし，それぞれの射影被覆を P_1, P_2, P_3 とすると，P_1, P_2, P_3 の radical series は

$$P_1 \cong \begin{matrix} L_1 \\ L_1\ L_2 \\ L_2\ L_1 \\ L_1 \end{matrix}, \quad P_2 \cong \begin{matrix} L_2 \\ L_1\ L_3 \\ L_1 \\ L_2 \end{matrix}, \quad P_3 \cong \begin{matrix} L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

となり，$D(T_S^2)$ の Cartan 行列 $\mathbf{C}$ は

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。$D(T_S^2)$ が cellular 代数であると仮定し，

$$\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\} \text{ s.t. } \Lambda_0 = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \text{ and } L(\lambda_1) \cong L_1,\ L(\lambda_2) \cong L_2,\ L(\lambda_3) = L_3$$

であるとする (cellular 構造を定める Λ 上の半順序はまだ定めていない)。また，

$$d_{ij} = [\Delta(\lambda_i) : L(\lambda_j)] \quad (1 \leq i \leq k,\ j = 1, 2, 3)$$

とおき，分解行列 $\mathbf{D} = \left(d_{ij}\right)_{1\leq i\leq k, 1\leq j\leq 3}$ を考えると，Lemma 4.4 (ii) より，

$$\mathbf{D}^T\,\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k (d_{i1})^2 & \sum_{i=1}^k d_{i1}d_{i2} & \sum_{i=1}^k d_{i1}d_{i3} \\ \sum_{i=1}^k d_{i2}d_{i1} & \sum_{i=1}^k (d_{i2})^2 & \sum_{i=1}^k d_{i2}d_{i3} \\ \sum_{i=1}^k d_{i3}d_{i1} & \sum_{i=1}^k d_{i3}d_{i2} & \sum_{i=1}^k (d_{i3})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{C}$$

となる。これより，

- $\mathbf{D}$ の第1列目には 1 がちょうど4つあり，他は 0 である
  ($d_{11} = 1$ かつ $\sum_{i=1}^k (d_{i1})^2 = 4$ より).
- $\mathbf{D}$ の第2列目には 1 がちょうど2つあり，他は 0 である ($\sum_{i=1}^k (d_{i2})^2 = 2$ より).
- $\mathbf{D}$ の第3列目には 1 がちょうど2つあり，他は 0 である ($\sum_{i=1}^k (d_{i3})^2 = 2$ より).
- $\mathbf{D}$ の各行は $(0**)$ or $(**0)$ の形である ($\sum_{i=1}^k d_{i1}d_{i3} = 0$ より).
- $\mathbf{D}$ の行で (110) となるものがちょうど2つある。(上記+$\sum_{i=1}^k d_{i1}d_{i2} = 2$ より).
- $\mathbf{D}$ の行で (011) となるものがちょうど1つある。(上記+$\sum_{i=1}^k d_{i2}d_{i3} = 1$ より).

となる。しかし，最後の２つの条件より，$\mathbf{D}$ の第２列目には３つ以上の 1 があることになるが，これは２番目の条件を満たさない。よって，$\mathbf{D}^T\mathbf{D}=\mathbf{C}$ となるような $D(T_S^2)$ の分解行列は存在しない。つまり，$D(T_S^2)$ は cellular 代数ではない。 $\square$

上の証明の系として以下のことを得る。

Corollary 4.19. *Cartan* 行列が $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ であるような *cellular* 代数は存在しない。

4.20. (Tilted 代数.) $\mathbb{F}$ 上の有限次元代数 $\mathscr{A}$ に対し，$\mathscr{A}$-加群 T が,

- $\operatorname{pdim} T \leq 1 \quad (\operatorname{pdim} T$ は T の射影次元$)$,
- $\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{A}}(T,T)=0$

を満たすとき，T を **partial tilting 加群** という。partial tilting 加群 T がさらに,

- ある短完全列 $0 \to \mathscr{A} \to T' \to T'' \to 0 \quad (T', T'' \in \operatorname{add} T)$ が存在する。
  $(\operatorname{add} T$ は T の直和因子全体からなる $\mathscr{A}$-mod の充満部分圏.)

を満たすとき，T を **tilting 加群** という。

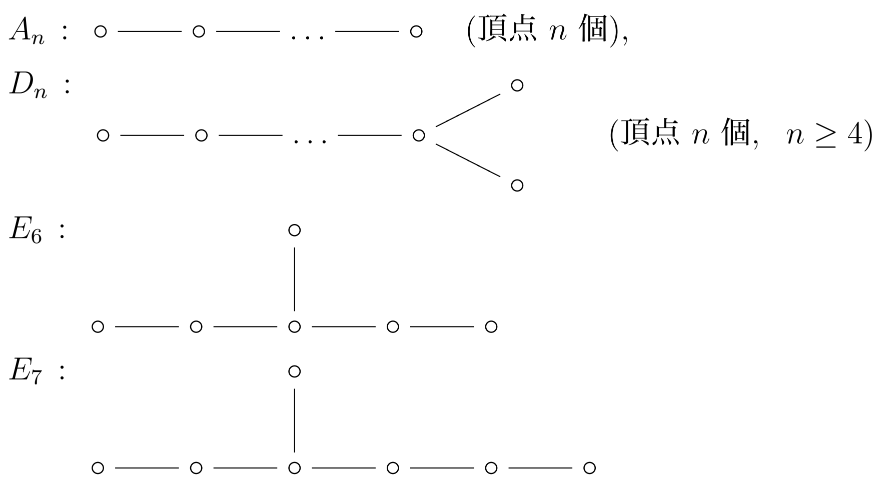
Q を有限 connected quiver で acyclic であるものとし, T を path 代数 $\mathbb{F}Q$ の tilting 加群であるとする。このとき,

$$\mathscr{B}=\operatorname{End}_{\mathbb{F}Q}(T)$$

を Q **型の tilted 代数**という。以下のことはよく知られている。

Lemma 4.21 (cf. [ASS, Corollary 3.4 in Chapter VIII])**.** *Q を有限 connected quiver で acyclic であるものとし, $\mathscr{B}$ を Q 型の tilted 代数であるとする。このとき，tilted 代数 $\mathscr{B}$ の Ext-quiver $Q_{\mathscr{B}}$ は acyclic である。*

4.22. (Dynkin 型.) quiver Q の underline graph が,



$$E_8\ :\quad \begin{array}{ccccccccccccc} & & & & \circ & & & & & & & & \\ & & & & | & & & & & & & & \\ \circ & — & \circ & — & \circ & — & \circ & — & \circ & — & \circ & — & \circ \end{array}$$

のいずれかであるとき，Q は X 型 $(X \in \{A_n, D_n, E_6, E_7, E_8\})$ であるといい, これらの quiver に付随する tilted 代数を Dynkin 型の tilted 代数という。

4.23. (Trivial extension.) $\mathbb{F}$ 上の有限次元代数 $\mathscr{A}$ に対し,

$$D(\mathscr{A}) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathscr{A}, \mathbb{F})$$

とおき，自然な方法で $D(\mathscr{A})$ を $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群と思う。このとき，$\mathscr{A}$ の **trivial extension** $T(\mathscr{A}) = \mathscr{A} \ltimes D(\mathscr{A})$ を，

- $\mathbb{F}$-線型空間として $T(\mathscr{A}) = \mathscr{A} \oplus D(\mathscr{A})$ とし，
- $T(\mathscr{A})$ の積を，

$$(a, f) \cdot (b, g) := (ab\,,\, a \cdot g + f \cdot b) \quad (a, b \in \mathscr{A},\ f, g \in D(\mathscr{A}))$$

  によって定める。

$T(\mathscr{A})$ 上の双線型形式 $\langle\, ,\, \rangle : T(\mathscr{A}) \times T(\mathscr{A}) \to \mathbb{F}$ を

$$\langle (a, f)\,,\, (b, g) \rangle := f(b) + g(a) \quad (a, b \in \mathscr{A},\ f, g \in D(\mathscr{A}))$$

によって定めると，$\langle\, ,\, \rangle$ は非退化, 結合的かつ対称的である。よって，$\mathscr{A}$ の trivial extension $T(\mathscr{A})$ は対称代数である。

4.24. $Q = (Q_0, Q_1)$ を quiver とする。ここで，Q_0 は Q の頂点の集合, Q_1 は Q の矢の集合である。Q の path α に対し，α の始点を $s(\alpha)$, 終点を $t(\alpha)$ と表す。

I を path 代数 $\mathbb{F}Q$ の許容イデアルとし，$\mathscr{A} = \mathbb{F}Q/I$ とする。Q の path の $\mathscr{A}$ での像からなる $\mathscr{A}$ の基底を 1 つ取り, それを $\mathcal{B}_{Q;I}$ とおく。また，$\mathcal{B}_{Q;I}$ に関する $D(\mathscr{A})$ の双対基底を $\{f_\alpha \,|\, \alpha \in \mathcal{B}_{Q;I}\}$ とする (i.e. $f_\alpha(\beta) = \delta_{\alpha,\beta}\,(\alpha, \beta \in \mathcal{B}_{Q;I})$)。定義より，

$$\mathcal{B}_{Q;I} \cup \{f_a \,|\, \alpha \in \mathcal{B}_{Q;I}\}$$

は $T(\mathscr{A})$ の基底となる。

$i \in Q_0$ に対し，頂点 i に対応する $\mathscr{A}$ の原始ベキ等元を e_i とすれば，定義より，$1_{\mathscr{A}}$ が $T(\mathscr{A})$ の単位元となるので，

$$\{e_i \,|\, i \in Q_0\} = \{T(\mathscr{A}) \text{ の互いに直交する原始ベキ等元}\} \tag{4.24.1}$$

となる。また，$i \in Q_0$, $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_{Q;I}$ に対し，

$$e_i f_\alpha(\beta) = f_\alpha(\beta e_i) = \delta_{\alpha,\beta}\delta_{t(\alpha),i}, \quad f_\alpha e_i(\beta) = f_\alpha(e_i\beta) = \delta_{\alpha,\beta}\delta_{s(\alpha),i}$$

であるので，

$$e_i f_\alpha = \delta_{t(\alpha),i} f_\alpha, \quad f_\alpha e_i = \delta_{s(\alpha),i} f_\alpha \qquad (i \in Q_0,\, \alpha \in \mathcal{B}_{Q;I}) \tag{4.24.2}$$

となる。(4.24.1) と (4.24.2) をふまえて，quiver $\widetilde{Q} = (\widetilde{Q}_0, \widetilde{Q}_1)$ を

$$\widetilde{Q}_0 := Q_0, \quad \widetilde{Q}_1 := Q_1 \cup \{\alpha' \mid \alpha \in \mathcal{B}_{Q;I}\}$$

と定める。ここで，α' は $t(\alpha)$ から $s(\alpha)$ への新たに加える矢である (i.e. $s(\alpha') = t(\alpha)$, $t(\alpha') = s(\alpha)$ である矢)。すると，(4.24.1), (4.24.2) より，代数の全射準同型

$$\varphi : \mathbb{F}\widetilde{Q} \to T(\mathscr{A}) \text{ s.t. } e_i \mapsto e_i\,(i \in Q_0),\ \alpha \mapsto \alpha\,(\alpha \in Q_1),\ \alpha' \mapsto f_\alpha\ (\alpha \in \mathcal{B}_{Q;I}) \tag{4.24.3}$$

が存在することが分かる。

Lemma 4.25. *$\mathscr{A} = \mathbb{F}Q/I$ とし，Q は有限, connected, acyclic であると仮定する。また，R_Q を path 代数 $\mathbb{F}Q$ の矢イデアルとする。このとき，$\mathscr{A}$ の trivial extension $T(\mathscr{A})$ が cellular 代数であるならば，$I = R_Q^2$ である。*

Proof. 定義より，$D(\mathscr{A})$ は $T(\mathscr{A})$ の両側イデアルであり，代数として, $T(\mathscr{A})/D(\mathscr{A}) \cong \mathscr{A}$ となることが分かる。よって，

$$Q \text{ は } T(\mathscr{A}) \text{ の Ext-quiver } Q_{T(\mathscr{A})} \text{ の部分 quiver である} \tag{4.25.1}$$

ことが分かる。一方で，(4.24.3) より，

$$Q_{T(\mathscr{A})} \text{ は } \widetilde{Q} \text{ の部分 quiver である} \tag{4.25.2}$$

ことが分かる。

Q において，頂点 i から 頂点 j への矢が k 本あるとする ($k > 0$)。このとき，Q が acyclic であることから，Q において, 頂点 j から頂点 i への path は存在しない。よって，$\widetilde{Q}$ の定義より，$\widetilde{Q}$ において, 頂点 i から頂点 j への矢はちょうど k 本である。よって，(4.25.1), (4.25.2) より，

$$\begin{aligned} &Q \text{ において, 頂点 } i \text{ から 頂点 } j \text{ への矢が } k \text{ 本 } (k > 0) \\ &\Rightarrow Q_{T(\mathscr{A})} \text{ において，頂点 } i \text{ から 頂点 } j \text{ への矢は } k \text{ 本} \end{aligned} \tag{4.25.3}$$

となる。

(仮定 1): Q において，$\alpha_1\alpha_2 \notin I$ となるような path $i_1 \xrightarrow{\alpha_1} i_2 \xrightarrow{\alpha_2} i_3$ が存在する

と仮定する。(仮定 1) より $k>0$ である。$\alpha_1\alpha_2 \in \mathcal{B}_{Q;I}$ としてよい。このとき，$T(\mathscr{A})$ において, $\alpha_2 f_{\alpha_1\alpha_2}(\alpha_1) = f_{\alpha_1\alpha_2}(\alpha_1\alpha_2) = 1$ であるので,

(4.25.4) $$\alpha_2 f_{\alpha_1\alpha_2} = f_{\alpha_1} + \sum_{\gamma \in \mathcal{B}_{Q;I}} r_\gamma f_\gamma \quad (r_\gamma \in \mathbb{F})$$

と表せる。

(仮定２): $s(\beta)=i_1$, $t(\beta)=i_2$ となる $\beta \in \mathcal{B}_{Q;I}$ で長さ 2 以上のものは存在しない

と仮定すると,

$$\{\beta \in \mathcal{B}_{Q;I} \,|\, s(\beta)=i_1,\, t(\beta)=i_2\} = \{\beta \in Q_1 \,|\, s(\beta)=i_1,\, t(\beta)=i_2\}$$

であり, Q が acyclic なので Q には i_2 から i_1 への矢が存在しないことに注意すると,

$$\{\widetilde{Q} \text{ において } i_2 \text{ から } i_1 \text{ への矢 }\} = \{\beta' \,|\, \beta \in Q_1 \text{ s.t. } s(\beta)=i_1,\, t(\beta)=i_2\}$$

となる。一方で，(4.24.3) の全射 $\varphi : \mathbb{F}\widetilde{Q} \to T(\mathscr{A})$ を考えると, (4.25.4) より,

$$\alpha_1' - \alpha_2(\alpha_1\alpha_2)' + \sum_{\gamma \in \mathcal{B}_{Q;I}} r_g \gamma' \in \operatorname{Ker}\varphi$$

となるので,

(4.25.5)
$$\{Q_{T(\mathscr{A})} \text{ において } i_2 \text{ から } i_1 \text{ への矢 }\} \subset \{\beta' \,|\, \beta \in Q_1 \text{ s.t. } s(\beta)=i_1,\, t(\beta)=i_2\} \setminus \{\alpha_1'\}$$

となる。Q において i_1 から i_2 への矢が k 本だとすると (仮定 1 より，$k>0$ である), (4.25.3) より，$Q_{T(\mathscr{A})}$ において i_1 から i_2 への矢は k 本あり，一方で, (4.25.5) より，$Q_{T(\mathscr{A})}$ において i_2 から i_1 への矢は $k-1$ 本以下となる。しかし，これは $Q_{T(\mathscr{A})}$ が cellular 代数であることより，Lemma 4.4 (i) に矛盾する。よって，(仮定 1 のもとで) 仮定 2 は成り立たない。よって，i_1 を始点, i_2 を終点とする $\alpha^{(2)} \in \mathcal{B}_{Q;I}$ で長さ 2 以上の path $\alpha^{(2)} = i_1 \xrightarrow{\alpha_1^{(2)}} i_2^{(2)} \xrightarrow{\alpha_2^{(2)}} i_3^{(2)} \xrightarrow{\alpha_3^{(2)}} \ldots \xrightarrow{\alpha_{l_2}^{(2)}} i_2$ が存在する。

path $i_1 \xrightarrow{\alpha_1^{(2)}} i_2^{(2)} \xrightarrow{\alpha_2^{(2)}} i_3^{(2)}$ に対し，同様な議論を行えば, i_1 を始点 $i_2^{(2)}$ を終点とする $\alpha^{(3)} \in \mathcal{B}_{Q;I}$ で長さ 2 以上の path $\alpha^{(3)} = i_1 \xrightarrow{\alpha_1^{(3)}} i_2^{(3)} \xrightarrow{\alpha_2^{(3)}} i_3^{(3)} \xrightarrow{\alpha_3^{(3)}} \ldots \xrightarrow{\alpha_{l_3}^{(3)}} i_2^{(2)}$ が存在する。このとき，もし，$i_2^{(3)} = i_2$ ならば, Q の中で cycle

$$i_2 = i_2^{(3)} \xrightarrow{a_2^{(3)}} \ldots \xrightarrow{\alpha_{l_3}^{(3)}} i_2^{(2)} \xrightarrow{\alpha_2^{(2)}} i_3^{(2)} \xrightarrow{\alpha_3^{(2)}} \ldots \xrightarrow{\alpha_{l_2}^{(2)}} i_2$$

ができて Q が acyclic であることに矛盾する。また，$i_2^{(3)} = i_2^{(2)}$ ならば，path $\alpha^{(3)}$ の中で cycle ができるのでやはり矛盾。よって, $i_2^{(3)} \neq i_2, i_2^{(2)}$ である。

以下，同様に繰り返せば，任意の $p > 0$ に対し，$\alpha^{(p)} \in \mathcal{B}_{Q;I}$ で長さ 2 以上の path $\alpha^{(p)} = i_1 \xrightarrow{\alpha_1^{(p)}} i_2^{(p)} \xrightarrow{\alpha_2^{(p)}} i_3^{(p)} \xrightarrow{\alpha_3^{(p)}} \dots \xrightarrow{\alpha_{l_p}^{(p)}} i_2^{(p-1)}$ が存在し，$i_2^{(p)} \neq i_2, i_2^{(2)}, \dots, i_2^{(p-1)}$ となるものが存在する。よって，($p > 0$ に対し成り立つので) Q の中に無限個の異なる頂点 $i_2, i_2^{(2)}, i_2^{(3)}, \dots$ が存在することになるので，これは Q が有限であることに矛盾する。よって，仮定 1 は成り立たないので，Lemma が示せた。 $\square$

Remark 4.26. Lemma 4.25 は以下の Fact から直ちに従うことを (2016-8-30 に) 伊山先生に教えて頂きました (参考のために，もともとの議論も残しておきます)。

> **Fact:** $\mathscr{A} = \mathbb{F}Q/I$ に対し, その trivial extension $T(\mathscr{A})$ の Gabriel quiver $Q_{T(\mathscr{A})}$ は, quiver Q に, 以下のように矢を加えることによって得られる：
> - α を $\mathbb{F}Q/I$ において 0 にならない path で, α にどんな矢を (左右から) かけても 0 となるものとするとき, $t(\alpha)$ から $s(\alpha)$ へ矢を 1 本加える。

Q は acyclic で, $I \neq R_Q^2$ とする。$\mathscr{A} = \mathbb{F}Q/I$ において 0 とはならない長さ最大の path (の 1 つ) を α とすると, $I \neq R_Q^2$ より α は長さ 2 以上の path である。このとき, 上の Fact より, path α に含まれる矢 α_i に対し, $Q_{T(\mathscr{A})}$ において, α_i と逆向きの矢は存在しない。このことは, $T(\mathscr{A})$ が cellular 代数であるとき, Lemma 4.4 (i) 矛盾する。よって, $T(\mathscr{A})$ が cellular 代数ならば, $I = R_Q^2$ である。

上の Fact はよく知られている事実らしいが, 参照すべき文献はよく分かりません (ご存知の方はお知らせ頂けると助かります)。より一般の形で上の Fact を述べているものとして, [A, Lemma 1.3], [ACT, Lemma 1.2] などがある。

4.27. $\mathscr{A} = \mathbb{F}Q/I$ (Q : 有限, connected, acyclic) であるとき，$\mathscr{A}$ の trivial extension $T(\mathscr{A})$ が cellular 代数であるならば，Lemma 4.25 より, $I = R_Q^2$ である。このとき，

$$\mathcal{B}_{Q;I} = \{e_i \,|\, i \in Q_0\} \cup \{\alpha \in Q_1\}$$

であり，$D(\mathscr{A})$ の基底として，

$$\{f_{e_i} \,|\, i \in Q_0\} \cup \{f_\alpha \,|\, \alpha \in Q_1\}$$

が取れる。よって，

(4.27.1) $$\{e_i \,|\, i \in Q_0\} \cup \{\alpha \in Q_1\} \cup \{f_{e_i} \,|\, i \in Q_0\} \cup \{f_\alpha \,|\, \alpha \in Q_1\} : T(\mathscr{A}) \text{ の基底}$$

となる。このとき，$T(\mathscr{A})$ において，

$$
(4.27.2)\qquad
\begin{aligned}
&e_1\alpha = \delta_{s(\alpha),i}\alpha, \quad \alpha e_1 = \delta_{t(\alpha),i}\alpha \quad (i \in Q_0,\, \alpha \in Q_1)\\
&e_i f_\alpha = \delta_{t(\alpha),i} f_\alpha, \quad f_\alpha e_i = \delta_{s(\alpha),i} f_\alpha \quad (i \in Q_0,\, \alpha \in Q_1)\\
&\alpha\beta = 0, \quad f_\alpha f_\beta = 0 \quad (\alpha, \beta \in Q_1),\\
&\alpha f_\beta = \delta_{\alpha,\beta} f_{e_{s(\alpha)}}, \quad f_\beta \alpha = \delta_{\alpha,\beta} f_{e_{t(\alpha)}} \quad (\alpha, \beta \in Q_1)
\end{aligned}
$$

が成り立つことは，直接計算すれば分かる。特に，

$$
(4.27.3)\qquad \alpha f_\alpha = f_{e_{s(\alpha)}}, \quad f_\beta \beta = f_{e_{t(\beta)}} \quad (\alpha, \beta \in Q_1)
$$

なので，

$$
(4.27.4)\qquad
\begin{aligned}
\alpha f_\alpha &= f_\beta \beta \quad (\alpha, \beta \in Q_1 \text{ s.t. } s(\alpha) = t(\beta))\\
\alpha f_\alpha &= \beta f_\beta \quad (\alpha, \beta \in Q_1 \text{ s.t. } s(\alpha) = s(\beta))\\
f_\alpha \alpha &= f_\beta \beta \quad (\alpha, \beta \in Q_1 \text{ s.t. } t(\alpha) = t(\beta))
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

以上のことを踏まえて，$\alpha \in Q_1$ に対し，$\overline{\alpha}$ を α の始点と終点を逆にした (新たに加える) 矢とし，新たな quiver $\widehat{Q} = (\widehat{Q}_0, \widehat{Q}_1)$ (Q の double quiver) を

$$
\widehat{Q}_0 := Q_0, \quad \widehat{Q}_1 = Q_1 \cup \overline{Q}_1
$$

と定める。また，path 代数 $\mathbb{F}\widehat{Q}$ の許容イデアル $\widehat{I}_Q$ を

$$
\begin{aligned}
&\{\alpha\beta \,|\, \alpha, \beta \in Q_1\} \cup \{\overline{\alpha}\overline{\beta} \,|\, \alpha, \beta \in Q_1\} \cup \{\alpha\overline{\beta},\, \overline{\beta}\alpha \,|\, \alpha \neq \beta \in Q_1\}\\
&\cup \{\alpha\overline{\alpha} - \overline{\beta}\beta \,|\, \alpha, \beta \in Q_1 \text{ s.t. } s(\alpha) = t(\beta)\}\\
&\cup \{\alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\beta} \,|\, \alpha, \beta \in Q_1 \text{ s.t. } s(\alpha) = s(\beta)\}\\
&\cup \{\overline{\alpha}\alpha - \overline{\beta}\beta \,|\, \alpha, \beta \in Q_1 \text{ s.t. } t(\alpha) = t(\beta)\}
\end{aligned}
$$

によって生成される $\mathbb{F}\widehat{Q}$ のイデアルとして定める。

Proposition 4.28. $\mathscr{A} = \mathbb{F}Q/I$ とし，Q は有限, *connected, acyclic* であると仮定する。このとき，$\mathscr{A}$ の *trivial extension* $T(\mathscr{A})$ が *cellular* 代数であるならば，

$$
T(\mathscr{A}) \cong \mathbb{F}\widehat{Q}/\widehat{I}_Q \ \textit{as algebras.}
$$

Proof. 代数の準同型 $\varphi : \mathbb{F}\widehat{Q}/\widehat{I}_Q \to T(\mathscr{A})$ を，

$$
e_i \mapsto e_i \ (i \in Q_0), \quad \alpha \mapsto \alpha,\ \overline{\alpha} \mapsto f_\alpha \quad (\alpha \in Q_1)
$$

によって定める。φ が well-defined であることは，(4.27.2), (4.27.4) より分かる。

φ が全射であることは, (4.27.1) と (4.27.3) より分かり，両辺の次元を比べれば，同型であることが分かる。 $\square$

以下, $\mathbb{F}\widehat{Q}/\widehat{I}_Q$ が cellular 代数となるための条件を調べる。

Lemma 4.29.

$$Q = \begin{tikzcd}[row sep=small] & & 3 \\ 1 \arrow[r, dash] & 2 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\ & & 4 \end{tikzcd} \qquad \text{(矢の向きは任意)}$$

であるとき，$\mathbb{F}\widehat{Q}/\widehat{I}_Q$ は *cellular* 代数でない。

Proof. 定義より，$\mathbb{F}\widehat{Q}/\widehat{I}_Q$ の Cartan 行列 $\mathbf{C}$ は

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。$\mathbb{F}\widehat{Q}/\widehat{I}_Q$ は cellular 代数であると仮定し，$\mathbf{D} = (d_{ij})_{1\le i\le k,\,1\le j\le 4}$ を分解行列とすると，Lemma 4.4 (ii) より,

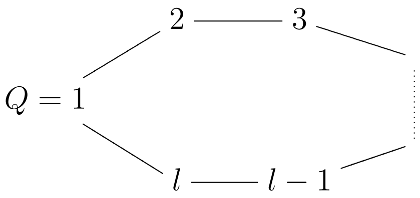
$$\mathbf{D}^T\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k (d_{i1})^2 & \sum_{i=1}^k d_{i1}d_{i2} & \sum_{i=1}^k d_{i1}d_{i3} & \sum_{i=1}^k d_{i1}d_{i4} \\ \sum_{i=1}^k d_{i2}d_{i1} & \sum_{i=1}^k (d_{i2})^2 & \sum_{i=1}^k d_{i2}d_{i3} & \sum_{i=1}^k d_{i2}d_{i4} \\ \sum_{i=1}^k d_{i3}d_{i1} & \sum_{i=1}^k d_{i3}d_{i2} & \sum_{i=1}^k (d_{i3})^2 & \sum_{i=1}^k d_{i3}d_{i4} \\ \sum_{i=1}^k d_{i4}d_{i1} & \sum_{i=1}^k d_{i4}d_{i2} & \sum_{i=1}^k d_{i4}d_{i3} & \sum_{i=1}^k (d_{i4})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{C}$$

となる。これより,

- $\mathbf{D}$ の各列には 1 がちょうど 2 つあり，他は 0 である。
  ($\sum_{i=1}^k (d_{ij})^2 = 2$ $(1 \le j \le 4)$ より)
- $\mathbf{D}$ の各行は $(0*0*)$ or $(0**0)$ or $(**00)$ の形である。
  ($\sum_{i=1}^k d_{i1}d_{i3} = \sum_{i=1}^k d_{i1}d_{i4} = \sum_{i=1}^k d_{i3}d_{i4} = 0$ より)
- $\mathbf{D}$ の行で，(1100), (0110), (0101) となるものがそれぞれちょうど 1 つある。
  (上記 + $\sum_{i=1}^k d_{i1}d_{i2} = \sum_{i=1}^k d_{i2}d_{i3} = \sum_{i=1}^k d_{i2}d_{i4} = 1$ より)

しかし，最後の条件より，$\mathbf{D}$ の２列目には 1 が３つ以上存在することになり，最初の条件に矛盾する。よって，$\mathbf{D}^T\mathbf{D} = \mathbf{C}$ を満たす分解行列 $\mathbf{D}$ は存在しないので，$\mathbb{F}\widehat{Q}/\widehat{I}_Q$ は cellular 代数でない。 $\square$

Lemma 4.30. $l \geq 3$ とする。



(矢の向きは *acyclic* になるように任意にとる)

であるとき，$\mathbb{F}\widehat{Q}/\widehat{I}_Q$ は *cellular* 代数でない。

Proof. 定義より $\mathbb{F}\widehat{Q}/\widehat{I}_Q$ の Cartan 行列 $\mathbf{C}$ は

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。$\mathbb{F}\widehat{Q}/\widehat{I}_Q$ は cellular 代数であると仮定し，$\mathbf{D} = (d_{ij})_{1\leq i\leq k,\, 1\leq j\leq l}$ を分解行列とすると，Lemma 4.4 (ii) より, $\mathbf{D}^T\mathbf{D} = \mathbf{C}$ であるので，両辺を比べると,

- $\mathbf{D}$ の各列には, 1 がちょうど２つあり，他は 0 である。
  $(\sum_{i=1}^{k}(d_{ij})^2 = 2\ (1 \leq j \leq l)$ より$)$
- $\mathbf{D}$ の各行で 0 でない成分は高々２つである。
  $(\sum_{i=1}^{k} d_{ij}d_{ij'} = 0\ (j' \not\equiv j, j \pm 1 \mod l$ より$)$
- $\mathbf{D}$ の行で, $(110\dots0)$, $(0110\dots0)$, $\dots$, $(0\dots011)$, $(10\dots01)$ となるものがそれぞれちょうど 1 つある。
  (上記 + $\sum_{i=1}^{k} d_{ij}d_{ij+1} = \sum_{i=1}^{k} d_{i1}d_{il} = 1\ (1 \leq j \leq l-1)$ より)

以上より，$\mathbf{D}$ は最後の条件に現れる l 個の行ベクトルを適当な順に並べた l 次正方行列となる。$\mathbf{D}$ が正方行列であることに注意して, Theorem 2.13 (iii) を用いると，$d_{ii} = 1$ $(1 \leq i \leq l)$ でなくてはならないので，$\mathbf{D}$ は,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。このとき, $\Lambda = \{1, 2, \ldots, l\}$ とおくと ($\mathbf{D}$ の添え字どおりに取る)，Theorem2.13 (iii) より，Λ 上の順序が

$$1 > 2 > 3 > \cdots > l-1 > l > 1 \text{ or } l < 1 < 2 < 3 < \cdots < l-1 < l$$

となり，いずれも矛盾する。よって，$\mathbf{D}^T\mathbf{D} = \mathbf{C}$ を満たす分解行列で，さらに Theorem 2.13 (iii) を満たすものは存在しないので，$\mathbb{F}\widehat{Q}/\widehat{I}_Q$ は cellular 代数でない。 □

Lemma 4.29, Lemma 4.30 の証明の系として以下を得る。

Corollary 4.31. *Cartan 行列が,*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

であるような cellular 代数は存在しない。

Lemma 4.32. *quiver Q (有限, connected, acyclic) に対し, もし，$i, j \in Q_0$ で i から j への矢が k ($k \geq 2$) 本あるようなものが存在するとすると，$\mathbb{F}\widehat{Q}/\widehat{I}_Q$ は cellular 代数でない。*

Proof. $\widehat{I}_Q$ の定義より，$(e_i + e_j)\mathbb{F}\widehat{Q}/\widehat{I}_Q(e_i + e_j)$ は

$$\mathbb{F}\left(i \underset{\beta_k}{\overset{\alpha_k}{\rightleftarrows}} j \right) \Big/ \Big\langle \alpha_m\beta_n,\ \beta_m\alpha_n,\ \alpha_m\beta_m - \alpha_n\beta_n,\ \beta_m\alpha_m - \beta_n\alpha_n \,\Big|\, 1 \leq n \neq m \leq k \Big\rangle_{\text{ideal}}$$

と同型になる。よって，$(e_i + e_j)\mathbb{F}\widehat{Q}/\widehat{I}_Q(e_i + e_j)$ の Cartan 行列 $\mathbf{C}$ は

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & k \\ k & 2 \end{pmatrix}$$

となり，$k \geq 2$ より，$\det \mathbf{C} = 4 - k^2 \leq 0$ となる。

よって，Lemma 4.4 (ii) より，$(e_i + e_j)\mathbb{F}\widehat{Q}/\widehat{I}_Q(e_i + e_j)$ は cellular 代数でないので, Lemma (4.4) (iii) より, $\mathbb{F}\widehat{Q}/\widehat{I}_Q$ も cellular 代数でない。 □

Proposition 4.33. *quiver Q (有限, connected, acyclic)* に対し*,* $\mathbb{F}\widehat{Q}/\widehat{I}_Q$ が *cellular* 代数であるための必要十分条件は,

(4.33.1) $$Q = 1 \text{ —— } 2 \text{ —— } \dots \text{ —— } k \quad (\text{矢の向きは任意})$$

となることである。このとき，$\mathbb{F}\widehat{Q}/\widehat{I}_Q$ は，*Brauer tree*

(4.33.2)
$$T_S^1 = \circ \text{ —— } \circ \text{ —— } \dots \text{ —— } \circ \quad (\text{頂点が } k \text{ 個，重複度 } 1 \text{ の例外的頂点は任意})$$

に付随する *Brauer tree* 代数 $A(T_S^1)$ と同型である。

Proof. Q が (4.33.3) のとき，定義より, $\mathbb{F}\widehat{Q}/\widehat{I}_Q$ が (4.33.2) の Brauer tree T_S^1 に付随した Brauer tree 代数 $A(T_S^1)$ と同型になることは，直接確かめられる。このとき, Lemma 4.9 より，$\mathbb{F}\widehat{Q}/\widehat{I}_Q \cong A(T_S^1)$ は cellular 代数である。

逆に, quiver Q (有限, connected, acyclic) に対し, $\mathbb{F}\widehat{Q}/\widehat{I}_Q$ は cellular 代数であると仮定する。すると, Lemma 4.32 より,

(*1) Q の任意の 2 つの頂点の間には，2 本以上の矢は存在しない。

次に, Q が部分 quiver として,

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] & i_2 \arrow[r] & i_3 \arrow[dr] & \\ i_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \vdots \\ & i_l \arrow[r] & i_{l-1} \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad (\text{矢の向きは acyclic になるような任意のもの})$$

を含むならば，(*1) と $\widehat{I}_Q$ の定義より，$(e_{i_1}+\cdots+e_{i_l})\mathbb{F}\widehat{Q}/\widehat{I}_Q(e_{i_1}+\cdots+e_{i_l})$ は Lemma 4.30 のものと同型になる。しかし, Lemma 4.30 より，これは cellular 代数ではなく，Lemma 4.4 (iii) より, $\mathbb{F}\widehat{Q}/\widehat{I}_Q$ も cellular 代数でないことになるので矛盾。よって,

(*2) Q の underline graph は cycle を含まない。

最後に，Q が分岐を持つ，つまり，Q が部分 quiver として,

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] & & i_3 \\ i_1 \arrow[r] & i_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & i_4 \end{tikzcd} \qquad (\text{矢の向きは任意})$$

を含むならば，(*1), (*2) と $\widehat{I}_Q$ の定義より，$(e_{i_1}+\cdots+e_{i_4})\mathbb{F}\widehat{Q}/\widehat{I}_Q(e_{i_1}+\cdots+e_{i_4})$ は Lemma 4.29 のものと同型になる。しかし, Lemma 4.29 より，これは cellular 代数ではなく，Lemma 4.4 (iii) より, $\mathbb{F}\widehat{Q}/\widehat{I}_Q$ も cellular 代数でないことになるので矛盾。よって,

(*3) Q は分岐を持たない。

(*1), (*2), (*3) より,

$$Q = 1 \text{——} 2 \text{——} \dots \text{——} k \quad (\text{矢の向きは任意}) \tag{4.33.3}$$

となる。 □

Theorem 4.2, Proposition 4.11, Proposition 4.16, Lemma 4.21, Proposition 4.28, Proposition 4.33 より以下の定理を得る。

Theorem 4.34 ([大松]). 有限表現型である対称 *cellular* 代数 は, *Brauer tree* T_S^m が直線, すなわち,

$$T_S^m = \circ \text{——} \circ \text{——} \dots \text{——} \circ \quad (\text{例外的頂点 } S \text{ 及び重複度 } m \text{ は任意})$$

であるような *Brauer tree* T_S^m に付随した *Brauer tree* 代数 $A(T_S^m)$ と森田同値である。

§ 5. Basic cellular 代数の例

Example 5.1. $m \geq 1$ とする。

$$Q = \gamma \circlearrowleft 1 \underset{\beta_1}{\overset{\alpha_1}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\beta_2}{\overset{\alpha_2}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{\beta_{n-2}}{\overset{\alpha_{n-2}}{\rightleftarrows}} n-1 \underset{\beta_{n-1}}{\overset{\alpha_{n-1}}{\rightleftarrows}} n$$

とし, I を

$$\{\alpha_i\alpha_{i+1},\, \beta_{i+1}\beta_i \,|\, 1 \leq i \leq n-2\} \cup \{\gamma\alpha_1,\, \beta_1\gamma,\, \gamma^m - \alpha_1\beta_1\} \cup \{\beta_i\alpha_i - \alpha_{i+1}\beta_{i+1} \,|\, 1 \leq i \leq n-2\}$$

によって生成される path 代数 $\mathbb{F}Q$ の両側イデアルとし, $\mathscr{A} = \mathbb{F}Q/I$ とおく。
　このとき, $\mathscr{A}$ は, 重複度 m の例外的頂点が端にある直線の Brauer tree

$$T_S^m = \text{Ⓢ} \overset{1}{\text{———}} \circ \overset{2}{\text{———}} \circ \overset{3}{\text{———}} \cdots \overset{n}{\text{———}} \circ \quad \text{or} \quad T_S^m = \circ \overset{1}{\text{———}} \circ \overset{2}{\text{———}} \circ \overset{3}{\text{———}} \cdots \overset{n}{\text{———}} \text{Ⓢ}$$

に付随した Brauer tree 代数 $\mathscr{A}(T_S^m)$ と同型である。
　$\Lambda = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ とし, Λ 上の順序関係を

$$\tau_m > \tau_{m-1} > \cdots > \tau_1 > \mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_n$$

によって定める。また,

$$\mathcal{T}(\tau_i) = \{1\}\ (1 \leq i \leq m), \quad \mathcal{T}(\mu_j) = \{1,2\}\ (1 \leq j \leq n-1), \quad \mathcal{T}(\mu_n) = \{1\}$$

とし,

$$c_{11}^{\tau_i} = \gamma^i \quad (1 \leq i \leq m), \quad \begin{bmatrix} c_{11}^{\mu_j} & c_{12}^{\mu_j} \\ c_{21}^{\mu_j} & c_{22}^{\mu_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_j & \alpha_j \\ \beta_j & \beta_j\alpha_j \end{bmatrix} \quad (1 \leq j \leq n-1), \quad c_{nn}^{\mu_n} = e_n$$

とおくと, $\{c_{ij}^{\lambda} \,|\, i,j \in \mathcal{T}(\lambda),\, \lambda \in \Lambda\}$ は $\mathscr{A}$ の cellular 基底となる。
　このとき, $\Lambda_0 = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ であり, Λ の順序通りに並べた $\mathscr{A}$ の分解行列 $\mathbf{D}$ は,

$$\mathbf{D} = \left(\begin{array}{c} \big([\Delta(\tau_{m-i+1}) : L(\mu_j)]\big)_{1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq n} \\ \hline \big([\Delta(\mu_i) : L(\mu_j)]\big)_{1 \leq i,j \leq n} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

となる。

Example 5.2. $m \geq 1$ とする。

$$Q = 1 \underset{\beta_1}{\overset{\alpha_1}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\beta_2}{\overset{\alpha_2}{\rightleftarrows}} \dots \underset{\beta_{n-2}}{\overset{\alpha_{n-2}}{\rightleftarrows}} n-1 \underset{\beta_{n-1}}{\overset{\alpha_{n-1}}{\rightleftarrows}} n$$

とし, I を

$$\{\alpha_i\alpha_{i+1},\, \beta_{i+1}\beta_i \,|\, 1 \leq i \leq n-2\} \cup \{(\beta_1\alpha_1)^m - \alpha_2\beta_2\} \cup \{\beta_i\alpha_i - \alpha_{i+1}\beta_{i+1} \,|\, 2 \leq i \leq n-2\}$$

によって生成される path 代数 $\mathbb{F}Q$ の両側イデアルとし, $\mathscr{A} = \mathbb{F}Q/I$ とおく。

このとき, $\mathscr{A}$ は, 直線の Brauer tree

$$T_S^m = \circ \overset{1}{\text{———}} \textcircled{S} \overset{2}{\text{———}} \circ \overset{3}{\text{———}} \dots \overset{n}{\text{———}} \circ$$

に付随した Brauer tree 代数 $\mathscr{A}(T_S^m)$ と同型である。

$\Lambda = \{\nu, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{m-1},\, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ とし, Λ 上の順序関係を

$$\nu > \tau_{m-1} > \tau_{m-2} > \cdots > \tau_1 > \mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_n$$

によって定める。また,

$$\mathcal{T}(\nu) = \{1\}, \quad \mathcal{T}(\tau_i) = \{1, 2\}\ (1 \leq i \leq m-1),$$
$$\mathcal{T}(\mu_j) = \{1, 2\}\ (1 \leq j \leq n-1), \quad \mathcal{T}(\mu_n) = \{1\}$$

とし,

$$c_{11}^{\nu} = (\alpha_1\beta_1)^m, \quad \begin{bmatrix} c_{11}^{\tau_i} & c_{12}^{\tau_i} \\ c_{21}^{\tau_i} & c_{22}^{\tau_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha_1\beta_1)^i & (\alpha_1\beta_1)^i\alpha_1 \\ \beta_1(\alpha_1\beta_1)^i & \beta_1(\alpha_1\beta_1)^i\alpha_1 \end{bmatrix} \quad (1 \leq i \leq m-1),$$
$$\begin{bmatrix} c_{11}^{\mu_j} & c_{12}^{\mu_j} \\ c_{21}^{\mu_j} & c_{22}^{\mu_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_j & \alpha_j \\ \beta_j & \beta_j\alpha_j \end{bmatrix} \quad (1 \leq j \leq n-1), \quad c_{nn}^{\mu_n} = e_n$$

とおくと, $\{c_{ij}^{\lambda} \,|\, i, j \in \mathcal{T}(\lambda),\, \lambda \in \Lambda\}$ は $\mathscr{A}$ の cellular 基底となる。

このとき, $\Lambda_0 = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ であり, Λ の順序通りに並べた $\mathscr{A}$ の分解行列 $\mathbf{D}$ は,

$$\mathbf{D} = \left(\begin{array}{c} \big([\Delta(\nu) : L(\mu_j)]\big)_{1 \leq j \leq n} \\ \hline \big([\Delta(\tau_{m-i}) : L(\mu_j)]\big)_{1 \leq i \leq m-1,\, 1 \leq j \leq n} \\ \hline \big([\Delta(\mu_i) : L(\mu_j)]\big)_{1 \leq i, j \leq n} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

となる。

Example 5.3. $m \geq 1,\ 2 < k < n$ とする。

$$Q = 1 \underset{\beta_1}{\overset{\alpha_1}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\beta_2}{\overset{\alpha_2}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{\beta_{k-1}}{\overset{\alpha_{k-1}}{\rightleftarrows}} k \underset{\beta_k}{\overset{\alpha_k}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{\beta_{n-2}}{\overset{\alpha_{n-2}}{\rightleftarrows}} n-1 \underset{\beta_{n-1}}{\overset{\alpha_{n-1}}{\rightleftarrows}} n$$

とし, I を

$$\begin{aligned}
&\{\alpha_i\alpha_{i+1},\ \beta_{i+1}\beta_i \,|\, 1 \leq i \leq n-2\} \cup \{\beta_{k-2}\alpha_{k-2} - (\alpha_{k-1}\beta_{k-1})^m,\ (\beta_{k-1}\alpha_{k-1})^m - \alpha_k\beta_k\} \\
&\cup \{\beta_i\alpha_i - \alpha_{i+1}\beta_{i+1} \,|\, 1 \leq i \leq k-3\} \cup \{\beta_i\alpha_i - \alpha_{i+1}\beta_{i+1} \,|\, k \leq i \leq n-2\}
\end{aligned}$$

によって生成される path 代数 $\mathbb{F}Q$ の両側イデアルとし, $\mathscr{A} = \mathbb{F}Q/I$ とおく。

このとき, $\mathscr{A}$ は, 直線の Brauer tree

$$T_S^m = \ \circ \overset{1}{\rule{2em}{0.4pt}} \circ \overset{2}{\rule{2em}{0.4pt}} \cdots \overset{k-1}{\rule{2em}{0.4pt}} S \overset{k}{\rule{2em}{0.4pt}} \cdots \overset{n}{\rule{2em}{0.4pt}} \circ$$

に付随した Brauer tree 代数 $\mathscr{A}(T_S^m)$ と同型である。

$\Lambda = \{\nu, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{m-1}, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$ とし, Λ 上の順序関係を

$$\nu > \mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_{k-2} > \tau_{m-1} > \tau_{m-2} > \cdots > \tau_1 > \mu_{k-1} > \mu_k > \cdots > \mu_n$$

によって定める。また,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}(\nu) = \{1\}, \quad \mathcal{T}(\tau_i) = \{1,2\} \quad (1 \leq i \leq m-1), \\
&\mathcal{T}(\mu_j) = \{1,2\} \quad (1 \leq j \leq n-1), \quad \mathcal{T}(\mu_n) = \{1\}
\end{aligned}$$

とし,

$$\begin{aligned}
&c_{11}^{\nu} = \alpha_1\beta_1, \\
&\begin{bmatrix} c_{11}^{\tau_j} & c_{12}^{\tau_j} \\ c_{21}^{\tau_j} & c_{22}^{\tau_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha_{k-1}\beta_{k-1})^j & (\alpha_{k-1}\beta_{k-1})^j\alpha_{k-1} \\ \beta_{k-1}(\alpha_{k-1}\beta_{k-1})^j & \beta_{k-1}(\alpha_{k-1}\beta_{k-1})^j\alpha_{k-1} \end{bmatrix} \quad (1 \leq i \leq m-1), \\
&\begin{bmatrix} c_{11}^{\mu_i} & c_{12}^{\mu_i} \\ c_{21}^{\mu_i} & c_{22}^{\mu_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_i & \alpha_i \\ \beta_i & \beta_i\alpha_i \end{bmatrix} \quad (1 \leq j \leq n-1), \\
&c_{11}^{\mu_n} = e_n
\end{aligned}$$

とおくと, $\{c_{ij}^{\lambda} \,|\, i,j \in \mathcal{T}(\lambda),\ \lambda \in \Lambda\}$ は $\mathscr{A}$ の cellular 基底となる。

このとき, $\Lambda_0 = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$ であり, Λ の順序通りに並べた $\mathscr{A}$ の分解行列 $\mathbf{D}$ は,

$$\mathbf{D} = \left(\begin{array}{c} \big([\Delta(\nu) : L(\mu_j)]\big)_{1\le j\le n} \\ \hline \big([\Delta(\mu_i) : L(\mu_j)]\big)_{1\le i\le k-2,\,1\le j\le n} \\ \hline \big([\Delta(\tau_{m-i}) : L(\mu_j)]\big)_{1\le i\le m-1,\,1\le j\le n} \\ \hline \big([\Delta(\mu_i) : L(\mu_j)]\big)_{k-1\le i\le m-1,\,1\le j\le n} \end{array}\right)$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} & & k-2 & k-1 & k & & & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{lcccccccr} \hline 10\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots 0 \\ \hline 110\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots 0 \\ 0110\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots 0 \\ \quad\ddots & & & & & & & & \\ 0\ldots & \ldots 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots 0 \\ \hline 0\ldots & \ldots & 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0\ldots & \ldots & 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots 0 \\ \hline 0\ldots & \ldots & 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots 0 \\ 0\ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & \ldots 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ 0\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots 0110 \\ 0\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots 011 \\ 0\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots 01 \end{array}\right) \end{array}$$

となる。

Appendix A. Quasi-hereditary 代数

この節では, $\mathscr{A}$ は体 $\mathbb{F}$ 上の有限次元代数とする。quasi-hereditary 代数の定義を述べる前に, いくつか一般の有限次元代数に対して成り立つことを復習しておこう。

($x \in \mathscr{A}$ に対し, $\mathscr{A}x\mathscr{A}$ は x で生成される $\mathscr{A}$ の両側イデアル (i.e. $\mathscr{A}x\mathscr{A} = \{\sum_i a_i x b_i \,|\, a_i, b_i \in \mathscr{A}\}$) であったことを思い出しておこう。一般に $\mathscr{A}x\mathscr{A} \neq \{axb \,|\, a, b \in \mathscr{A}\}$ に注意。)

Lemma A.1. $\mathscr{A}$ の両側イデアル $\mathcal{J}$ に対し, 以下のことが成り立つ。

(i) $\mathcal{J}^2 = \mathcal{J} \Leftrightarrow$ あるベキ等元 $e \in \mathscr{A}$ が存在して $\mathcal{J} = \mathscr{A}e\mathscr{A}$ となる。
*($\mathcal{J}^2 = \mathcal{J}$ となる両側イデアル $\mathcal{J}$ を **idempotent ideal** という。)*

(ii) あるベキ等元 $e \in \mathscr{A}$ に対し, $\mathcal{J} = \mathscr{A}e\mathscr{A}$ であるとき,

$$e\mathscr{A}e \text{ は半単純環である} \Leftrightarrow \mathcal{J}(\operatorname{rad}\mathscr{A})\mathcal{J} = 0$$

が成り立つ。

(iii) $\mathcal{J}$ が左射影 $\mathscr{A}$-加群であるとき,

$$\mathcal{J}^2 = \mathcal{J} \Leftrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathcal{J}, (\mathscr{A}/\mathcal{J})) = 0$$

が成り立つ。

(iv) $\mathcal{J}$ は左射影 $\mathscr{A}$-加群であり, あるベキ等元 $e \in \mathscr{A}$ に対し $\mathcal{J} = \mathscr{A}e\mathscr{A}$ であるとき, 積写像

$$\mu : \mathscr{A}e \otimes_{e\mathscr{A}e} e\mathscr{A} \to \mathscr{A}e\mathscr{A}, \quad ae \otimes eb \mapsto aeb \quad (a, b, \in \mathscr{A})$$

は $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群の同型写像である。

さらに, $e\mathscr{A}e$ が半単純環であるならば, $\mathcal{J}$ は右 $\mathscr{A}$-加群としても射影的である。

Proof. (i). "$\Leftarrow$" を示す。$e \in \mathscr{A}$ をベキ等元とし, $\mathcal{J} = \mathscr{A}e\mathscr{A}$ とおく。$\mathcal{J}^2 \subset \mathcal{J}$ は明らか。一方で,

$$\mathcal{J} = \mathscr{A}e\mathscr{A} \subset \mathscr{A}(e\mathscr{A}\mathscr{A}e)\mathscr{A} \subset \mathcal{J}^2$$

となるので, $\mathcal{J} = \mathcal{J}^2$ である。

"$\Rightarrow$" を示す。$\operatorname{rad}\mathscr{A}$ を $\mathscr{A}$ の Jacobson 根基とする。$\overline{\mathscr{A}} := \mathscr{A}/\operatorname{rad}\mathscr{A}$ とおき,

$$\overline{\mathcal{J}} := \mathcal{J} + \operatorname{rad}\mathscr{A} \subset \overline{\mathscr{A}}$$

とおく。明らかに $\overline{\mathcal{J}}$ は $\overline{\mathscr{A}}$ の両側イデアルであり, $\overline{\mathcal{J}}^2 = \overline{\mathcal{J}}$ である。$\overline{\mathscr{A}}$ は半単純であるので，有限個の単純環の直積と同型である。よって, $\overline{\mathscr{A}}$ の両側イデアルはいくつかの単純成分の直積と同型であり，それは, 両側イデアルに現れる単純成分の単位元の和によって

生成される。よって, あるベキ等元 $\overline{e} \in \overline{\mathscr{A}}$ が存在して,

$$\overline{\mathcal{J}} = \overline{\mathscr{A}}\,\overline{e}\,\overline{\mathscr{A}}$$

となる。$\operatorname{rad}\mathscr{A}$ は $\mathscr{A}$ のベキ零イデアルであるので, $\overline{\mathscr{A}}$ のベキ等元 $\overline{e}$ は $\mathscr{A}$ のベキ等元に持ち上がる。そこで, $e \in \mathscr{A}$ を $e + \operatorname{rad}\mathscr{A} = \overline{e}$ となる $\mathscr{A}$ のベキ等元とする。$\mathscr{A}\overline{e}\mathscr{A} = \overline{\mathcal{J}} = \mathcal{J} + \operatorname{rad}\mathscr{A}$ であることに注意すれば,

$$\mathscr{A}e\mathscr{A} + \operatorname{rad}\mathscr{A} = \mathscr{A}(e + \operatorname{rad}\mathscr{A})\mathscr{A} = \mathcal{J} + \operatorname{rad}\mathscr{A} \tag{A.1.1}$$

である。上の議論より, $(\mathscr{A}e\mathscr{A})^2 = \mathscr{A}e\mathscr{A}$ であることと, 仮定より, $\mathcal{J}^2 = \mathcal{J}$ であることに注意すれば, 帰納的に考えることによって, 任意の $i \geq 1$ に対し,

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}e\mathscr{A} + \operatorname{rad}\mathscr{A})^i &= \mathscr{A}e\mathscr{A} + \operatorname{rad}^i\mathscr{A},\\ (\mathcal{J} + \operatorname{rad}\mathscr{A})^i &= \mathcal{J} + \operatorname{rad}^i\mathscr{A}\end{aligned}$$

となる (ここで考えているベキ乗は, 両側イデアルのベキ乗であることに注意)。(A.1.1) と合わせて,

$$\mathscr{A}e\mathscr{A} + \operatorname{rad}^i\mathscr{A} = \mathcal{J} + \operatorname{rad}^i\mathscr{A} \quad (i \geq 1)$$

を得るが, いま $\operatorname{rad}\mathscr{A}$ はベキ零イデアルなので, 十分大きい i に対しては, $\operatorname{rad}^i\mathscr{A} = 0$ となる。よって, $\mathscr{A}e\mathscr{A} = \mathcal{J}$ を得る。

(ii). あるベキ等元 $e \in \mathscr{A}$ に対し, $\mathcal{J} = \mathscr{A}e\mathscr{A}$ であるとき,

$$\mathcal{J}(\operatorname{rad}\mathscr{A})\mathcal{J} = \mathscr{A}e\mathscr{A}(\operatorname{rad}\mathscr{A})\mathscr{A}e\mathscr{A} = \mathscr{A}e(\operatorname{rad}\mathscr{A})e\mathscr{A} = \mathscr{A}(\operatorname{rad} e\mathscr{A}e)\mathscr{A}$$

であるので,

$$e\mathscr{A}e : \text{半単純環} \Leftrightarrow \operatorname{rad} e\mathscr{A}e = 0 \Leftrightarrow \mathcal{J}(\operatorname{rad}\mathscr{A})\mathcal{J} = 0$$

を得る。

(iii). "$\Rightarrow$" を示す。$\mathcal{J}^2 = \mathcal{J}$ とすると, $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathcal{J}, (\mathscr{A}/\mathcal{J}))$ に対し,

$$\varphi(\mathcal{J}) = \varphi(\mathcal{J}^2) \subset \mathcal{J}(\mathscr{A}/\mathcal{J}) = 0$$

なので, $\varphi = 0$ を得る。

"$\Leftarrow$" を示す。$\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathcal{J}, (\mathscr{A}/\mathcal{J})) = 0$ であるとする。もし, $\mathcal{J}^2 \subsetneqq \mathcal{J}$ ならば, 左 $\mathscr{A}$-加群 $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ は, $\mathcal{J} \cdot (\mathcal{J}/\mathcal{J}^2) = 0$ なので, 有限生成 $\mathscr{A}/\mathcal{J}$-加群とみなせる。よって，ある自

然数 $d > 0$ が存在して, $\mathscr{A}/\mathcal{J}$-加群の全射準同型

$$\varphi : (\mathscr{A}/\mathcal{J})^{\oplus d} \to \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$$

が存在する。これを, 自然な全射 $\mathscr{A} \to \mathscr{A}/\mathcal{J}$ を通じて $\mathscr{A}$-加群の全射準同型と思う。

一方で, $\mathscr{A}$-加群の自然な全射準同型 $\psi : \mathcal{J} \to \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ を考えると, $\mathcal{J}$ が射影 $\mathscr{A}$-加群であることから,

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{A}/\mathcal{J})^{\oplus d} \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \arrow[r] & 0 \\
\mathcal{J} \arrow[u, "\eta"] \arrow[ur, "\psi"'] & &
\end{tikzcd}$$

が可換となるような $\eta : \mathcal{J} \to (\mathscr{A}/\mathcal{J})^{\oplus d}$ が存在する。$p_k : (\mathscr{A}/\mathcal{J})^{\oplus d} \to \mathscr{A}/\mathcal{J}$ $(1 \leq k \leq d)$ を k 番目の直和因子への射影とすると, ある k に対し, $p_k \circ \eta \neq 0$ とならなくてはいけないが, $p_k \circ \eta \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathcal{J}, (\mathscr{A}/\mathcal{J}))$ なので, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathcal{J}, (\mathscr{A}/\mathcal{J})) = 0$ に矛盾する。よって, $\mathcal{J}^2 = \mathcal{J}$ を得る。

(iv). 積写像 μ が $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群の準同型であることは明らか。

左 $\mathscr{A}$-加群 M に対し, 積写像

$$\mu_M : \mathscr{A}e \otimes_{e\mathscr{A}e} e\mathscr{A} \otimes_{\mathscr{A}} M \to M, \quad ae \otimes eb \otimes m \mapsto (aeb) \cdot m \quad (a, b, \in \mathscr{A}, \, m \in M)$$

を考えると, μ_M は左 $\mathscr{A}$-加群の準同型となる。

$M = \mathscr{A}e$ のとき,

$$\nu : \mathscr{A}e \to \mathscr{A}e \otimes_{e\mathscr{A}e} e\mathscr{A} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{A}e, \quad ae \mapsto ae \otimes e \otimes e \quad (a \in \mathscr{A})$$

は左 $\mathscr{A}$-加群の準同型であり, さらに, $\mu_{\mathscr{A}e}$ の逆写像となるので, $\mu_{\mathscr{A}e}$ は同型写像である。よって, μ_M の定義より, M が $\mathscr{A}e$ のいくつかのコピーの直和の直和因子であるとき, μ_M は同型写像となる。

$\mathcal{J} = \mathscr{A}e\mathscr{A}$ に対し, ある $\mathscr{A}$ の有限部分集合 X が存在して, $\mathcal{J} = \sum_{x \in X} \mathscr{A}ex$ となるので, 左 $\mathscr{A}$-加群の全射準同型 $(\mathscr{A}e)^{\oplus d} \to \mathcal{J}$ $(d = |X|)$ を得るが, $\mathcal{J}$ は射影加群なので, この全射は分裂する。よって, $\mathcal{J}$ は $(\mathscr{A})^{\oplus d}$ の直和因子となるので, $\mu_{\mathcal{J}}$ は同型写像である。また,

$$\varphi : e\mathscr{A} \to e\mathscr{A} \otimes_{\mathscr{A}} \mathcal{J}, \quad ea \mapsto e \otimes ea \quad (a \in \mathscr{A}),$$
$$\psi : e\mathscr{A} \otimes_{\mathscr{A}} \mathcal{J} \to e\mathscr{A}, \quad ea \otimes bec \mapsto eabec \quad (a, b, c \in \mathscr{A})$$

はともに, $(e\mathscr{A}e, \mathscr{A})$-両側加群の準同型であり，互いに逆写像を与えるので, φ は同型写像である。よって,

$$\mathscr{A}e \otimes_{e\mathscr{A}e} e\mathscr{A} \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes\varphi} \mathscr{A}e \otimes_{e\mathscr{A}e} e\mathscr{A} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{J} \xrightarrow{\mu_{\mathscr{J}}} \mathscr{J}$$

は同型写像となるが, 定義より $\mu = \mu_{\mathscr{J}} \circ (\mathrm{Id}\otimes\varphi)$ であるので, μ は同型である。

最後に, $e\mathscr{A}e$ が半単純環であると仮定すると, $\mathscr{A}e$ は右 $e\mathscr{A}e$-加群として $e\mathscr{A}e$ のいくつかのコピーの直和の直和因子である。一方で, 右 $\mathscr{A}$-加群として, $e\mathscr{A}e \otimes_{e\mathscr{A}e} e\mathscr{A} \cong e\mathscr{A}$ であるので, $e\mathscr{A}e \otimes_{e\mathscr{A}e} e\mathscr{A}$ は右射影 $\mathscr{A}$-加群であり, $\mathscr{A}e$ が 右 $e\mathscr{A}e$-加群として $e\mathscr{A}e$ のいくつかのコピーの直和の直和因子であることより, $\mathscr{J} = \mathscr{A}e\mathscr{A} \cong \mathscr{A}e \otimes_{e\mathscr{A}e} e\mathscr{A}$ は, 右 $\mathscr{A}$-加群として射影的である。 □

Definition A.2. $\mathscr{A}$ の両側イデアル $\mathscr{J}$ が以下の条件 (i)-(iii) を満たすとき, $\mathscr{J}$ を $\mathscr{A}$ の ***heredity* イデアル** という。

(i) $\mathscr{J}$ は左 $\mathscr{A}$-加群として射影的である。
(ii) $\mathscr{J}^2 = \mathscr{J}$ である。
(iii) $\mathscr{J}(\mathrm{rad}\,\mathscr{A})\mathscr{J} = 0$ である。

$\mathscr{A}$ の両側イデアルの列

$$\mathscr{A} = \mathscr{J}_1 \supset \mathscr{J}_2 \supset \cdots \supset \mathscr{J}_m \supset \mathscr{J}_{m+1} = 0$$

で, 各 i に対し, $\mathscr{J}_i/\mathscr{J}_{i+1}$ が $\mathscr{A}/\mathscr{J}_{i+1}$ の *heredity* イデアルとなっているものが存在するとき, この列を ***heredity chain*** といい, $\mathscr{A}$ は ***quasi-hereditary* 代数** であるという。

A.3. $\mathscr{A}$ を quasi-hereditary 代数とし,

$$\mathscr{A} = \mathscr{J}_1 \supset \mathscr{J}_2 \supset \cdots \supset \mathscr{J}_m \supset \mathscr{J}_{m+1} = 0$$

を $\mathscr{A}$ の heredity chain とする。

各 i に対し, $\mathscr{J}_i/\mathscr{J}_{i+1}$ は $\mathscr{A}/\mathscr{J}_{i+1}$ の heredity イデアルなので, 特に, $\mathscr{J}_i/\mathscr{J}_{i+1}$ は 左 $\mathscr{A}/\mathscr{J}_{i+1}$-加群として射影的である。そこで, $\mathscr{J}_i/\mathscr{J}_{i+1}$ の直和因子である直既約射影 $\mathscr{A}/\mathscr{J}_{i+1}$-加群の同型類の完全代表系 (その添え字集合を Λ_i とおく) を

$$\{\Delta(\lambda) \,|\, \lambda \in \Lambda_i\}$$

とおく。ここで, $\Delta(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda_i)$ は $\mathscr{J}_i/\mathscr{J}_{i+1}$ の直和因子である直既約射影加群であって, 全ての 直既約 $\mathscr{A}/\mathscr{J}_{i+1}$-加群を与えるわけではないことに注意しよう。また,

$$L(\lambda) := \mathrm{Top}\,\Delta(\lambda) \quad (\lambda \in \Lambda_i)$$

とおく。定義より, $\lambda, \mu \in \Lambda_i$ に対し, $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$-加群として,

$$L(\lambda) \ncong L(\mu) \text{ if } \lambda \neq \mu \tag{A.3.1}$$

である。また, 定義より, $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$-加群として,

$$\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1} \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_i} \Delta(\lambda)^{\oplus d_\lambda} \quad (d_\lambda > 0), \quad \mathrm{Top}(\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_i} L(\lambda)^{\oplus d_\lambda} \tag{A.3.2}$$

となる。自然な全射 $\mathscr{A} \to \mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$ を通じて $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$-加群 $\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$, $\Delta(\lambda)$, $L(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda_i)$ を $\mathscr{A}$-加群と思う。また,

$$\Lambda := \bigsqcup_{i=1}^{m} \Lambda_i$$

とおき, Λ 上に半順序を, $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し,

$$\lambda > \mu \Leftrightarrow \lambda \in \Lambda_i,\ \mu \in \Lambda_j \text{ s.t. } i > j$$

によって定める。

$\lambda \in \Lambda_i$ に対し, $\Delta(\lambda) \subset \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$ であったので, $j > i$ に対し, $\mathcal{J}_j \cdot \mathcal{J}_i \subset \mathcal{J}_j \subset \mathcal{J}_{i+1}$ より,

$$\mathcal{J}_j \cdot \Delta(\lambda) = 0 \quad (\lambda \in \Lambda_i,\ j > i) \tag{A.3.3}$$

を得る。また, $\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$ は $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$ の heredity イデアルなので,

$$\mathcal{J}_i \cdot \mathrm{rad}\,\Delta(\lambda) \subset \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}\,\mathrm{rad}(\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}) = \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}\,\mathrm{rad}(\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1})\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1} = 0$$

となる。よって,

$$\mathcal{J}_i \cdot \mathrm{rad}\,\Delta(\lambda) = 0 \quad (\lambda \in \Lambda_i) \tag{A.3.4}$$

を得る。また, $\Delta(\lambda)$ は $\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$ の直和因子である直既約 $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$-加群なので, ある $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$ の原始ベキ等元 f が存在して $\Delta(\lambda) = (\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1})f$ となる。このとき, $L(\lambda) := \Delta(\lambda)/\,\mathrm{rad}\,\Delta(\lambda)$ における f の像を $\overline{f}$ とすると, 明らかに $\overline{f} \neq 0$ であり, $f \cdot \overline{f} = \overline{f^2} = \overline{f}$ である。いま, $f \in \Delta(\lambda) \subset \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$ であるので, $\widetilde{f} \in \mathcal{J}_i$ で, $\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$ における像が $\overline{f}$ となるものが存在し, $\widetilde{f} \cdot \overline{f} = f \cdot \overline{f} \neq 0$ となるので,

$$\mathcal{J}_i \cdot L(\lambda) \neq 0 \quad (\lambda \in \Lambda_i) \tag{A.3.5}$$

を得る。以上の準備のもとで, 以下の Theorem を得る。

Theorem A.4 ([CPS1, Lemma 3.4]). $\mathscr{A}$ を *quasi-hereditary* 代数とし,

$$\mathscr{A} = \mathscr{J}_1 \supset \mathscr{J}_2 \supset \cdots \supset \mathscr{J}_m \supset \mathscr{J}_{m+1} = 0 \tag{A.4.1}$$

を $\mathscr{A}$ の *heredity chain* とする。このとき, 以下のことが成り立つ。

(i) $\lambda, \mu \in \Lambda$ $(\lambda \neq \mu)$ に対し, $\mathscr{A}$-加群として,

$$L(\lambda) \ncong L(\mu).$$

(ii) $\{L(\lambda) \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ は既約 $\mathscr{A}$-加群の同型類の完全代表系を与える。

(iii) $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し,

$$\mathrm{Top}\,\Delta(\lambda) = L(\lambda) \text{ かつ } [\mathrm{rad}\,\Delta(\lambda) : L(\mu)] \neq 0 \Rightarrow \lambda > \mu.$$

(iv) $\lambda \in \Lambda$ に対し, $P(\lambda)$ を $L(\lambda)$ の射影被覆とする。このとき, $P(\lambda)$ の部分加群の列

$$P(\lambda) \supset K(\lambda) = M_1 \supset M_2 \supset \ldots M_k \supset M_{k+1} = 0$$

で,

$$P(\lambda)/K(\lambda) \cong \Delta(\lambda), \quad M_i/M_{i+1} \cong \Delta(\mu_i) \ s.t.\ \mu_i > \lambda \quad (1 \leq i \leq k)$$

を満たすものが存在する。

Proof. (i). $\lambda \in \Lambda_i$, $\mu \in \Lambda_j$ とすると, (A.3.5) より,

$$\mathscr{J}_i \cdot L(\lambda) \neq 0, \quad \mathscr{J}_j \cdot L(\mu) \neq 0$$

である。一方で, (A.3.3) より,

$$\mathscr{J}_j \cdot L(\lambda) \neq 0 \Rightarrow j \leq i, \quad \mathscr{J}_i \cdot L(\mu) \neq 0 \Rightarrow i \leq j$$

である。よって, $L(\lambda) \cong L(\mu)$ ならば $i = j$ を得る。さらに, $\lambda, \mu \in \Lambda_i$ かつ $\lambda \neq \mu$ のとき, $L(\lambda) \ncong L(\mu)$ であることは (A.3.1) より従う。

(ii). L を既約 $\mathscr{A}$-加群とし, $L \ni x \neq 0$ を取ると, $\mathscr{A}$-加群の全射準同型

$$\varphi : \mathscr{A} \to L, \quad a \mapsto a \cdot x$$

が存在する。このとき, $\mathscr{A} = \mathscr{J}_1$ と $\mathscr{J}_{m+1} = 0$ に注意すれば, ある i に対し,

$$\mathscr{J}_i \cdot L \neq 0 \text{ かつ } \mathscr{J}_{i+1} \cdot L = 0$$

となる。このとき, $\mathcal{J}_{i+1} \cdot L = 0$ より, φ は $\mathscr{A}$-加群の準同型

$$\overline{\varphi} : \mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1} \to L, \quad \overline{a} \mapsto \overline{a} \cdot x = a \cdot x \quad (ここで, \overline{a} = a + \mathcal{J}_{i+1} \in \mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1})$$

を誘導する。$\overline{\varphi}$ を $\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$ に制限すると, $\mathscr{A}$-加群の準同型

$$\overline{\varphi}_i : \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1} \to L, \quad \overline{a} \mapsto \overline{a} \cdot x = a \cdot x \quad (ここで, \overline{a} = a + \mathcal{J}_{i+1} \in \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1})$$

を得るが, $\mathcal{J}_i \cdot L \neq 0$ であったので, $\overline{\varphi}_i \neq 0$ である。(全ての $a \in \mathcal{J}_i$ に対し, $a \cdot x = 0$ とすると, 任意の $b \in \mathscr{A}$ に対し, $a \cdot (bx) = ab \cdot x = 0$ ($ab \in \mathcal{J}_i$ に注意) となり, $\mathcal{J}_i \cdot L = 0$ となってしまう。) よって, L が既約であることより, $\overline{\varphi}_i$ は全射となるので, (A.3.2) より, ある $\lambda \in \Lambda_i$ に対し, $L \cong L(\lambda)$ となる。

(iii). $\operatorname{Top} \Delta(\lambda) = L(\lambda)$ は定義である。

$\lambda \in \Lambda_i$ とする。L を $\operatorname{rad} \Delta(\lambda)$ の組成因子とすると, (ii) の議論によって, ある $\mu \in \Lambda_j$ に対し, $L \cong L(\mu)$ となり, このとき,

$$\mathcal{J}_j \cdot L \neq 0 \text{ かつ } \mathcal{J}_{j+1} \cdot L = 0$$

となる。一方で, $\lambda \in \Lambda_i$ なので, (A.3.4) より,

$$\mathcal{J}_i \cdot \operatorname{rad} \Delta(\lambda) = 0 \quad (\text{よって } \mathcal{J}_i \cdot L = 0)$$

となるので, $i > j$ を得る。よって, Λ 上の半順序の定義より, $\lambda > \mu$ を得る。

(iv). $\lambda \in \Lambda_i$ とする。$P(\lambda)$ が射影 $\mathscr{A}$-加群であることに注意して, $\mathscr{A}$ の heredity chain (A.4.1) に完全関手 $- \otimes_{\mathscr{A}} P(\lambda)$ を施すと, $P(\lambda)$ の $\mathscr{A}$-部分加群の列

$$P(\lambda) = N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_m \supset N_{m+1} = 0 \text{ s.t. } N_j/N_{j+1} \cong (\mathcal{J}_j/\mathcal{J}_{j+1}) \otimes_{\mathscr{A}} P(\lambda)$$

を得る (ここで $N_j := \mathcal{J}_j \otimes_{\mathscr{A}} P(\lambda)$ である)。左 $\mathscr{A}$-加群として, $(\mathcal{J}_j/\mathcal{J}_{j+1}) \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{A} \cong \mathcal{J}_j/\mathcal{J}_{j+1}$ であり, $P(\lambda)$ は $\mathscr{A}$ の直和因子であるので, 左 $\mathscr{A}$-加群として,

$$(\mathcal{J}_j/\mathcal{J}_{j+1}) \otimes_{\mathscr{A}} P(\lambda) \text{ は } \mathcal{J}_j/\mathcal{J}_{j+1} \text{ の直和因子}$$

である。一方で, (A.3.2) より, 左 $\mathscr{A}$-加群として, $\mathcal{J}_j/\mathcal{J}_{j+1} \cong \bigoplus_{\mu \in \Lambda_j} \Delta(\mu)^{\oplus d_\mu}$ であり, 各 $\Delta(\mu)$ は直既約加群であるので, 左 $\mathscr{A}$-加群として,

$$N_j/N_{j+1} \cong (\mathcal{J}_j/\mathcal{J}_{j+1}) \otimes_{\mathscr{A}} P(\lambda) \cong \bigoplus_{\mu \in \Lambda_j} \Delta(\mu)^{\oplus d'_\mu} \quad (0 \leq d'_\mu \leq d_\mu) \tag{A.4.2}$$

となる。i' を $N_j/N_{j+1} \neq 0$ となる j の中で最小のものとする。このとき,

$$P(\lambda) = N_1 = N_2 = \cdots = N_{i'} \supsetneq N_{i'+1} \supset \cdots \supset N_m \supset N_{m+1} = 0$$

となり, (A.4.2) より,

$$P(\lambda)/N_{i'+1} = N_{i'}/N_{i'+1} \cong \bigoplus_{\mu \in \Lambda_{i'}} \Delta(\mu)^{\oplus d'_\mu} \quad (d'_\mu \neq 0 \text{ for some } \mu \in \Lambda_{i'})$$

となるので, $\bigoplus_{\mu \in \Lambda_{i'}} L(\mu)^{\oplus d'_\mu}$ は $\mathrm{Top}\, P(\lambda)$ の直和因子となるが, $P(\lambda)$ は $L(\lambda)$ の射影被覆であるので, $\mathrm{Top}\, P(\lambda) = L(\lambda)$ である。よって, $i' = i$ であり, $N_i/N_{i+1} \cong \Delta(\lambda)$ となる。以上より, $P(\lambda) = N_i$ であり, $K(\lambda) := N_{i+1}$ とおくと,

$$P(\lambda) \supset K(\lambda) = N_{i+1} \supset N_{i+2} \supset \dots N_m \supset N_{m+1} = 0$$

であり,

$$P(\lambda)/K(\lambda) \cong \Delta(\lambda), \quad N_{i+j}/N_{i+j+1} \cong \bigoplus_{\mu \in \Lambda_{i+j}} \Delta(\mu)^{\oplus d'_\mu} \quad (1 \leq j \leq m - i)$$

となるので, $K(\lambda)$ の部分加群の列 $K(\lambda) = N_{i+1} \supset N_{i+2} \supset \dots N_m \supset N_{m+1} = 0$ を適当に細分化すれば, (iv) を得る。 $\square$

Remark A.5. Theorem A.4 より, $\mathscr{A}$ が quasi-hereditary 代数であるならば, $\mathscr{A}$ -mod は最高ウェイト加群となる。逆に, $\mathscr{A}$ -mod が最高ウェイト加群となるならば, $\mathscr{A}$ が quasi-hereditary 代数となることも知られている ([CPS1, Theorem 3.6])。

quasi-hereditary 代数 $\mathscr{A}$ の heredity イデアルに対し, 以下のことが成り立つ。

Proposition A.6 (cf. [UY, Lemma 1.2, Proposition 1.3])**.** $\mathscr{A}$ は *quasi-hereditary* 代数であるとする。また, $\mathcal{J} = \mathscr{A} e \mathscr{A}$ ($e \in \mathscr{A}$ はベキ等元) を $\mathscr{A}$ の *heredity ideal* とする。$e = e_1 + \cdots + e_n$ を互いに直交する原始ベキ等元への分解とする。また, $\{e_i \,|\, i \in I\}$ を $\{e_i \,|\, 1 \leq i \leq n\}$ 上の同値関係 (e_i と e_j が同値 $\Leftrightarrow \mathscr{A} e_i \cong \mathscr{A} e_j$) における完全代表系とする。さらに,

$$\mathcal{J}_{(i)} := \mathscr{A} e_i \mathscr{A} \quad (1 \leq i \leq n)$$

とおく。このとき, 以下のことが成り立つ。

(i) $\mathcal{J}$ は左 $\mathscr{A}$-加群として,

$$\mathcal{J} \cong \bigoplus_{j \in I} (\mathscr{A} e_j)^{\oplus d_j} \quad (d_j > 0)$$

となる。

(ii) 各 $i = 1, \ldots, n$ に対し,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}e_i, \mathrm{rad}(\mathscr{A}e_i)) = 0.$$

(iii) $1 \leq i, j \leq n$ に対し,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}e_i, \mathscr{A}e_j) = 0 \text{ } \mathit{if} \text{ } \mathscr{A}e_i \ncong \mathscr{A}e_j$$

(iv) 各 $i = 1, \ldots, n$ に対し,

$$\mathcal{J}_{(i)}(\mathrm{rad}\,\mathscr{A})\mathcal{J}_{(i)} = 0.$$

(v) 各 $i \in I$ に対し, $\mathcal{J}_{(i)}$ は左 $\mathscr{A}$-加群として射影的である。さらに, 左 $\mathscr{A}$-加群として,

$$\mathcal{J}_{(i)} \cong (\mathscr{A}e_i)^{\oplus d_i}$$

となる。ここで d_i は (i) における $\mathcal{J}$ の直和因子として現れる $\mathscr{A}e_i$ の重複度である。

(vi) $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群として,

$$\mathcal{J} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{J}_{(i)}$$

となる。

(vii) $\widetilde{e} = \sum_{i \in I} e_i$ とおけば,

$$\mathcal{J} = \mathscr{A}\widetilde{e}\mathscr{A}$$

となる。特に, $\mathscr{A}$ の *heredity* イデアルは, $\mathscr{A}$ の両側イデアルとして, *basic* であるベキ等元によって生成される。

(viii) $\mathcal{J}_{(i)} := \mathscr{A}e_i\mathscr{A}$ $(i \in I)$ は $\mathscr{A}$ の *heredity* イデアルである。また, $\mathcal{J}/\mathcal{J}_{(i)}$ は $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{(i)}$ の *heredity* イデアルである。

Proof. (i). $\mathcal{J}$ は有限次元なので, $\mathcal{J} = \mathscr{A}e\mathscr{A}$ より, ある $\mathscr{A}$ の有限部分集合 X が存在して, $\mathcal{J} = \sum_{x \in X} \mathscr{A}ex$ となる (i.e. 左 $\mathscr{A}$-加群として $\mathcal{J}$ は $\{ex \mid x \in X\}$ によって生成される)。そこで, $x \in X$ に対し, 左 $\mathscr{A}$-加群の準同型

$$\varphi_x : \mathscr{A}e \to \mathcal{J} \text{ s.t. } \varphi_x(e) = ex$$

を考えると, 左 $\mathscr{A}$-加群の全射準同型写像

$$\bigoplus_{x \in X} \varphi_x : (\mathscr{A}e)^{\oplus |X|} \to \mathcal{J}$$

を得るが, $\mathcal{J}$ が射影加群であることから, この全射準同型は分裂する。よって, $\mathcal{J}$ は $(\mathscr{A}e)^{\oplus|X|}$ の直和因子となる。各 $j = 1, \ldots, k$ に対し, 左 $\mathscr{A}$-加群として, $\mathscr{A}e_j \subset \mathscr{A}e \subset \mathscr{A}e\mathscr{A} = \mathcal{J}$ であるので,

$$\mathcal{J} \cong \bigoplus_{j \in I} (\mathscr{A}e_j)^{\oplus d_j} \quad (d_j > 0)$$

となる。

(ii) と (iii). $\mathscr{A}$ が quasi-hereditary 代数で, $\mathcal{J}$ が $\mathscr{A}$ の heredity ideal であることから, (i) より, 各 i に対し, $\mathscr{A}e_i \cong \Delta(\lambda_i)$ (よって, $\operatorname{Top} \mathscr{A}e_i \cong L(\lambda_i)$) となる $\lambda_i \in \Lambda$ が存在する ($\mathscr{A}e_i \cong \mathscr{A}e_j$ ならば, $\lambda_i = \lambda_j$ である)。また, Λ 上の半順序の定義より, 各 $i, j \in I$ $(i \neq j)$ に対し, λ_i と λ_j の間には順序関係がない。よって, Theorem A.4 (iii) より,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}e_i, \operatorname{rad} \mathscr{A}e_i) \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}e_i, \operatorname{rad} \Delta(\lambda_i)) = 0, \\
&\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}e_i, \mathscr{A}e_j) \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}e_i, \Delta(\lambda_j)) = 0 \text{ if } \mathscr{A}e_i \not\cong \mathscr{A}e_j
\end{aligned}$$

を得る。

(iv). $f = e - e_i$ とおけば, $e = e_i + f$ となり, e_i と f は互いに直交するベキ等元である。特に, $ee_i = e_i$, $ef = f$ となるので, $\mathcal{J}_{(i)} := \mathscr{A}e_i\mathscr{A}$, $\mathcal{J}_{(f)} := \mathscr{A}f\mathscr{A}$ とおけば,

(A.6.1) $\mathcal{J}_{(i)} = \mathscr{A}e_i\mathscr{A} = \mathscr{A}ee_i\mathscr{A} \subset \mathscr{A}e\mathscr{A} = \mathcal{J}, \quad \mathcal{J}_{(f)} = \mathscr{A}f\mathscr{A} = \mathscr{A}ef\mathscr{A} \subset \mathscr{A}e\mathscr{A} = \mathcal{J}$

となるので, $\mathcal{J}_{(i)} + \mathcal{J}_{(f)} \subset \mathcal{J}$ である。逆に,

$$\mathcal{J} = \mathscr{A}e\mathscr{A} = \mathscr{A}(e_i + f)\mathscr{A} \subset \mathscr{A}e_i\mathscr{A} + \mathscr{A}f\mathscr{A} = \mathcal{J}_{(i)} + \mathcal{J}_{(f)}$$

であるので, $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{(i)} + \mathcal{J}_{(f)}$ を得る。よって, $\mathcal{J}$ が $\mathscr{A}$ の heredity イデアルであることと併せて,

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{J}(\operatorname{rad} \mathscr{A})\mathcal{J} \\
&= (\mathcal{J}_{(i)} + \mathcal{J}_{(f)})(\operatorname{rad} \mathscr{A})(\mathcal{J}_{(i)} + \mathcal{J}_{(f)}) \\
&= \mathcal{J}_{(i)}(\operatorname{rad} \mathscr{A})\mathcal{J}_{(i)} + \mathcal{J}_{(f)}(\operatorname{rad} \mathscr{A})\mathcal{J}_{(i)} + \mathcal{J}_{(i)}(\operatorname{rad} \mathscr{A})\mathcal{J}_{(f)} + \mathcal{J}_{(f)}(\operatorname{rad} \mathscr{A})\mathcal{J}_{(f)}
\end{aligned}$$

となるので, $\mathcal{J}_{(i)}(\operatorname{rad} \mathscr{A})\mathcal{J}_{(i)} = 0$ を得る。

(v). $i \in I$ に対し, $\mathcal{J}_{(i)} = \mathscr{A}e_i\mathscr{A}$ だったので, (i) と同じ議論により, ある自然数 $g > 0$ に対し, 左 $\mathscr{A}$-加群の全射準同型写像

$$\psi : (\mathscr{A}e_i)^{\oplus g} \to \mathcal{J}_{(i)}$$

が存在する。$s = 1, \dots, g$ に対し,

$$\iota_s : \mathscr{A} e_i \to (\mathscr{A} e_i)^{\oplus g}$$

を $(\mathscr{A} e_i)^{\oplus g}$ の s 番目の直和因子への自然な入射とする。また, (A.6.1) より, $\mathcal{J}_{(i)}$ は $\mathcal{J}$ の左部分 $\mathscr{A}$-加群なので,

$$\iota_{(i)} : \mathcal{J}_{(i)} \to \mathcal{J}$$

を自然な埋め込みとする。また, (k, t) $(k \in I,\, t = 1, \dots, d_k)$ に対し,

$$p_{(k,t)} : \bigoplus_{j \in I} (\mathscr{A} e_j)^{\oplus d_j} \to \mathscr{A} e_k$$

を $(\mathscr{A} e_k)^{\oplus d_k}$ の t 番目の直和因子への射影とする。このとき, 合成写像

$$\Phi^{(s)}_{(k,t)} : \mathscr{A} e_i \xrightarrow{\iota_s} (\mathscr{A} e_i)^{\oplus g} \xrightarrow{\psi} \mathcal{J}_{(i)} \xrightarrow{\iota} \mathcal{J} \cong \bigoplus_{j \in I} (\mathscr{A} e_j)^{\oplus d_j} \xrightarrow{p_{(k,t)}} \mathscr{A} e_k$$

を考えると, $\Phi^{(s)}_{(k,t)} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{A} e_i,\, \mathscr{A} e_k)$ となる。よって, (ii), (iii) より,

$$\Phi^{(s)}_{(i,k)} : \text{同型写像 or 0-写像}, \quad \Phi^{(s)}_{(k,t)} = 0 \text{ if } i \neq k$$

となる。よって, $\Phi^{(s)}_{(k,t)}$ $(1 \le s \le g,\, k \in I,\, 1 \le t \le d_k)$ の定義より, $\mathcal{J}_{(i)}$ は左 $\mathscr{A}$-加群として $(\mathscr{A} e_i)^{\oplus d_i}$ の直和因子と同型である。よって, $\mathcal{J}_{(i)}$ は左 $\mathscr{A}$-加群として射影的である。

$\mathcal{J}$ の $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側商加群 $\mathcal{J}/\mathcal{J}_{(i)}$ を考えると, $e_i \mathscr{A} e \mathscr{A} \subset \mathscr{A} e_i \mathscr{A}$ なので,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{A} e_i,\, \mathcal{J}/\mathcal{J}_{(i)}) &\cong e_i \cdot (\mathcal{J}/\mathcal{J}_{(i)}) \\ &= (e_i \mathscr{A} e \mathscr{A})/(\mathscr{A} e_i \mathscr{A}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので, $\mathcal{J}/\mathcal{J}_{(i)}$ は左 $\mathscr{A}$-加群として, $L(\lambda_i) = \mathrm{Top}\, \mathscr{A} e_i$ を組成因子として含まない。よって, $\mathcal{J}_{(i)}$ が $(\mathscr{A} e_i)^{\oplus d_i}$ の直和因子と同型であったことと (i) より, $\mathcal{J}/\mathcal{J}_{(i)}$ が $L(\lambda_i)$ を組成因子として含まないためには, 左 $\mathscr{A}$-加群として,

$$\mathcal{J}_{(i)} \cong (\mathscr{A} e_i)^{\oplus d_i}$$

とならなければならない。

(vi). 各 $i = 1, \dots, n$ に対し, (A.6.1) より, $\mathcal{J}_{(i)} \subset \mathcal{J}$ であった。一方で,

$$\mathcal{J} = \mathscr{A} e \mathscr{A} = \mathscr{A}(e_1 + \cdots + e_n)\mathscr{A} \subset \sum_{i=1}^{n} \mathscr{A} e_i \mathscr{A} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{J}_{(i)}$$

であったので, $\mathcal{J} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{J}_{(i)}$ を得る。このことと, (i), 及び, (v) より,

$$\mathcal{J} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{J}_{(i)}$$

となる。ここで, $\mathscr{A} e_i \cong \mathscr{A} e_{i'}$ $(1 \leq i, i' \leq n)$ ならば, $\mathcal{J}_{(i)} = \mathcal{J}_{(i')}$ となることも暗に示されていることに注意しよう。

(vii). $\widetilde{e} = e\widetilde{e}$ であることに注意すれば,

$$\mathscr{A} \widetilde{e} \mathscr{A} = \mathscr{A} \widetilde{e} e \mathscr{A} \subset \mathscr{A} e \mathscr{A} = \mathcal{J}$$

である。同様に，各 $i \in I$ に対し, $\widetilde{e} e_i = e_i$ であるので, $\mathcal{J}_{(i)} = \mathscr{A} e_i \mathscr{A} \subset \mathscr{A} \widetilde{e} \mathscr{A}$ であるので, $\sum_{i \in I} \mathcal{J}_{(i)} \subset \mathscr{A} \widetilde{e} \mathscr{A}$ である。よって, (iv) より,

$$\mathcal{J} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{J}_{(i)} \subset \mathscr{A} \widetilde{e} \mathscr{A} \subset \mathscr{A} e \mathscr{A} = \mathcal{J}$$

となるので, $\mathcal{J} = \mathscr{A} \widetilde{e} \mathscr{A}$ を得る。

(viii). Lemma A.1 (i), 及び, この Proposition の (iv), (v) より, $\mathcal{J}_{(i)}$ $(i \in I)$ は $\mathscr{A}$ の heredity イデアルである。また, (vi) に注意すれば, $\mathcal{J}/\mathcal{J}_{(i)}$ が $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{(i)}$ の heredity イデアルとなることも分かる。 □

Theorem A.4 と Proposition A.6 の Corollary として以下を得る。

Corollary A.7. $\mathscr{A}$ を *quasi-hereditary* 代数とし,

(A.7.1) $$\mathscr{A} = \mathcal{J}_1 \supset \mathcal{J}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{J}_m \supset \mathcal{J}_{m+1} = 0$$

を $\mathscr{A}$ の *heredity chain* とする。このとき，以下のことが成り立つ。

(i) 一般に,

$$m =: (\textit{heredity chain} \text{ の長さ}) \leq \sharp\{\text{ 既約 } \mathscr{A}\text{-加群 }\}/_{\cong}$$

が成り立つ。さらに, (*heredity chain* の長さ) $<$ $\{$ 既約 $\mathscr{A}$-加群 $\}/_{\cong}$ であるような *heredity chain* は, (*heredity chain* の長さ) $=$ $\{$ 既約 $\mathscr{A}$-加群 $\}/_{\cong}$ となる *heredity chain* に細分化することができる。

(ii) $\mathscr{A}$ の *heredity chain* (A.7.1) の長さは最大 *(i.e.* $m = \sharp\{$ 既約 $\mathscr{A}$-加群 $\}/_{\cong}$*)* であるとする。このとき, 各 i に対し, $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$ の原始ベキ等元 e_i が存在して, $\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1} = (\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1})e_i(\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1})$ となる。

(iii) $\mathscr{A}$ の *heredity chain* (A.7.1) の長さは最大であるとする。このとき,

$$\Delta_i := (\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1})e_i, \quad \Delta_i^\sharp := e_i(\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}) \quad \subset \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$$

とおくと *(*e_i は (ii) における $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$ の原始ベキ等元*)*, $\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$ に含まれる直既約左 *(resp.* 右*)* 射影 $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$-加群は, Δ_i *(resp.* $\Delta_i^\sharp$*)* と同型である。また, 積写像

$$\Delta_i \otimes_{e_i(\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1})e_i} \Delta_i^\sharp \to \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}, \quad \overline{a}e_i \otimes e_i\overline{b} \mapsto \overline{a}e_i\overline{b} \quad (\overline{a}, \overline{b} \in \mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}) \tag{A.7.2}$$

は $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群の同型写像を与える。

さらに, $\mathbb{F}$ が代数的閉体であるとき *(*実際には $\mathrm{End}_{\mathscr{A}}(\Delta_i) \cong \mathbb{F}$ となればよい*)*, $\mathbb{F}$-代数として, $e_i(\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1})e_i \cong \mathbb{F}$ となる。よって, 積写像

$$\Delta_i \otimes_{\mathbb{F}} \Delta_i^\sharp \to \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}, \quad \overline{a}e_i \otimes e_i\overline{b} \mapsto \overline{a}e_i\overline{b} \quad (\overline{a}, \overline{b} \in \mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1})$$

は $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群の同型写像を与える。

Proof. (heredity chain の長さ) $\leq \sharp\{$ 既約 $\mathscr{A}$-加群 $\}/_{\cong}$ となることは, Theorem A.4 (ii) より分かる。

一方で, Proposition A.6 (viii) を繰り返し用いることによって, 与えられた $\mathscr{A}$ の heredity chain を細分化することができ, 各 $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$ の heredity イデアル $\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$ に対し, $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$ の原始ベキ等元 e_i が存在して, $\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1} = (\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1})e_i(\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1})$ となるようにできる。このとき, Proposition A.6 (i) より, 左 $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$-加群として

$$\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1} \cong \big((\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1})e_i\big)^{\oplus d_i} = \Delta_i^{\oplus d_i} \quad (d_i > 0) \tag{A.7.3}$$

となるので, Theorem A.4 (ii) (及び, Λ の定義) より,

$$(\text{heredity chain の長さ}) = \sharp\{\text{既約 } \mathscr{A}\text{-加群}\}/_{\cong}$$

となる。また, この議論より, heredity chain の長さが最大であるとき, (ii) が成り立つことも分かる。((ii) が成り立たなければ, Proposition A.6 (viii) より, より長い heredity chain に細分化される。)

また, heredity chain の長さが最大のとき, (A.7.3) より, $\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$ に含まれる直既約左射影 $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$-加群は Δ_i と同型である。右加群についても同様である。

さらに, 積写像 (A.7.2) が $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群の同型写像を与えることは, Lemma A.1 (iv) より従う。

最後に, Proposition A.6 (ii) に注意すれば,

$$\begin{aligned} e_i(\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1})e_i &\cong \mathrm{End}_{\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}}\big((\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1})e_i\big) \\ &\cong \mathrm{End}_{\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}}\big(\,\mathrm{Top}(\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1})e_i\big) \end{aligned}$$

となるので, $\mathbb{F}$ が代数的閉体であるとき, Schur の補題より, $e_i(\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1})e_i \cong \mathbb{F}$ となる。(実際には, $e_i(\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1})e_i \cong \mathrm{End}_{\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}}(\Delta_i) \cong \mathrm{End}_{\mathscr{A}}(\Delta_i)$ なので, $\mathrm{End}_{\mathscr{A}}(\Delta_i) \cong \mathbb{F}$ が成り立てば十分である。) $\square$

quasi-hereditary 代数の大域次元に関して, 以下のことが知られている。

Theorem A.8 ([PS, Theorem 4.3], [CPS2, Theorem 3.6], [DR1])**.**
$\mathscr{A}$ を *quasi-hereditary* 代数とし,

$$\mathscr{A} = \mathcal{J}_1 \supset \mathcal{J}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{J}_m \supset \mathcal{J}_{m+1} = 0$$

を $\mathscr{A}$ の *heredity chain* とする。このとき, $\mathscr{A}$ の大域次元 $\mathrm{gl.dim}\,\mathscr{A}$ は,

$$\mathrm{gl.dim}\,\mathscr{A} \leq 2m-2$$

をみたす。特に *quasi-hereditary* 代数の大域次元は有限である。

Appendix B. 一般の有限次元代数から眺めてみると‥

B.1. この節では, $\mathscr{A}$ を体 $\mathbb{F}$ 上の有限次元代数とし, 以下の条件 $(\star)$ をみたすと仮定する。

$(\star)$ 左 $\mathscr{A}$-加群の族 $\{\Delta_i \,|\, 1 \le i \le m\}$ と 右 $\mathscr{A}$-加群の族 $\{\Delta_i^\sharp \,|\, 1 \le i \le m\}$ が存在し, さらに, $\mathscr{A}$ の両側イデアルの列

$$\mathscr{A} = \mathscr{J}_1 \supset \mathscr{J}_2 \supset \cdots \supset \mathscr{J}_m \supset \mathscr{J}_{m+1} = 0 \tag{B.1.1}$$

で, 各 i に対し, $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群として

$$\mathscr{J}_i / \mathscr{J}_{i+1} \cong \Delta_i \otimes_{\mathbb{F}} \Delta_i^\sharp \tag{B.1.2}$$

となるものが存在する。

$\mathbb{F}$ が代数的閉体のときには, $\mathbb{F}$ 上の任意の有限次元代数が条件 $(\star)$ をみたすことが, 以下のようにして分かる。

Proposition B.2. *$\mathbb{F}$ が代数的閉体であるとき, $\mathbb{F}$ 上の有限次元代数 $\mathscr{A}$ に対し, 条件 $(\star)$ をみたす左 (resp. 右) $\mathscr{A}$-加群の族 $\{\Delta_i \,|\, 1 \le i \le m\}$ (resp. $\{\Delta_i^\sharp \,|\, 1 \le i \le m\}$) と, $\mathscr{A}$ の両側イデアルの列 $\mathscr{A} = \mathscr{J}_1 \supset \mathscr{J}_2 \supset \cdots \supset \mathscr{J}_m \supset \mathscr{J}_{m+1} = 0$ が存在する。*

Proof. $\mathscr{A}$ は有限次元代数なので, ある $n \ge 0$ で $\mathrm{rad}^{n-1} \mathscr{A} \ne 0$ かつ $\mathrm{rad}^n \mathscr{A} = 0$ となるものが存在する。そこで,

$$\mathscr{B} := \mathrm{End}_{\mathscr{A}^{\mathrm{opp}}} \Big(\bigoplus_{i=1}^{n} (\mathscr{A} / \mathrm{rad}^i \mathscr{A}) \Big)$$

とおくと, [DR2] より, $\mathscr{B}$ は quasi-hereditary 代数となる (この $\mathscr{B}$ のことを, $\mathscr{A}$ の **Auslander-Dlab-Ringel 代数**という)。そこで,

$$\mathscr{B} = \widetilde{\mathscr{J}}_1 \supset \widetilde{\mathscr{J}}_2 \supset \cdots \supset \widetilde{\mathscr{J}}_m \supset \widetilde{\mathscr{J}}_{m+1} = 0 \tag{B.2.1}$$

を $\mathscr{B}$ の長さが最大である heredity chain とし, 各 i に対し,

$$\widetilde{\Delta}_i := (\mathscr{B}/\widetilde{\mathscr{J}}_{i+1}) e_i, \quad \widetilde{\Delta}_i^\sharp := e_i (\mathscr{B}/\widetilde{\mathscr{J}}_{i+1}) \quad \subset \widetilde{\mathscr{J}}_i / \widetilde{\mathscr{J}}_{i+1} = (\mathscr{B}/\widetilde{\mathscr{J}}_{i+1}) e_i (\mathscr{B}/\widetilde{\mathscr{J}}_{i+1})$$

(e_i は $\mathcal{B}/\widetilde{\mathscr{J}}_{i+1}$ の原始ベキ等元)

とおくと, Corollary A.7 (iii) より, $(\mathscr{B}, \mathscr{B})$-両側加群として

$$\widetilde{\mathscr{J}}_i / \widetilde{\mathscr{J}}_{i+1} \cong \widetilde{\Delta}_i \otimes_{\mathbb{F}} \widetilde{\Delta}_i^\sharp \tag{B.2.2}$$

となる。

$e \in \mathrm{End}_{\mathscr{A}^{\mathrm{opp}}}\left(\bigoplus_{i=1}^{n}(\mathscr{A}/\operatorname{rad}^i \mathscr{A})\right)$ を $\mathscr{A}/\operatorname{rad}^n \mathscr{A} = \mathscr{A}$ への射影とすれば，明らかに $e\mathscr{B}e \cong \mathscr{A}$ であり, 各 i に対し,

$$\mathcal{J}_i := e\widetilde{\mathcal{J}}_i e, \quad \Delta_i := e \cdot \widetilde{\Delta}_i, \quad \Delta_i^\sharp := \widetilde{\Delta}_i^\sharp \cdot e$$

とおけば, (B.2.1), (B.2.2) より, $\mathscr{A}$ の両側イデアルの列

$$\mathscr{A} \cong e\mathscr{B}e = \mathcal{J}_1 \supset \mathcal{J}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{J}_m \supset \mathcal{J}_{m+1} = 0$$

で, 各 i に対し, $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群として

$$\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1} \cong \Delta_i \otimes_{\mathbb{F}} \Delta_i^\sharp$$

となるものが得られる。 □

Remark B.3. $\mathbb{F}$ 上の有限次元代数 $\mathscr{A}$ が与えられたとき, 条件 $(\star)$ をみたすような左 (右) $\mathscr{A}$-加群の族や, $\mathscr{A}$ の両側イデアルの列は一意的とは限らない。

$\mathbb{F}$-代数 $\mathscr{A}$ が条件 $(\star)$ をみたすとき, $\mathscr{A}$ は [DuRu] の意味での standardly based 代数となる。この設定における表現論が [DuRu] で扱われている。

次の Lemma は, 条件 $(\star)$ をみたす一般の有限次元代数と, quasi-hereditary 代数との違いの 1 つの見方を与える。

Lemma B.4 (cf. [KX1, Proposition 4.1])**.** $\mathscr{A}$ を体 $\mathbb{F}$ 上の有限次元代数とし, $\mathcal{J}$ を $\mathscr{A}$ の両側イデアルとする。さらに, ある左 $\mathscr{A}$-加群 Δ と 右 $\mathscr{A}$-加群 $\Delta^\sharp$ が存在して, $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群として,

$$\mathcal{J} \cong \Delta \otimes_{\mathbb{F}} \Delta^\sharp \tag{B.4.1}$$

であるとする。このとき, 以下の (i), (ii) のいずれかが必ず成り立つ。

(i) $\mathcal{J}^2 = 0$ である。

(ii) ある原始ベキ等元 $e \in \mathscr{A}$ が存在して $\mathcal{J} = \mathscr{A}e\mathscr{A}$ となる。さらに, 積写像

$$\mathscr{A}e \otimes_{\mathbb{F}} e\mathscr{A} \to \mathscr{A}e\mathscr{A}, \quad ae \otimes eb \mapsto aeb \quad (a, b \in \mathscr{A})$$

は $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群としての同型を与え,

$$\Delta \cong \mathscr{A}e \text{ as left } \mathscr{A}\text{-modules}, \quad \Delta^\sharp \cong e\mathscr{A} \text{ as right } \mathscr{A}\text{-modules}$$

となる。また, $\mathbb{F}$-代数として

$$e\mathscr{A}e \cong \mathbb{F}$$

となる。特に, $\mathcal{J}$ は $\mathscr{A}$ の *heredity* イデアルである。

Proof. $\{c_{\mathfrak{t}} \,|\, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}\}$ を Δ の基底とし, $\{c^{\sharp}_{\mathfrak{u}} \,|\, \mathfrak{u} \in \mathcal{T}^{\sharp}\}$ を $\Delta^{\sharp}$ の基底とする。$(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群の同型写像

$$\alpha : \Delta \otimes_{\mathbb{F}} \Delta^{\sharp} \to \mathcal{J}$$

における $c_{\mathfrak{t}} \otimes c^{\sharp}_{\mathfrak{u}}$ $(\mathfrak{t} \in \mathcal{T}, \mathfrak{u} \in \mathcal{T}^{\sharp})$ の像を $c_{\mathfrak{tu}}$ と表すと, $\{c_{\mathfrak{tu}} \,|\, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}, \mathfrak{u} \in \mathcal{T}^{\sharp}\}$ は $\mathcal{J}$ の基底を与える。このとき, $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}$, $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \mathcal{T}^{\sharp}$ に対し,

$$c_{\mathfrak{su}} c_{\mathfrak{tv}} = c_{\mathfrak{su}} \cdot \alpha(c_{\mathfrak{t}} \otimes c_{\mathfrak{v}}) = \alpha(c_{\mathfrak{su}} \cdot c_{\mathfrak{t}} \otimes c_{\mathfrak{v}}) = \alpha(\sum_{\mathfrak{t}' \in \mathcal{T}} r_{\mathfrak{t}'} c_{\mathfrak{t}'} \otimes c_{\mathfrak{v}}) = \sum_{\mathfrak{t}' \in \mathcal{T}} r_{\mathfrak{t}'} c_{\mathfrak{t}'\mathfrak{v}} \quad (r_{\mathfrak{t}'} \in \mathbb{F}),$$
$$c_{\mathfrak{su}} c_{\mathfrak{tv}} = \alpha(c_{\mathfrak{s}} \otimes c_{\mathfrak{u}}) \cdot c_{\mathfrak{tv}} = \alpha(c_{\mathfrak{s}} \otimes c_{\mathfrak{u}} \cdot c_{\mathfrak{tv}}) = \alpha(c_{\mathfrak{s}} \otimes \sum_{\mathfrak{u}' \in \mathcal{T}^{\sharp}} r^{\sharp}_{\mathfrak{u}'} c_{\mathfrak{u}'}) = \sum_{\mathfrak{u}' \in \mathcal{T}^{\sharp}} r^{\sharp}_{\mathfrak{u}'} c_{\mathfrak{su}'} \quad (r_{\mathfrak{u}'} \in \mathbb{F})$$

となるので, $\{c_{\mathfrak{tu}} \,|\, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}, \mathfrak{u} \in \mathcal{T}^{\sharp}\}$ が $\mathcal{J}$ の基底であることに注意すれば,

$$\text{(B.4.2)} \qquad c_{\mathfrak{su}} c_{\mathfrak{tv}} = \sum_{\mathfrak{t}' \in \mathcal{T}} r_{\mathfrak{t}'} c_{\mathfrak{t}'\mathfrak{v}} = \sum_{\mathfrak{u}' \in \mathcal{T}^{\sharp}} r^{\sharp}_{\mathfrak{u}'} c_{\mathfrak{su}'} = r_{\mathfrak{ut}} c_{\mathfrak{sv}} \quad (r_{\mathfrak{ut}} = r_{\mathfrak{s}} = r^{\sharp}_{\mathfrak{v}})$$

となる。ここで, $r_{\mathfrak{t}'}$ は $c_{\mathfrak{tv}}$ の $\mathfrak{v}$ の取り方に依らずに決まり, $r^{\sharp}_{\mathfrak{u}'}$ は $c_{\mathfrak{su}}$ の $\mathfrak{s}$ の取り方に依らずに決まることに注意すれば, $r_{\mathfrak{ut}} = r_{\mathfrak{s}} = r^{\sharp}_{\mathfrak{v}}$ は $c_{\mathfrak{su}} c_{\mathfrak{tv}}$ の $\mathfrak{s}, \mathfrak{v}$ の取り方に依らず, $\mathfrak{t}, \mathfrak{u}$ のみによって決まることが分かる。

$\{c_{\mathfrak{tu}} \,|\, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}, \mathfrak{u} \in \mathcal{T}^{\sharp}\}$ が $\mathcal{J}$ の基底であることと, (B.4.2) の $r_{\mathfrak{ut}} \in \mathbb{F}$ が $c_{\mathfrak{su}} c_{\mathfrak{tv}}$ の $\mathfrak{s}, \mathfrak{v}$ の取り方に依らずに, $\mathfrak{u}, \mathfrak{t}$ のみによって決まることから,

$$\text{(B.4.3)} \qquad \mathcal{J}^2 = 0 \Leftrightarrow c_{\mathfrak{tu}} c_{\mathfrak{tu}} = 0 \text{ for all } \mathfrak{t} \in \mathcal{T}, \mathfrak{u} \in \mathcal{T}^{\sharp}$$

を得る ($c_{\mathfrak{tu}} c_{\mathfrak{tu}} = 0 \Rightarrow r_{\mathfrak{ut}} = 0 \Rightarrow c_{\mathfrak{su}} c_{\mathfrak{tv}} = 0$ $(\mathfrak{s} \in \mathcal{T}, \mathfrak{v} \in \mathcal{T}^{\sharp})$ となることに注意)。

$\mathcal{J}^2 \neq 0$ であると仮定する。このとき, (B.4.3), (B.4.2) より, ある $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}$, $\mathfrak{u} \in \mathcal{T}^{\sharp}$ が存在して,

$$c_{\mathfrak{tu}} c_{\mathfrak{tu}} = r_{\mathfrak{ut}} c_{\mathfrak{tu}} \quad (r_{\mathfrak{ut}} \neq 0)$$

となり,

$$(r_{\mathfrak{ut}}^{-1} c_{\mathfrak{tu}})^2 = (r_{\mathfrak{ut}}^{-1})^2 c_{\mathfrak{tu}} c_{\mathfrak{tu}} = r_{\mathfrak{ut}}^{-1} c_{\mathfrak{tu}}$$

となるので, $\mathcal{J}$ はベキ等元 $r_{\mathfrak{ut}}^{-1} c_{\mathfrak{tu}}$ を含む。ベキ等元 $r_{\mathfrak{ut}}^{-1} c_{\mathfrak{tu}}$ を互いに直交する原始ベキ等元の和に分解し, その和に現れる原始ベキ等元の 1 つを e とおくと, $(r_{\mathfrak{ut}}^{-1} c_{\mathfrak{tu}}) e = e$ となるので, $e \in \mathcal{J}$ である。

左 $\mathscr{A}$-加群として, $\mathcal{J}$ は

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}1_{\mathscr{A}} = \mathcal{J}e \oplus \mathcal{J}(1_{\mathscr{A}} - e) = \mathscr{A}e \oplus \mathcal{J}(1_{\mathscr{A}} - e)$$

と分解する ($e \in \mathcal{J}$ より $\mathscr{A}e \subset \mathcal{J}e$ に注意) ので, 直既約射影加群 $\mathscr{A}e$ は $\mathcal{J}$ の直和因子である。一方で, $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群としての同型 (B.4.1) より, 左 $\mathscr{A}$-加群として

$$\mathcal{J} \cong \Delta \otimes_{\mathbb{F}} \Delta^{\sharp} \cong \Delta^{\oplus|\mathcal{T}^{\sharp}|} \quad (|\mathcal{T}^{\sharp}| = \dim_{\mathbb{F}} \Delta^{\sharp} \text{ に注意}) \tag{B.4.4}$$

であるので, $\mathscr{A}e$ が $\mathcal{J}$ の直既約である直和因子であることに注意すれば, ある Δ の $\mathscr{A}$-部分加群 M が存在して, 左 $\mathscr{A}$-加群として,

$$\Delta \cong \mathscr{A}e \oplus M \tag{B.4.5}$$

となる。よって, (B.4.4) より, 左 $\mathscr{A}$-加群として

$$\mathcal{J} \cong (\mathscr{A}e)^{\oplus|\mathcal{T}^{\sharp}|} \oplus M^{\oplus|\mathcal{T}^{\sharp}|}$$

となる。これより,

$$(\mathscr{A}e)^{\oplus|\mathcal{T}^{\sharp}|} \subset \sum_{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}e, \mathcal{J})} \mathrm{Im}\,\varphi$$

とみなせる。一方で, 任意の $a \in \mathscr{A}$ に対し, $\psi_a : \mathscr{A}e \to \mathscr{A}$ $(xe \mapsto xea)$ は左 $\mathscr{A}$-加群の準同型となり, 逆に $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}e, \mathscr{A})$ ならば, $\psi(ae) = ae\psi(e)$ となる (よって, $\mathrm{Im}\,\psi \subset \mathscr{A}e\mathscr{A}$ となる) ことに注意すれば, $\sum_{\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}e, \mathscr{A})} \mathrm{Im}\,\psi = \mathscr{A}e\mathscr{A}$ となるので,

$$(\mathscr{A}e)^{\oplus|\mathcal{T}^{\sharp}|} \subset \sum_{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}e, \mathcal{J})} \mathrm{Im}\,\varphi \subset \sum_{\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}e, \mathscr{A})} \mathrm{Im}\,\psi = \mathscr{A}e\mathscr{A} \tag{B.4.6}$$

を得る。また, 積写像

$$\mathscr{A}e \otimes_{\mathbb{F}} e\mathscr{A} \to \mathscr{A}e\mathscr{A}, \quad ae \otimes eb \mapsto aeb \quad (a, b \in \mathscr{A}) \tag{B.4.7}$$

は $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群の全射準同型である。(B.4.6), (B.4.7) より,

$$|\mathcal{T}^{\sharp}| \dim_{\mathbb{F}}(\mathscr{A}e) \le \dim_{\mathbb{F}} \mathscr{A}e\mathscr{A} \le \dim_{\mathbb{F}}(\mathscr{A}e) \dim_{\mathbb{F}}(e\mathscr{A}) \tag{B.4.8}$$

を得る。また, $e\mathscr{A}$ は右直既約射影 $\mathscr{A}$-加群であるので, $\mathscr{A}e$ の場合と同様な議論で, $\Delta^{\sharp}$ のある右 $\mathscr{A}$-部分加群 $M^{\sharp}$ が存在して, 右 $\mathscr{A}$-加群として,

$$\Delta^{\sharp} \cong e\mathscr{A} \oplus M^{\sharp} \tag{B.4.9}$$

となる。特に $\dim_{\mathbb{F}}(e\mathscr{A}) \leq \dim_{\mathbb{F}} \Delta^\sharp = |\mathcal{T}^\sharp|$ となるので, (B.4.8) より,

$$|\mathcal{T}^\sharp| \dim_{\mathbb{F}}(\mathscr{A}e) \leq \dim_{\mathbb{F}} \mathscr{A}e\mathscr{A} \leq \dim_{\mathbb{F}}(\mathscr{A}e) \dim_{\mathbb{F}}(e\mathscr{A}) \leq |\mathcal{T}^\sharp| \dim_{\mathbb{F}}(\mathscr{A}e)$$

となり,

$$\dim_{\mathbb{F}} \mathscr{A}e\mathscr{A} = \dim_{\mathbb{F}}(\mathscr{A}e) \dim_{\mathbb{F}}(e\mathscr{A}), \tag{B.4.10}$$

$$\dim_{\mathbb{F}}(e\mathscr{A}) = |\mathcal{T}^\sharp| = \dim_{\mathbb{F}} \Delta^\sharp \tag{B.4.11}$$

を得る。左右をひっくり返して同様な議論をすれば,

$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathscr{A}e) = |\mathcal{T}| = \dim_{\mathbb{F}} \Delta \tag{B.4.12}$$

を得る。(B.4.5), (B.4.9), (B.4.11), (B.4.12) より,

$$\Delta \cong \mathscr{A}e \text{ as left } \mathscr{A}\text{-modules}, \quad \Delta^\sharp \cong e\mathscr{A} \text{ as right } \mathscr{A}\text{-modules}$$

となるので, (B.4.1) より, $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群として,

$$\mathscr{A}e \otimes_{\mathbb{F}} e\mathscr{A} \cong \mathcal{J}$$

となる。また, (B.4.10) より, 積写像 (B.4.7) は $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群の同型写像となる。よって,

$$\mathscr{A}e \otimes_{\mathbb{F}} e\mathscr{A} \cong \mathscr{A}e\mathscr{A} \subset \mathcal{J} \cong \mathscr{A}e \otimes_{\mathbb{F}} e\mathscr{A}$$

となるので, $\mathscr{A}e\mathscr{A} = \mathcal{J}$ を得る。さらに, $\mathscr{A}e \otimes_{\mathbb{F}} e\mathscr{A} \cong \mathscr{A}e\mathscr{A}$ より,

$$e\mathscr{A}e \otimes_{\mathbb{F}} e\mathscr{A}e = e(\mathscr{A}e \otimes_{\mathbb{F}} e\mathscr{A})e \cong e(\mathscr{A}e\mathscr{A})e \subset e\mathscr{A}e$$

となるので, $\dim_{\mathbb{F}}(e\mathscr{A}e) \dim_{\mathbb{F}}(e\mathscr{A}e) \leq \dim_{\mathbb{F}} e\mathscr{A}e$ となり, $\dim_{\mathbb{F}}(\eta\mathscr{A}e) = 1$ を得る。よって, $e\mathscr{A}e \cong \mathbb{F}$ である。

最後に, $\mathcal{J}^2 \neq 0$ とすると, ある原始ベキ等元 $e \in \mathscr{A}$ が存在して, $\mathcal{J} = \mathscr{A}e\mathscr{A}$ となったので, Lemma A.1 (i) より, $\mathcal{J}^2 = \mathcal{J}$ である。このとき, 左 $\mathscr{A}$-加群として,

$$\mathcal{J} = \mathscr{A}e\mathscr{A} \cong \mathscr{A} \otimes_{\mathbb{F}} e\mathscr{A} \cong (\mathscr{A}e)^{\oplus \dim_{\mathbb{F}} e\mathscr{A}}$$

となるので, $\mathcal{J}$ は左射影 $\mathscr{A}$-加群である。さらに, $e\mathscr{A}e \cong \mathbb{F}$ (特に, $e\mathscr{A}e$ は半単純) であるので, Lemma A.1 (ii) より, $\mathcal{J}(\mathrm{rad}\,\mathscr{A})\mathcal{J} = 0$ となる。よって, $\mathcal{J}$ は $\mathscr{A}$ の heredity イデアルである。 $\square$

Lemma B.4 をふまえて, 条件 $(\star)$ のもとで, quasi-hereditary 代数や cellular 代数を以下のように捉えることができる。

Proposition B.5. 体 $\mathbb{F}$ 上の有限次元代数 $\mathscr{A}$ が条件 $(\star)$ をみたすとする。このとき, 以下のことが成り立つ。

(i) 各 i に対し, $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$ の両側イデアル $\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$ は以下の (a), (b) のいずれかをみたす。
  (a) $(\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1})^2 = 0$ である。
  (b) $\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$ は $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$ の *heredity* イデアルである。

(ii) 以下の (a) と (b) とは同値である。
  (a) $\mathscr{A}$ の両側イデアルの列 (B.1.1) が *heredity chain* である
  (b) 全ての i に対し, $(\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1})^2 \neq 0$ である。

(iii) 以下の (a) と (b) とは同値である。
  (a) $\mathscr{A}$ の両側イデアルの列 (B.1.1) が $\{\Delta_i \,|\, 1 \leq i \leq m\}$ を $\mathscr{A}$ の左 *cell* 加群とする *cell chain* である
  (b) 各 i に対し, ある $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$ の左イデアル $\Delta'_i \subset \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$ が存在し, $\mathscr{A}$ の反自己同型 ι で,

$$\iota^2 = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}, \quad \iota(\mathcal{J}_i) = \mathcal{J}_i, \quad \Delta_i \cong \Delta'_i, \quad \Delta_i^\sharp \cong \iota(\Delta'_i) \quad (1 \leq i \leq m)$$

をみたし, さらに図式

$$\begin{tikzcd}
\Delta'_i \otimes_{\mathbb{F}} \iota(\Delta'_i) \arrow[r, "\cong", "(\mathrm{B.1.2})"'] \arrow[d, "x\otimes\iota(y)\mapsto y\otimes\iota(x)"'] & \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1} \arrow[d, "\iota"] \\
\Delta'_i \otimes_{\mathbb{F}} \iota(\Delta'_i) \arrow[r, "\cong", "(\mathrm{B.1.2})"'] & \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}
\end{tikzcd}$$

を可換にするものが存在する。

Proof. (i) は, Lemma B.4 を各 i に対し適用すればよい。

(ii) は, heredity イデアルはベキ等元を含むので, ベキ零にはならないことに注意すれば, (i) より従う。

(iii) は cellula 代数 (cell chain) の定義 Definition 1.5 より明らかである。 □

B.6. 体 $\mathbb{F}$ 上の有限次元代数 $\mathscr{A}$ の表現を, 条件 $(\star)$ のもとで考えてみよう。まず,

$$\Lambda = \{1, 2, \ldots, m\}$$

とおき, Λ 上の自然な順序を考える。$i \in \Lambda$ に対し, $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群として $\Delta_i \otimes_{\mathbb{F}} \Delta_i^\sharp \cong \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$ であったので,

(B.6.1) $$\mathcal{J}_j \cdot \Delta_i = 0 \quad (i, j \in \Lambda \text{ s.t. } j > i)$$

を得る。また,

$$\Lambda_0 := \{i \in \Lambda \,|\, (\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1})^2 \neq 0\}$$

とおくと, 再び $\Delta_i \otimes_{\mathbb{F}} \Delta_i^\sharp \cong \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$ に注意すれば, Λ_0 の定義より,

(B.6.2) $$\mathcal{J}_i \cdot \Delta_i = 0 \quad (i \in \Lambda \setminus \Lambda_0)$$

を得る。

$i \in \Lambda_0$ とすると, Lemma B.4.1 より, $\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$ は $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$ の heredity イデアルであり, ある $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$ の原始ベキ等元 $e_i \in \mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$ が存在して, 左 $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$-加群として, $\Delta_i \cong (\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1})e_i$ となる。特に, Δ_i は直既約射影 $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$-加群なので, $\operatorname{rad}\Delta_i$ はただ 1 つの Δ_i の極大部分加群である。そこで,

$$L_i := \Delta_i/\operatorname{rad}\Delta_i \quad (i \in \Lambda_0)$$

とおく。以下, 自然な全射 $\mathscr{A} \to \mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$ を通じて $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$-加群を $\mathscr{A}$-加群と思う。明らかに, L_i ($i \in \Lambda_0$) は既約 $\mathscr{A}$-加群である。$\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$ が $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$ の heredity イデアルであることに注意すると,

$$\mathcal{J}_i \cdot \operatorname{rad}\Delta_i \subset \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}\operatorname{rad}(\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}) = \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}\operatorname{rad}(\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1})\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1} = 0$$

となるので (ここで, (B.1.2) によって, Δ_i を $\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$ に含まれる $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$ の左イデアルと考えている),

(B.6.3) $$\mathcal{J}_i \cdot \operatorname{rad}\Delta_i = 0 \quad (i \in \Lambda_0)$$

を得る。また, $\Delta_i \cong (\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1})e_i$ のもとで, $L_i = \Delta_i/\operatorname{rad}\Delta_i$ における e_i の像を $\overline{e}_i$ とおくと, 明らかに $\overline{e}_i \neq 0$ ($L_i = \mathscr{A} \cdot \overline{e}_i$ となることに注意) であり, $e_i \cdot \overline{e}_i = \overline{e_i^2} = \overline{e_i}$ である。また, $e_i \in \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$ であるので, $\widetilde{e}_i \in \mathcal{J}_i$ で, $\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$ における像が e_i となるものが存在し, $\widetilde{e}_i \cdot \overline{e}_i = e_i \cdot \overline{e}_i \neq 0$ となるので,

(B.6.4) $$\mathcal{J}_i \cdot L_i \neq 0 \quad (i \in \Lambda_0)$$

を得る。以上の準備のもとで, 以下の Theorem を得る。

Theorem B.7 (cf. [DuRu, Theorem 2.4.1, Proposition 2.4.4])**.** 体 $\mathbb{F}$ 上の有限次元代数 $\mathscr{A}$ が条件 $(\star)$ をみたすとする。このとき, 以下のことが成り立つ。

(i) $i, j \in \Lambda_0$ *($i \neq j$)* に対し, $\mathscr{A}$-加群として

$$L_i \ncong L_j.$$

(ii) $\{L_i \,|\, i \in \varLambda_0\}$ は既約 $\mathscr{A}$-加群の同型類の完全代表系を与える。

(iii) $i \in \varLambda$, $j \in \varLambda_0$ に対し,

$$[\Delta_i : L_j] \neq 0 \Rightarrow i \geq j$$

である。さらに, $i \in \varLambda_0$ であるとき,

$$L_i = \Delta_i / \operatorname{rad} \Delta_i \text{ かつ } [\operatorname{rad} \Delta_i : L_j] \neq 0 \Rightarrow i > j$$

となる。

(iv) $i \in \varLambda_0$ に対し, P_i を L_i の射影被覆とする。このとき, P_i の部分加群の列

$$P_i \supset K_i = M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_k \supset M_{k+1} = 0$$

で,

$$P_i/K_i \cong \Delta_i, \quad M_j/M_{j+1} \cong \Delta_{i_j} \ s.t. \ i_j > i \quad (1 \leq j \leq k)$$

をみたすものが存在する。

Proof. (i). $i, j \in \varLambda_0$ $(i \neq j)$ とすると, (B.6.4) より,

$$\mathcal{J}_i \cdot L_i \neq 0, \quad \mathcal{J}_j \cdot L_j \neq 0$$

である。一方で, (B.6.1) より,

$$\mathcal{J}_j \cdot L_i \neq 0 \Rightarrow j \leq i, \quad \mathcal{J}_i \cdot L_j \neq 0 \Rightarrow i \leq j$$

である。よって, $L_i \cong L_j$ ならば $i = j$ を得る。

(ii). L を既約 $\mathscr{A}$-加群とし, $L \ni x \neq 0$ を取ると, $\mathscr{A}$-加群の全射準同型

$$\varphi : \mathscr{A} \to L, \quad a \mapsto a \cdot x$$

が存在する。このとき, ある i に対し,

$$\mathcal{J}_i \cdot L \neq 0 \text{ かつ } \mathcal{J}_{i+1} \cdot L = 0$$

となる。このとき, $\mathcal{J}_{i+1} \cdot L = 0$ より, φ は $\mathscr{A}$-加群の準同型

$$\overline{\varphi} : \mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1} \to L, \quad \overline{a} \mapsto \overline{a} \cdot x = a \cdot x \quad (\text{ここで}, \overline{a} = a + \mathcal{J}_{i+1} \in \mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1})$$

を誘導する。$\overline{\varphi}$ を $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$ の両側イデアル $\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$ に制限すると, $\mathscr{A}$-加群の準同型

$$\overline{\varphi}_i : \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1} \to L, \quad \overline{a} \mapsto \overline{a} \cdot x = a \cdot x \quad (ここで, \overline{a} = a + \mathcal{J}_{i+1} \in \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1})$$

を得るが, $\mathcal{J}_i \cdot L \neq 0$ であったので, $\overline{\varphi}_i \neq 0$ である。(全ての $a \in \mathcal{J}_i$ に対し, $a \cdot x = 0$ とすると, 任意の $b \in \mathscr{A}$ に対し, $a \cdot (bx) = (ab) \cdot x = 0$ ($ab \in \mathcal{J}_i$ に注意) となり, $\mathcal{J}_i \cdot L = 0$ となってしまう。) よって, L が既約であることより, $\overline{\varphi}_i$ は全射となる。特に L は $\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$ の商加群と同型である。もし, $i \notin \Lambda_0$ とすると, Λ_0 の定義より, $\mathcal{J}_i \cdot (\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}) = 0$ となり, L が $\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$ の商加群と同型であることから, $\mathcal{J}_i \cdot L = 0$ となるが, これは i の決め方に矛盾する。よって, $i \in \Lambda_0$ であり, (B.1.2) より, $L \cong \operatorname{Top} \Delta_i \cong L_i$ となる。

(iii). L を Δ_i の組成因子とすると, (ii) より, ある $j \in \Lambda_0$ に対し, $L \cong L_j$ となる。このとき, (B.6.4) より,

$$\mathcal{J}_j \cdot L \neq 0$$

となるが, 一方で, (B.6.1) より, $\mathcal{J}_l \cdot \Delta_i = 0$ $(l > i)$ であるので,

$$\mathcal{J}_j \cdot L \neq 0 \Rightarrow \mathcal{J}_j \cdot \Delta_i \neq 0 \Rightarrow j \leq i$$

となる。よって, $[\Delta_i : L_j] \neq 0 \Rightarrow i \geq j$ を得る。

また, $i \in \Lambda_0$ のとき，定義より, $L_i = \Delta_i/\operatorname{rad}\Delta_i$ である。また, (B.6.3) より,

$$\mathcal{J}_i \cdot \operatorname{rad}\Delta_i = 0$$

であるので, (B.6.1) と併せて, L が $\operatorname{rad}\Delta_i$ の組成因子とすると,

$$\mathcal{J}_j \cdot L \neq 0 \Rightarrow \mathcal{J}_j \cdot \operatorname{rad}\Delta_i \neq 0 \Rightarrow j < i$$

を得る。よって, $[\operatorname{rad}\Delta_i : L_j] \neq 0 \Rightarrow j < i$ を得る。

(iv). $i \in \Lambda_0$ に対し, P_i を L_i の射影被覆とする。$\mathscr{A}$ の両側イデアルの列 (B.1.1) に完全関手 $- \otimes_{\mathscr{A}} P_i$ を施すと, P_i の $\mathscr{A}$-部分加群の列

$$P_i = N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_m \supset N_{m+1} = 0, \text{ where } N_j = \mathcal{J}_j \otimes_{\mathscr{A}} P_i \quad (1 \leq j \leq m)$$

を得る。ここで, (B.1.2) に注意すると, 左 $\mathscr{A}$-加群として,

$$N_j/N_{j+1} \cong (\mathcal{J}_j/\mathcal{J}_{j+1}) \otimes_{\mathscr{A}} P_i \cong \Delta_i \otimes_{\mathbb{F}} \Delta_i^\sharp \otimes_{\mathscr{A}} P_i \cong \Delta_i^{\oplus \dim_{\mathbb{F}} \Delta_i^\sharp \otimes_{\mathscr{A}} P_i} \tag{B.7.1}$$

を得る。i' を $N_j/N_{j+1} \neq 0$ となる j の中で最小のものとすると,

$$P_i = N_1 = N_2 = \cdots = N_{i'} \supsetneqq N_{i'+1} \supset \cdots \supset N_m \supset N_{m+1} = 0$$

となり, (B.7.1) より, $\mathrm{Top}(N_{i'}/N_{i'+1}) \cong \mathrm{Top}\,\Delta_{i'}^{\oplus \dim_{\mathbb{F}} \Delta_{i'}^{\sharp} \otimes_{\mathscr{A}} P_i}$ は $\mathrm{Top}\,P_i$ の直和因子となる。よって, $\mathrm{Top}\,P_i \cong L_i$ であることと (iii) に注意すれば, $i' = i$ であり, $P_i/N_{i+1} = N_i/N_{i+1} \cong \Delta_i$ を得る。よって, $K_i := N_{i+1}$ とおけば,

$$
\begin{aligned}
&P_i \supset K_i = N_{i+1} \supset N_{i+2} \supset \cdots \supset N_m \supset N_{m+1} = 0,\\
&P_i/K_i \cong \Delta_i, \quad N_j/N_{j+1} \cong \Delta_j^{\oplus \dim_{\mathbb{F}} \Delta_j^{\sharp} \otimes_{\mathscr{A}} P_i} \quad (i+1 \le j \le m)
\end{aligned}
$$

となるので, K_i の部分加群の列 $K_i = N_{i+1} \supset N_{i+2} \supset \cdots \supset N_m \supset N_{m+1} = 0$ を適当に細分化すれば, (iv) を得る。 □

Remark B.8.

(i). 条件 $(\star)$ をみたす一般の有限次元 $\mathbb{F}$-代数に関する主張 Theorem B.7 と, quasi-herditary 代数に関する同様な主張 Theorem A.4 との違いは, $\Lambda_0 = \Lambda$ であることが要請されるかされないかである。実際に $\Lambda_0 = \Lambda$ の場合, Theorem B.7 は $\mathscr{A}$-mod が最高ウェイト圏であることを主張し, よって, $\mathscr{A}$ は quasi-hereditary 代数となる。このことは, Proposition B.5 (ii) の主張に対応する (Λ_0 の定義に注意せよ。)

(ii). cellular 代数に対する主張 Proposition 2.4 (Theorem 2.13 の (i), (ii), (iii)) は, $\mathrm{rad}_{\langle\,,\,\rangle}\,\Delta(\lambda) = \mathrm{rad}\,\Delta(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda_0)$ であることを認めれば, Theorem B.7 と等価の主張である。条件 $(\star)$ をみたす一般の有限次元 $\mathbb{F}$-代数の表現論と cellular 代数の表現論において本質的に異なる点は, cellular 代数の構造を定める anti-involution によって従う主張 Proposition 2.7 及び, それを用いて得られる主張 Proposition 2.10, Theorem 2.13 の (iv), (vi), Proposition 2.14 などである。(直既約射影加群が Δ-filtered であることは, Theorem B.7 の (iv) で得られるが, Proposition 2.10 ではその重複度が分解定数で与えられることを主張していて, そのために, Proposition 2.7 を用いている。)

References

[A] H.Asashiba, *The Derived Equivalence Classification of Representation-Finite Selfinjective Algebras*, J. of Algebra **214** (1999), 182-221.

[AST] H.Andersen, C.Stroppel and D.Tubbenhauer, *Cellular structures using U_q-tilting modules*, preprint, arXiv:1503.00224.

[AMR] S.Ariki, A.Mathas and H.Rui, *Cyclotomic Nazarov-Wenzl algebras*, Nagoya Math. J. **182** (2006), 47-134.

[ACT] I.Assem, F.Coelho and S. Trepode, *The bound quiver of a split extension*, J. Algebra Appl. **7** (2008), 405-423.

[ASS] I.Assem, D.Simson and A.Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, London Math. Soc. Student Texts **65**, Cambridge University Press (2006).

[BS] J.Brundan and C.Stroppel, *Highest weight categories arising from Khovanov's diagram algebra I: cellularity*, Mosc. Math. J. **11** (2011), 685-722, 821-822.

[CPS1] E.Cline, B.Parshall and L.Scott, *Finite dimensional algebras and highest weight categories*, J. Reine angew. Math. **391** (1988), 85-99.

[CPS2] E.Cline, B.Parshall and L.Scott, *Integral and Graded Quasi-hereditary Algebras, I*, J. of Algebra **131** (1990), 126-160.

[DJ1] R.Dipper and G.James, *Representations of Hecke algebras of general linear groups*, Proc. London Math. Soc. **52** (1986), 20-52.

[DJ2] R.Dipper and G.James, *The q-Schur algebra*, Proc. London. Math. Soc. **59** (1989), 23-50.

[DJM] R.Dipper, G.James and A.Mathas, *Cyclotomic q-Schur algebras*, Math. Z. **229** (1999), 385-416.

[DR1] V.Dlab and C.Ringel, *Quasi-herditary algebras*, Illinois J. of Math. **Vol. 33** (1989), 280-291.

[DR2] V.Dlab and C.Ringel, *Every semiprimary ring is the endomorphism ring of a projective module over a quasi-hereditary ring*, Proc. A.M.S. **107** (1989), 1-5.

[D] S.Donkin, *The q-Schur Algebra*, London Math. Soc. Lecture Note Series **253** (1998).

[Do] S.Doty, *Presenting generalized q-Schur algebras*, Represent. Theory **7** (2003), 196-213.

[DuRu] J.Du and H.Rui, *Based algebras and standard bases for quasi-hereditary algebras*, Trans. A.M.S. **350** (1998), 3207-3235.

[E] J.Enyang, *Cellular bases for the Brauer and Birman-Murakami-Wentzl algebras*, J. Algebra **281** (2004), 413-449.

[G1] M.Geck, *Hecke algebras of finite type are cellular*, Invent. Math. **169** (2007), 501-517.

[G2] M.Geck, *Leading coefficients and cellular bases of Hecke algebras*, Proc. Edinb. Math. Soc. **52** (2009), 653-677.

[Go] F.Goodman, *Cellularity of cyclotomic Birman-Wenzl-Murakami algebras*, J. Algebra **321** (2009), 3299-3320.

[GL] J.J.Graham and G.I.Lehrer, *Cellular algebras*, Invent. Math. **123** (1996), 1-34.

[HM1] J.Hu and A.Mathas, *Graded cellular bases for the cyclotomic Khovanov-Lauda-Rouquier algebras of type A*, Adv. Math. **225** (2010), 598-642.

[HM2] J.Hu and A.Mathas, *Quiver Schur algebras for linear quivers*, Proc. Lond. Math. Soc. **110** (2015), 1315-1386.

[HW] D.Hughes and J.Waschbüsch, *Trivial extensions of tilted algebras*, Proc. London Math. Soc. **46** (1983), 347-364.

[KX1] S.König and C.C.Xi, *On the structure of cellular algebras*, Canadian Math. Soc. Conference Proceedings **vol. 24** (1998), 365-386.

[KX2] S.König and C.C.Xi, *Cellular algebras: inflations and Morita equivalences*, J. London Math. Soc.**60** (1999), 700-722.

[KX3] S.König and C.C.Xi, *When is a cellular algebra quasi-hereditary?*, Math. Ann.**315** (1999), 281-293.

[大松] 大松 美咲, 有限表現型である対称 cellular 代数の分類, 修士論文 (2014).

[PS] B.Parshall and L.Scott, *Derived categories, quasi-hereditary algebras and algebraic groups*, Proceedings of Ottawa-Moosonee Workshop in Alg. Carleton Univ. Notes, No.3 (1988).

[PR] D.Plaza and S.Ryom-Hansen, *Graded cellular bases for Temperley-Lieb algebras of type A and B*, J. Algebraic Combin. **40** (2014), 137-177.
[R1] C.Riedtmann, *Representation-finite selfinjective algebras of class* $\mathbb{A}_n$, in: Representation theory II, Lecture Notes in Math. **vol. 832**, Springer Verlag (1980), 449-520.
[R2] C.Riedtmann, *Representation-finite selfinjective algebras of class* $\mathbb{D}_n$, Composito Math. **49** (1983), 231-282.
[RX] H.Rui and C.Xi, *The representation theory of cyclotomic Temperley-Lieb algebras*, Comment. Math. Helv. **79** (2004), 427-450.
[S] A.Skowroński, *Selfinjective algebras : finite type and tame type*, Contemporary Math. **406** (2006), 169-238.
[SW] C.Stroppel and B.Webster, *Quiver Schur algebras and q-Fock space*, preprint, arXiv:1110.1115.
[UY] M.Uematsu and K.Yamagata, *On serial quasi-hereditary rings*, Hokkaido Math. J. **Vol. 19** (1990), 165-174.
[W1] J.Waschbüsch, *Symmetrische Algebren vom endlichen Modultyp*, J. reine angew. Math. **321** (1981), 78-98.
[W2] J.Waschbüsch, *On selfinjective algebras of finite representation type*, Monographs of Institute of Math. **vol. 14**, UNAM Mexico, 1983.
[WY] S.Wilcox and S.Yu, *On the cellularity of the cyclotomic Birman-Murakami-Wentzl algebras*, J. London. Math. Soc. **86** (2012), 911-929.
[X1] C.Xi, *Quasi-hereditary algebras with a duality*, J. reine angew. Math. **449** (1994), 201-215.
[X2] C.Xi, *Partition algebras are cellular*, Compositio. Math. **119** (1999), 99-109.
[X3] C.Xi, *Cellular algebras*, Lecture notes in Advanced School and Conference on Representation Theory and Related Topics,
https://webusers.imj-prg.fr/ bernhard.keller/ictp2006/lecturenotes/xi.pdf

E-mail address: `wada@math.shinshu-u.ac.jp`