Presenting cyclotomic q-Schur algebras

和田 堅太郎 (Kentaro Wada)
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

§ 0. Introduction

Ariki-Koike algebra $\mathscr{H}_{n,r}$ ($G(r,1,n)$ 型の複素鏡映群 $\mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$ に付随した cyclotomic Hecke algebra) に付随した cyclotomic q-Schur algebra $\mathscr{S}_{n,r}$ は, quasi-hereditary algebra であり, さらに, $\mathscr{H}_{n,r}$ の (１つの) quasi-hereditary cover となっており, 非常に興味深い代数です。$\mathscr{S}_{n,r}$ は, ある $\mathscr{H}_{n,r}$-加群の自己準同型環として定義されますが, これまでは, $\mathscr{H}_{n,r}$-加群の自己準同型環としての性質を使った議論が主な研究手段でした*。

一方で, $r=1$ の場合, $\mathscr{H}_{n,1}$ は対称群に付随する Iwahori-Hecke algebra で, $\mathscr{S}_{n,1}$ は A 型の q-Schur algebra となります。この場合, Schur-Weyl duality を通じて, $\mathscr{S}_{n,1}$ は量子群 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の商代数となることが知られており, 量子群に関する様々な結果を応用することができます (最も重要なものの一つは, Lusztig conjecture です)。

その後, Doty-Giaquinto [DG] によって, 全射準同型 $U_q(\mathfrak{gl}_m) \to \mathscr{S}_{n,1}$ の核を与える関係式を求めることによって, A 型の q-Schur algebra $\mathscr{S}_{n,1}$ の生成元と基本関係式による presentation が与えられました。一般の r に対する cyclotomic q-Schur algebra $\mathscr{S}_{n,r}$ に対しても, そのような presentation を与えることが期待されていて, 今回 [W] において, $\mathscr{S}_{n,r}$ の生成元と基本関係式による presentation が得られたので, その報告をこの研究集会でさせていただきました。実際に $\mathscr{S}_{n,r}$ の presentation を与えるためには, いろいろなことを準備する必要があったため, [W] の論文は少し長くなってしまったので, ここでは, [W] での議論の基本的なアイデアの部分をまとめてみました。

§ 1. Cyclotomic q-Schur algebras

まず, Ariki-Koike algebra $\mathscr{H}_{n,r}$ に付随する cyclotomic q-Schur algebra の定義と, 後の議論で必要なことをまとめます。

1.1. $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[q, q^{-1}, Q_1, \cdots, Q_r]$ ($q, Q_1, \cdots, Q_r$ は不定元) とし, $\mathcal{K} = \mathbb{Q}(q, Q_1, \cdots, Q_r)$ を $\mathcal{A}$ の商体とする。$\mathcal{A}$ 上の $G(r,1,n)$ 型の複素鏡映群 $\mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$ に付随する

*[DJM] によって $\mathscr{S}_{n,r}$ の cellular basis が与えられているので, それだけでもいろいろなことが分かります。

Ariki-Koike algebra ${}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}_{n,r}$ は, 以下の生成元と基本関係式によって定義される $\mathcal{A}$ 上の単位元を持った結合代数である;

生成元: $T_0, T_1, \cdots, T_{n-1}$.

基本関係式:
$$\begin{aligned}
&(T_0-Q_1)(T_0-Q_2)\cdots(T_0-Q_r)=0,\\
&(T_i-q)(T_i+q^{-1})=0 \qquad (1\le i\le n-1),\\
&T_0T_1T_0T_1=T_1T_0T_1T_0,\\
&T_iT_{i+1}T_i=T_{i+1}T_iT_{i+1} \qquad (1\le i\le n-2),\\
&T_iT_j=T_jT_i \qquad (|i-j|\ge 2).
\end{aligned}$$

1.2. cyclotomic q-Schur algebra を定義するために, 以下のような集合を考える。

$$\Lambda_{n,r}=\left\{\mu=(\mu^{(1)},\cdots,\mu^{(r)})\;\middle|\; \begin{array}{c}\mu^{(k)}=(\mu_1^{(k)},\cdots,\mu_n^{(k)})\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^n\\ \sum_{k=1}^r\sum_{i=1}^n\mu_i^{(k)}=n\end{array}\right\}.$$

つまり, $\Lambda_{n,r}$ は n 個の part からなる composition r 個の組で, それぞれの size を足し合わせると n になるものの集合である。さらに, $\Lambda_{n,r}$ の各成分 $\mu^{(k)}$ $(1\le k\le r)$ が全て partition (つまり, 非増加列) になっているものを, **size が n の r-partition** といい, それらの集合を,

$$\Lambda_{n,r}^{+}=\left\{\lambda=(\lambda^{(1)},\cdots,\lambda^{(r)})\in\Lambda_{n,r}\;\middle|\;\lambda_1^{(k)}\ge\lambda_2^{(k)}\ge\cdots\ge\lambda_n^{(k)}\text{ for any }k=1,\cdots,r\right\}$$

と表す。$\Lambda_{n,r}$ 上の半順序 (**dominance order**) を, $\lambda,\mu\in\Lambda_{n,r}$ に対し,

$$\lambda\ge\mu\text{ if }\sum_{k=1}^{l-1}|\lambda^{(k)}|+\sum_{i=1}^{j}\lambda_i^{(l)}\ge\sum_{k=1}^{l-1}|\mu^{(k)}|+\sum_{i=1}^{j}\mu_i^{(l)}\text{ for any }1\le l\le r,\ 1\le j\le n$$

によって定める。

$i=1,\cdots,n$ に対し, $L_1=T_0$ とし, 以下, 帰納的に $L_i=T_{i-1}L_{i-1}T_{i-1}$ とおく。また, $w\in\mathfrak{S}_n$ に対し, $w=s_{i_1}\cdots s_{i_l}$ を w の reduced expression ($s_{i_k}=(i_k,i_k+1)$ は 隣接互換) とするとき, T_i $(1\le i\le n-1)$ 達が A 型の braid relation を満たしているので, $T_w=T_{i_1}\cdots T_{i_l}$ とおくと, これは w の reduced expression の取り方に依らずに定まる。さらに, $\mu\in\Lambda_{n,r}$ に対し,

(1.2.1)
$$x_\mu=\sum_{w\in\mathfrak{S}_\mu}q^{\ell(w)}T_w,\quad u_\mu^{+}=\prod_{k=1}^{r}\prod_{i=1}^{a_k}(L_i-Q_k),\quad m_\mu=x_\mu u_\mu^{+},\quad M^\mu=m_\mu\cdot{}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}_{n,r}$$

とおく。ここで, $\mathfrak{S}_\mu$ は μ に付随する $\mathfrak{S}_n$ の Young 部分群, $\ell(w)$ は $w\in\mathfrak{S}_n$ の length, $a_k=\sum_{j=1}^{k-1}|\mu^{(j)}|$ (ただし $a_1=0$ とする) である。このような設定の下で, ${}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}_{n,r}$ **に付随する cyclotomic q-Schur algeba** ${}_{\mathcal{A}}\mathscr{S}_{n,r}$ は, 以下のような ${}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}_{n,r}$-

加群の自己準同型環として定義される;

$$ {}_{\mathcal{A}}\mathscr{S}_{n,r} = \operatorname{End}_{{}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}_{n,r}}\Big(\bigoplus_{\mu\in\Lambda_{n,r}} M^{\mu}\Big). $$

いま, ${}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}_{n,r}$, ${}_{\mathcal{A}}\mathscr{S}_{n,r}$ ともに $\mathcal{A}=\mathbb{Z}[q,q^{-1},Q_1,\cdots,Q_r]$ 上で定義されているので, 勝手な環 R とパラメータ $\widetilde{q},\widetilde{Q}_1,\cdots,\widetilde{Q}_r\in R$ に特殊化したものを考えることができる。特に, $\mathcal{K}$ 上に特殊化したものを, 単に $\mathscr{H}_{n,r}=\mathcal{K}\otimes_{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{A}}\mathscr{H}_{n,r}$, (resp. $\mathscr{S}_{n,r}=\mathcal{K}\otimes_{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{A}}\mathscr{S}_{n,r}$) と書くことにする。cyclotomic q-Schur algebra の presentation を書くためには, まず, $\mathcal{K}$ 上で $\mathscr{S}_{n,r}$ の presentation を与えておいて, その $\mathcal{A}$-form を取ることによって ${}_{\mathcal{A}}\mathscr{S}_{n,r}$ の presentation (よって, 勝手な環とパラメータに特殊化できる) を与えることになるので, 以下では主に ($\mathcal{A}$ 上でもそのまま成り立つことに対しても) $\mathcal{K}$ 上の $\mathscr{S}_{n,r}$ に話を絞って書くことにします。

1.3. $\mathscr{S}_{n,r}$ は, [DJM] によって, $\{\varphi_{ST}\,|\,S,T\in\mathcal{T}_0(\lambda)\text{ for some }\lambda\in\Lambda^+_{n,r}\}$ を cellular basis とする (quasi-hereditary) cellular algebra であることが知られています。ここで, $\mathcal{T}_0(\lambda)$ は λ を shape とする semi-standard tableau の集合です (具体的な定義等は [DJM], [M2] 等を参照)。ここでは, cellular algebra の復習はせずに, 後の議論で必要な性質のみをまとめます (cellular algebra については, [GL], [M1, Ch.2] 等を参照)。

$\lambda\in\Lambda^+_{n,r}$ に対し, $\mathscr{S}_{n,r}$ の部分空間

$$ \mathscr{S}_{n,r}(\geq\lambda) = \big\langle \varphi_{ST}\;\big|\; S,T\in\mathcal{T}_0(\mu)\text{ for some }\mu\in\Lambda^+_{n,r}\text{ s.t. }\mu\geq\lambda\big\rangle_{\mathcal{K}\text{-span}}, $$
$$ \mathscr{S}_{n,r}(>\lambda) = \big\langle \varphi_{ST}\;\big|\; S,T\in\mathcal{T}_0(\mu)\text{ for some }\mu\in\Lambda^+_{n,r}\text{ s.t. }\mu>\lambda\big\rangle_{\mathcal{K}\text{-span}}, $$

を考えると, $\mathscr{S}_{n,r}(\geq\lambda)$, $\mathscr{S}_{n,r}(>\lambda)$ ともに, $\mathscr{S}_{n,r}$ の両側イデアルとなる。そこで, $\Lambda^+_{n,r}$ 上の全順序

(1.3.1) $$ \Lambda^+_{n,r}=\{\lambda_{\langle 1\rangle},\lambda_{\langle 2\rangle},\cdots,\lambda_{\langle z\rangle}\} $$

を, もし $\lambda_{\langle i\rangle}>\lambda_{\langle j\rangle}$ ならば, $i<j$ となるように定め固定する。さらに,

$$ \mathscr{S}_{n,r}(\lambda_{\langle k\rangle}) = \big\langle \varphi_{ST}\;\big|\; S,T\in\mathcal{T}_0(\lambda_{\langle j\rangle})\text{ for some }j\leq k\big\} $$

とおけば, $\mathscr{S}_{n,r}(\lambda_{\langle k\rangle})$ も $\mathscr{S}_{n,r}$ の両側イデアルとなり, $\mathscr{S}_{n,r}$ の両側イデアルの列

(1.3.2) $$ \mathscr{S}_{n,r}=\mathscr{S}_{n,r}(\lambda_{\langle z\rangle})\supset\mathscr{S}_{n,r}(\lambda_{\langle z-1\rangle})\supset\cdots\supset\mathscr{S}_{n,r}(\lambda_{\langle 1\rangle})\supset\mathscr{S}_{n,r}(\lambda_{\langle 0\rangle})=0 $$

で, $\mathscr{S}_{n,r}$-両側加群として $\mathscr{S}_{n,r}(\lambda_{\langle k\rangle})/\mathscr{S}_{n,r}(\lambda_{\langle k-1\rangle})\cong\mathscr{S}_{n,r}(\geq\lambda_{\langle k\rangle})/\mathscr{S}_{n,r}(>\lambda_{\langle k\rangle})$ となるものが取れる。

$\lambda \in \Lambda^+_{n,r}$ に対し, $T^\lambda \in \mathcal{T}_0(\lambda)$ を shape が λ, weight も λ である semi-standard tableau (そのようなものは, 一意的に定まる) とすると, $\varphi_{T^\lambda T^\lambda}$ は M^λ 上 identity map で, M^μ $(\mu \neq \lambda)$ 上 0-map である $\mathscr{S}_{n,r}$ の元となる。$\overline{\varphi}_{T^\lambda T^\lambda}$ を $\varphi_{T^\lambda T^\lambda}$ の $\mathscr{S}_{n,r}(\geq \lambda)/\mathscr{S}_{n,r}(> \lambda)$ における像とするとき, $\overline{\varphi}_{T^\lambda T^\lambda}$ によって生成される $\mathscr{S}_{n,r}(\geq \lambda)/\mathscr{S}_{n,r}(> \lambda)$ の左 (resp. 右) $\mathscr{S}_{n,r}$-部分加群 を $W(\lambda)$ (resp. $W^\sharp(\lambda)$) と表し, $\mathscr{S}_{n,r}$ の **Weyl-加群** と呼ぶ。すると, $\{W(\lambda) \,|\, \lambda \in \Lambda^+_{n,r}\}$ (resp. $\{W^\sharp(\lambda) \,|\, \lambda \in \Lambda^+_{n,r}\}$) が**既約左 (resp. 右) $\mathscr{S}_{n,r}$-加群の完全代表系**を与え (いま, $\mathscr{S}_{n,r}$ は $\mathcal{K}$ 上で考えているので, $\mathscr{S}_{n,r}$ は半単純になることが知られている), さらに, $\mathscr{S}_{n,r}$-両側加群として,

$$W(\lambda) \otimes_{\mathcal{K}} W^\sharp(\lambda) \cong \mathscr{S}_{n,r}(\geq \lambda)/\mathscr{S}_{n,r}(> \lambda) \tag{1.3.3}$$

となる。

cellular algebra の言葉では, 両側イデアルの列 (1.3.2) のことを, **cell chain** といい, $W(\lambda)$ (resp. $W^\sharp(\lambda)$) のことを **cell 加群**という。

ここで挙げた $\mathscr{S}_{n,r}$ の構造は, 後の議論で, 生成元と基本関係式で与えられた代数が $\mathscr{S}_{n,r}$ と同型になることを示す際に用いられます。

§ 2. A 型 $(r = 1)$ の場合

$r = 1$ の場合, $\mathscr{H}_{n,1}$ は A 型 (n 次の対称群 $\mathfrak{S}_n$) の **Iwahori-Hecke algebra** , $\mathscr{S}_{n,1}$ は A 型の **q-Schur algebra** となり, $\mathscr{S}_{n,1}$ が 量子群 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の商代数となっていることを利用して, [DG] によって, $\mathscr{S}_{n,1}$ の生成元と基本関係式による表示が与えられています。一般の r に対する $\mathscr{S}_{n,r}$ の presentation を与える際にも, A 型の場合の結果を利用しますので, この章で必要なことをまとめておきます。

2.1. $P = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}\varepsilon_i$ を $\mathfrak{gl}_m$ の weight lattice とし, $P^\vee = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}h_i$ をその dual weight lattice とする。また, $\langle\, , \,\rangle : P \times P^\vee \to$ を natural pairing (i.e. $\langle \varepsilon_i, h_j \rangle = \delta_{ij}$ によって定まる双線形写像) とする。$\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ とおき, $\Pi = \{\alpha_i \,|\, 1 \leq i \leq m-1\}$ を simple root の集合とする。$Q = \bigoplus_{i=1}^{m-1} \mathbb{Z}\alpha_i$ を root lattice とし, $Q^+ = \bigoplus_{i=1}^{m-1} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$ とおく。P 上の半順序を, $\lambda, \mu \in P$ に対し, $\lambda - \mu \in Q^+$ であるとき, $\lambda \geq \mu$ によって定める。

量子群 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ は, 以下の生成元と基本関係式で定義される $\mathcal{K}$ 上の結合代数である (通常 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ は, $\mathbb{Q}(q)$ 上で定義されますが, 後の都合上, ここでは $\mathcal{K}$ まで係数拡大したものを考えます);

生成元: e_i, f_i $(1 \leq i \leq m-1)$, $K_i^\pm$ $(1 \leq i \leq m)$.
基本関係式:

$$K_iK_j = K_jK_i, \quad K_iK_i^- = K_i^-K_i = 1 \tag{2.1.1}$$

$$K_ie_jK_i^- = q^{\langle \alpha_j, h_i \rangle}e_j \tag{2.1.2}$$

$$K_i f_j K_i^- = q^{-\langle \alpha_j, h_i \rangle} f_j \tag{2.1.3}$$

$$e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij} \frac{K_i K_{i+1}^- - K_i^- K_{i+1}}{q - q^{-1}} \tag{2.1.4}$$

$$e_{i\pm1} e_i^2 - (q + q^{-1}) e_i e_{i\pm1} e_i + e_i^2 e_{i\pm1} = 0 \tag{2.1.5}$$

$$e_i e_j = e_j e_i \qquad (|i - j| \geq 2)$$

$$f_{i\pm1} f_i^2 - (q + q^{-1}) f_i f_{i\pm1} f_i + f_i^2 f_{i\pm1} = 0 \tag{2.1.6}$$

$$f_i f_j = f_j f_i \qquad (|i - j| \geq 2)$$

2.2. V を $\{v_1, \cdots, v_m\}$ を基底とする $\mathcal{K}$ 上の線形空間とすると, $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ は V 上に,

$$e_i \cdot v_j = \begin{cases} v_{j-1} & \text{if } j = i + 1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$f_i \cdot v_j = \begin{cases} v_{j+1} & \text{if } j = i, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$K_i^{\pm} \cdot v_j = \begin{cases} q^{\pm1} v_j & \text{if } j = i, \\ v_j & \text{otherwise.} \end{cases}$$

によって作用する。この $U_q(\mathfrak{gl}_m)$-加群 V のことを $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の**自然表現** という。$U_q(\mathfrak{gl}_m)$ は余積 $\Delta : U_q(\mathfrak{gl}_m) \to U_q(\mathfrak{gl}_m) \otimes U_q(\mathfrak{gl}_m)$ s.t.

$$\Delta(e_i) = e_i \otimes K_i K_{i+1}^- + 1 \otimes e_i,$$
$$\Delta(f_i) = f_i \otimes 1 + K_i^- K_{i+1} \otimes f_i,$$
$$\Delta(K_i^{\pm}) = K_i^{\pm} \otimes K_i^{\pm}.$$

を通じて, $V^{\otimes n}$ に作用する。この作用を $\rho : U_q(\mathfrak{gl}_m) \to \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ で表す。

一方, $\widetilde{T} \in \mathrm{End}(V \otimes V)^{\mathrm{opp}}$ を,

$$(v_i \otimes v_j) \cdot \widetilde{T} = \begin{cases} q\, v_i \otimes v_j & \text{if } i = j, \\ v_j \otimes v_i & \text{if } i < j, \\ v_j \otimes v_i + (q - q^{-1}) v_i \otimes v_j & \text{if } i > j, \end{cases}$$

によって定める。ここで, $\mathrm{End}(V \otimes V)^{\mathrm{opp}}$ は, $\mathrm{End}(V \otimes V)$ の opposite algebra である。さらに, $i = 1, \cdots, n-1$ に対し, $\widetilde{T}_i \in \mathrm{End}(V^{\otimes n})^{\mathrm{opp}}$ を

$$\widetilde{T}_i = \mathrm{id}_V^{\otimes(i-1)} \otimes \widetilde{T} \otimes \mathrm{id}_V^{\otimes(n-1-i)}.$$

によって定める。すると, $\mathscr{H}_{n,1}$ の $V^{\otimes n}$ 上の右作用が, 準同型写像 $\theta : \mathscr{H}_{n,1} \to \mathrm{End}(V^{\otimes n})^{\mathrm{opp}}$ s.t. $\theta(T_i) = \widetilde{T}_i$ によって定まる。このとき, [J] によって, $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ と

$\mathscr{H}_{n,1}$ の間で **double centralizer property** が成り立つ。つまり, 上で定めた $V^{\otimes n}$ 上の $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の作用と $\mathscr{H}_{n,1}$ の作用は互いに可換で,

$$\rho(U_q(\mathfrak{gl}_m)) = \mathrm{End}_{\mathscr{H}_{n,1}}(V^{\otimes n}), \quad \theta(\mathscr{H}_{n,1}) = \mathrm{End}_{U_q(\mathfrak{gl}_m)}(V^{\otimes n})^{\mathrm{opp}}$$

となる。このときの $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の 像 $\rho(U_q(\mathfrak{gl}_m)) = \mathrm{End}_{\mathscr{H}_{n,1}}(V^{\otimes n})$ が A 型の q-Schur algebra $\mathscr{S}_{n,1}$ である。ちなみに, $V^{\otimes n}$ に現れる $U_q(\mathfrak{gl}_m)$-加群としての weight は,

$$\Lambda_{n,1} = \left\{ \mu = (\mu_1, \cdots, \mu_m) \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m} \mu_i = n \right\}$$

($\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_m) \mapsto \sum_{i=1}^m \mu_i \varepsilon_i$ によって $\Lambda_{n,1}$ を P の部分集合と思う) であり, μ-weight space $V^{\otimes n}_\mu$ ($\mathscr{H}_{n,1}$ の作用が $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の作用と可換なことから, $\mathscr{H}_{n,1}$-加群となる) は (1.2.1) で定義した M^μ と右 $\mathscr{H}_{n,1}$-加群として同型となる (ただし, $r = 1$ のとき, $u^+_\mu = 1$ とおく)。よって,

$$\rho(U_q(\mathfrak{gl}_m)) = \mathrm{End}_{\mathscr{H}_{n,1}}(V^{\otimes n}) = \mathrm{End}_{\mathscr{H}_{n,1}}\Big(\bigoplus_{\mu \in \Lambda_{n,1}} V^{\otimes n}_\mu\Big) \cong \mathrm{End}_{\mathscr{H}_{n,1}}\Big(\bigoplus_{\mu \in \Lambda_{n,1}} M^\mu\Big) = \mathscr{S}_{n,1}$$

となるのである。この同型によって得られる, $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ から $\mathscr{S}_{n,1}$ への全射準同型も再び $\rho : U_q(\mathfrak{gl}_m) \to \mathscr{S}_{n,1}$ と書くことにする。

Doty-Giaquinto は, [DG] において, $\mathrm{Ker}\,\rho$ を与える関係式を求めることによって, 以下のような $\mathscr{S}_{n,1}$ の presentation を与えた。

Theorem 2.3 ([DG, Theorem 3.1])**.**

$\mathscr{S}_{n,1}$ は, 生成元 e_i, f_i $(1 \leq i \leq m-1)$, $K^{\pm}_i$ $(1 \leq i \leq m)$ と基本関係式 (2.1.1)–(2.1.6),

$$K_1 K_2 \cdots K_m = q^n \tag{2.3.1}$$

$$(K_i - 1)(K_i - q)(K_i - q^2) \cdots (K_i - q^n) = 0 \tag{2.3.2}$$

によって生成される $\mathcal{K}$ 上の結合代数に同型である。

Remark 2.4. [DG] において, $\mathcal{A}$ 上の q-Schur algebra ${}_{\mathcal{A}}\mathscr{S}_{n,1}$ は, $e_i^k/[k]!$, $f_i^k/[k]!$, $K^{\pm}_j$, $\begin{bmatrix} K_j; 0 \\ t \end{bmatrix}$ $(1 \leq i \leq m-1$, $1 \leq j \leq m$, $k, t \geq 1)$ で生成される $\mathscr{S}_{n,1}$ の $\mathcal{A}$-部分代数と同型であることも示されている。ここで,

$$[k] = \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}}, \quad [k]! = [k][k-1]\cdots[1], \quad \begin{bmatrix} K_j; 0 \\ t \end{bmatrix} = \prod_{s=1}^{t} \frac{K_i q^{-s+1} - K_i^{-1} q^{s-1}}{q^s - q^{-s}}$$

である。また, Cartan part ($K_i^{\pm}$ $(1 \le i \le m)$ で生成される $\mathscr{S}_{n,1}$ の部分代数) を冪等元の集合 $\{1_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_{n,1}\}$ に置き換えた $\mathscr{S}_{n,1}$ の presentation も与えられている (これは, $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の Lusztig's modified form の商にあたるもの) が, ここには書かない (後での r が一般の場合の presentation に (r=1 の場合として) 含まれる)。

§ 3. Presentation of $\mathscr{S}_{n,r}$

3.1. 一般の r に対し, cyclotomic q-Schur algebra $\mathscr{S}_{n,r}$ の生成元と基本関係式による表示を与えたいのですが, 一般の r に対し, $\mathscr{S}_{n,r}$ は量子群の商代数となっているわけではありません。しかし, Du-Rui [DR] によって構成された $\mathscr{S}_{n,r}$ の Borel 部分代数と, A 型の q-Schur algebra の Borel 部分代数との間の同型を用いることによって, $\mathscr{S}_{n,r}$ の生成元としてどのようなものをとれば良いか分かります。そこで, まずそれぞれの Borel 部分代数について復習します。

以下, $m = n \cdot r$ とおく。これは, A 型の q-Schur algebra $\mathscr{S}_{n,1}$ の Borel 部分代数と $\mathscr{S}_{n,r}$ の Borel 部分代数とが同型であることを言うのに必要な条件です。

3.2. まず, A 型の q-Schur algebra $\mathscr{S}_{n,1}$ の Borel 部分代数を考えます。$U_q^{\ge 0}$ (resp. $U_q^{\le 0}$) を $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の Borel 部分代数, つまり, $\{e_i, K_j^{\pm} \mid 1 \le i \le m-1,\, 1 \le j \le m\}$ (resp. $\{f_i, K_j^{\pm} \mid 1 \le i \le m-1,\, 1 \le j \le m\}$) で生成される $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の部分代数とする。全射 $\rho : U_q(\mathfrak{gl}_m) \to \mathscr{S}_{n,1}$ における $U_q^{\ge 0}$ (resp. $U_q^{\le 0}$) の像を $\mathscr{S}_{n,1}^{\ge 0}$ (resp. $\mathscr{S}_{n,1}^{\le 0}$) とする。すると, 明らかに, $\mathscr{S}_{n,1} = \mathscr{S}_{n,1}^{\le 0} \cdot \mathscr{S}_{n,r}^{\ge 0}$ となる。Du-Rui は, 一般の r に対し, $\mathscr{S}_{n,r}$ の Borel 部分代数を構成し, 以下のことを示しました。

Theorem 3.3 (Du-Rui [DR]). ある $\mathscr{S}_{n,r}$ の部分代数 $\mathscr{S}_{n,r}^{\le 0}$, $\mathscr{S}_{n,r}^{\ge 0}$ が存在して,

$$\mathscr{S}_{n,r} = \mathscr{S}_{n,r}^{\le 0} \cdot \mathscr{S}_{n,r}^{\ge 0}$$

と書ける。さらに, 同型写像

$$\mathcal{F}^{\le 0} : \mathscr{S}_{n,1}^{\le 0} \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}_{n,r}^{\le 0}$$
$$\mathcal{F}^{\ge 0} : \mathscr{S}_{n,1}^{\ge 0} \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}_{n,r}^{\ge 0}$$

が存在する。

Remark 3.4. 実際には, [PW] において, A 型の場合に $\mathscr{S}_{n,1}$ の Borel 部分代数 $\mathscr{S}_{n,1}^{\ge 0}$, $\mathscr{S}_{n,1}^{\le 0}$ が, $\mathscr{S}_{n,1}$ の元を用いて具体的に構成されており, その構成と, Du-Rui の $\mathscr{S}_{n,r}$ の Borel 部分代数の構成との間で同型写像が得られています。

3.5. Theorem 3.3 より, $\mathscr{S}_{n,r}$ は (上下の) Borel 部分代数 $\mathscr{S}_{n,r}^{\le 0}$ と $\mathscr{S}_{n,r}^{\ge 0}$ の張り合わせによって得られることが分かり, さらにそれぞれの Borel 部分代数は, A 型の q-Schur algebra の Borel 部分代数と同型なので, 量子群 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の Borel 部分代数の商代

数となっています。つまり, $\mathscr{S}_{n,r}$ は, $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の生成元 e_i, f_i $(1 \le i \le m-1)$, $K_i^{\pm}$ $(1 \le i \le m)$ を用いて表すことができることが分かります。ただし, (上下の) Borel 部分代数の張り合わせ方が, A 型の場合と違うので, $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の基本関係式の中で, e_i と f_j の交換関係 (2.1.4) は, $\mathscr{S}_{n,r}$ の中では満たされません。そこで, $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の代わりに, 以下のような生成元と基本関係式で定義される $\mathcal{K}$ 上の結合代数 $\widetilde{U}_q = \widetilde{U}_q(\mathfrak{gl}_m)$ を考えます;

生成元: e_i, f_i $(1 \le i \le m-1)$, $K_i^{\pm}$ $(1 \le i \le m)$, τ_i $(1 \le i \le m-1)$.
基本関係式:

$$K_iK_j = K_jK_i, \quad K_iK_i^- = K_i^-K_i = 1, \tag{3.5.1}$$

$$K_ie_jK_i^- = q^{\langle \alpha_j, h_i\rangle}e_j, \tag{3.5.2}$$

$$K_if_jK_i^- = q^{-\langle \alpha_j, h_i\rangle}f_j, \tag{3.5.3}$$

$$K_i\tau_jK_i^- = \tau_j, \tag{3.5.4}$$

$$e_if_j - f_je_i = \delta_{ij}\tau_i \tag{3.5.5}$$

$$\begin{aligned} &e_{i\pm1}e_i^2 - (q+q^{-1})e_ie_{i\pm1}e_i + e_i^2e_{i\pm1} = 0, \\ &e_ie_j = e_je_i \qquad (|i-j| \ge 2), \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

$$\begin{aligned} &f_{i\pm1}f_i^2 - (q+q^{-1})f_if_{i\pm1}f_i + f_i^2f_{i\pm1} = 0, \\ &f_if_j = f_jf_i \qquad (|i-j| \ge 2). \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

また, $\widetilde{U}_q^+$ (resp. $\widetilde{U}_q^-$, $\widetilde{U}_q^0$) を $\{e_i \,|\, 1 \le i \le m-1\}$, (resp. $\{f_i \,|\, 1 \le i \le m-1\}$, $\{K_i^{\pm} \,|\, 1 \le i \le m\}$) によって生成される $\widetilde{U}_q$ の部分代数とする。

Remark 3.6. $\widetilde{I}$ を $\{\tau_i - \frac{K_iK_{i+1}^- - K_i^-K_{i+1}}{q-q^{-1}} \,|\, 1 \le i \le m-1\}$ で生成される $\widetilde{U}_q$ の両側イデアルとすると, 明らかに $\widetilde{U}_q/\widetilde{I} \cong U_q(\mathfrak{gl}_m)$ である。

3.7. Theorem 3.3 より, $\widetilde{U}_q$ から $\mathscr{S}_{n,r}$ への全射準同型写像 $\widetilde{\rho} : \widetilde{U}_q \to \mathscr{S}_{n,r}$ を以下のように定義できることが分かる;

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho}(e_i) &= \mathcal{F}^{\ge 0} \circ \rho(e_i), \\ \widetilde{\rho}(f_i) &= \mathcal{F}^{\le 0} \circ \rho(f_i), \\ \widetilde{\rho}(K_i^{\pm}) &= \mathcal{F}^{\ge 0} \circ \rho(K_i^{\pm}) = \mathcal{F}^{\le 0} \circ \rho(K_i^{\pm}), \\ \widetilde{\rho}(\tau_i) &= \widetilde{\rho}(e_i)\widetilde{\rho}(f_i) - \widetilde{\rho}(f_i)\widetilde{\rho}(e_i). \end{aligned}$$

よって, $\operatorname{Ker}\widetilde{\rho}$ を与える関係式を求めれば, $\mathscr{S}_{n,r}$ の presentation を与えることができる。

3.8. 実際には, $\widetilde{\rho}(e_i)$, $\widetilde{\rho}(f_i)$, $\widetilde{\rho}(K_i^{\pm})$ を $\mathscr{S}_{n,r}$ の元で具体的に書くことができる ([W, 6.2 及び Prop. 6.4]) ので, $\widetilde{\rho}(e_i)\widetilde{\rho}(f_i) - \widetilde{\rho}(f_i)\widetilde{\rho}(e_i)$ を $\mathscr{S}_{n,r}$ の中で計算することにより

(かなり面倒な計算だが), $\widetilde{\rho}(\tau_i)$ も $\mathscr{S}_{n,r}$ の元で具体的に記述することができる。$\widetilde{\rho}(\tau_i)$ を記述するために, いくつかの準備をする。

1 から m までの整数の集合 $\{1,2,\cdots,m\}$ を, 以下によって $\Gamma = \{(i,k)\,|\,1\le i\le n,\ 1\le k\le r\}$ ($m=n\cdot r$ に注意) と同一視する:

$$\Gamma \ni (i,k) \mapsto n\cdot k + i \in \{1,2,\cdots,m\}.$$

また, $\Gamma' = \Gamma\setminus\{(n,r)\} \xleftrightarrow{1:1} \{1,2,\cdots,m-1\}$ とおく。この同一視によって, $e_{(i,k)} = e_{n\cdot k+i}$, $f_{(i,k)} = f_{n\cdot k+i}$, $K^{\pm}_{(i,k)} = K^{\pm}_{n\cdot k+i}$, $\tau_{(i,k)} = \tau_{n\cdot k+i}$ とおく。

また, $\mu\in\Lambda_{n,r}$, $(i,k)\in\Gamma$ に対し, $\sigma^{\mu}_{(i,k)}\in\mathscr{S}_{n,r}$ を,

$$\sigma^{\mu}_{(i,k)}(m_\nu\cdot h) = \delta_{\mu,\nu}\big(m_\mu(L_{N+1}+\cdots+L_{N+\mu^{(k)}_i})\big)\cdot h \qquad (\nu\in\Lambda_{n,r},\ h\in\mathscr{H}_{n,r})$$

によって定める。ここで, $N = \sum_{l=1}^{k-1}|\mu^{(l)}| + \sum_{j=1}^{i-1}\mu^{(k)}_j$ である。このとき, m_μ と $(L_{N+1}+\cdots+L_{N+\mu^{(k)}_i})$ とは可換になるので, 上の定義は well-defined である。さらに,

$$\sigma_{(i,k)} = \sum_{\mu\in\Lambda_{n,r}}\sigma^{\mu}_{(i,k)}$$

とおく。$\sigma_{(i,k)}$ は $\mathscr{S}_{n,r}$ の **Jucys-Murphy element** と呼ばれる元である (その性質については [M3] 参照)。すると, 以下のことが成り立つ ([W, Prop. 6.4]);

(3.8.1)
$$\widetilde{\rho}(\tau_{(i,k)}) = \begin{cases} -Q_{k+1}\dfrac{\kappa_{(n,k)}\kappa^{-}_{(1,k+1)} - \kappa^{-}_{(n,k)}\kappa_{(1,k+1)}}{q-q^{-1}} \\ \qquad +\kappa_{(n,k)}\kappa^{-}_{(1,k+1)}(q^{-1}\sigma_{(n,k)} - q\sigma_{(1,k+1)}) & (\text{ if } i=n), \\ \dfrac{\kappa_{(i,k)}\kappa^{-}_{(i+1,k)} - \kappa^{-}_{(i,k)}\kappa_{(i+1,k)}}{q-q^{-1}} & (\text{ otherwise }), \end{cases}$$

ここで, $\kappa_{(i,k)} = \widetilde{\rho}(K_{(i,k)})$ である。

一方で, Theorem 3.3 より, $(i,k)\in\Gamma$ に対し, $\sigma_{(i,k)}\in\mathscr{S}_{n,r}$ が, $\widetilde{\rho}(\widetilde{U}^{-}_q\widetilde{U}^{0}_q\widetilde{U}^{+}_q)$ の元として表せることが分かります。そこで, $g_{(i,k)}(e,f)\in\widetilde{U}^{-}_q\widetilde{U}^{0}_q\widetilde{U}^{+}_q$ を $\widetilde{\rho}(g_{(i,k)}(e,f)) = \sigma_{(i,k)}$ となるようなものとして一つ固定します。さらに, $(i,k)\in\Gamma'$ に対し, $\eta_{(i,k)}\in\widetilde{U}^{-}_q\widetilde{U}^{0}_q\widetilde{U}^{+}_q$ を

(3.8.2)
$$\eta_{(i,k)} = \begin{cases} -Q_{k+1}\dfrac{K_{(n,k)}K^{-}_{(1,k+1)} - K^{-}_{(n,k)}K_{(1,k+1)}}{q-q^{-1}} \\ \qquad +K_{(n,k)}K^{-}_{(1,k+1)}(q^{-1}g_{(n,k)}(e,f) - qg_{(1,k+1)}(e,f)) & (\text{ if } i=n), \\ \dfrac{K_{(i,k)}K^{-}_{(i+1,k)} - K^{-}_{(i,k)}K_{(i+1,k)}}{q-q^{-1}} & (\text{ otherwise }), \end{cases}$$

とおけば, (3.8.1) より,

$$\tau_{(i,k)} - \eta_{(i,k)} \qquad \big((i,k) \in \mathit{\Gamma}'\big) \tag{3.8.3}$$

が $\operatorname{Ker}\widetilde{\rho}$ に含まれることが分かります。また, 次の元が $\operatorname{Ker}\widetilde{\rho}$ に含まれることも確認できます;

$$K_1K_2\cdots K_m - q^n, \tag{3.8.4}$$

$$(K_i-1)(K_i-q)(K_i-q^2)\cdots(K_i-q^n) \qquad \big(1 \le i \le m\big). \tag{3.8.5}$$

実際には, (3.8.3)–(3.8.5) が $\operatorname{Ker}\widetilde{\rho}$ を生成することになります。つまり, 次の定理が成り立ちます。

Theorem 3.9 ([W, Theorem 7.16 (iii)]).
$\mathscr{S}_{n,r}$ は, $e_i,\ f_i\ (1 \le i \le m-1),\ K_i^{\pm}\ (1 \le i \le m)$ を生成元とし, 基本関係式 (3.5.1)–(3.5.3), (3.5.6), (3.5.7),

$$e_{(i,k)}f_{(j,l)} - f_{(j,l)}e_{(i,k)} = \delta_{(i,k),(j,l)}\eta_{(i,k)} \tag{3.9.1}$$

$$K_1K_2\cdots K_m = q^n \tag{3.9.2}$$

$$(K_i-1)(K_i-q)(K_i-q^2)\cdots(K_i-q^n) = 0 \tag{3.9.3}$$

で定義される $\mathcal{K}$ 上の結合代数に同型である。

3.10. 上の定理の生成元と基本関係式で定義される代数を $U_{n,r}$ とすると, (3.8.3)–(3.8.5) が $\operatorname{Ker}\widetilde{\rho}$ に含まれていることより, 全射準同型 $\psi : U_{n,r} \to \mathscr{S}_{n,r}$ で以下の可換図式が成り立つものが存在することが容易に分かる

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{U}_q \arrow[r, twoheadrightarrow, "\widetilde{\rho}"] \arrow[d, twoheadrightarrow] & \mathscr{S}_{n,r} \\
U_{n,r} \arrow[ur, twoheadrightarrow, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

ここで, $\eta_{(i,k)} \in \widetilde{U}_q^-\widetilde{U}_q^0\widetilde{U}_q^+$ より, $\eta_{(i,k)}$ は $e_i,\ f_i\ (1 \le i \le m-1),\ K_i^{\pm}\ (1 \le i \le m)$ によって表されることと, $U_{n,r}$ は, $\widetilde{U}_q$ を (3.8.3)–(3.8.5) で生成される $\widetilde{U}_q$ の両側イデアルで割ったものと同型であることに注意する。

よって, Theorem 3.9 を示すには, $\psi : U_{n,r} \to \mathscr{S}_{n,r}$ が同型写像であることを示せばよいが, それを示すには, もう少し議論が必要である。

3.11. $\psi : U_{n,r} \to \mathscr{S}_{n,r}$ が同型写像であることを示すために, 以下のような生成元と基本関係式で定義される $\mathcal{K}$ 上の結合代数 $\mathcal{S}_{n,r}$ を考えます;

> **生成元:** $E_{(i,k)}, F_{(i,k)}$ $((i,k) \in \varGamma')$, 1_λ $(\lambda \in \varLambda_{n,r})$.
> **基本関係式:**

$$1_\lambda 1_\mu = \delta_{\lambda,\mu} 1_\lambda, \quad \sum_{\lambda \in \varLambda_{n,r}} 1_\lambda = 1, \tag{3.11.1}$$

$$E_{(i,k)} 1_\lambda = \begin{cases} 1_{\lambda+\alpha_{(i,k)}} E_{(i,k)} & \text{if } \lambda + \alpha_{(i,k)} \in \varLambda_{n,r}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{3.11.2}$$

$$F_{(i,k)} 1_\lambda = \begin{cases} 1_{\lambda-\alpha_{(i,k)}} F_{(i,k)} & \text{if } \lambda - \alpha_{(i,k)} \in \varLambda_{n,r}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{3.11.3}$$

$$1_\lambda E_{(i,k)} = \begin{cases} E_{(i,k)} 1_{\lambda-\alpha_{(i,k)}} & \text{if } \lambda - \alpha_{(i,k)} \in \varLambda_{n,r}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{3.11.4}$$

$$1_\lambda F_{(i,k)} = \begin{cases} F_{(i,k)} 1_{\lambda+\alpha_{(i,k)}} & \text{if } \lambda + \alpha_{(i,k)} \in \varLambda_{n,r}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{3.11.5}$$

$$E_{(i,k)} F_{(j,l)} - F_{(j,l)} E_{(i,k)} = \delta_{(i,k),(j,l)} \sum_{\lambda \in \varLambda_{n,r}} \eta^\lambda_{(i,k)}, \tag{3.11.6}$$

$$\begin{aligned} &E_{(i\pm1,k)} (E_{(i,k)})^2 - (q+q^{-1}) E_{(i,k)} E_{(i\pm1,k)} E_{(i,k)} + (E_{(i,k)})^2 E_{(i\pm1,k)} = 0, \\ &E_{(i,k)} E_{(j,l)} = E_{(j,l)} E_{(i,k)} \qquad (|(p_k+i)-(p_l+j)| \geq 2), \end{aligned} \tag{3.11.7}$$

$$\begin{aligned} &F_{(i\pm1,k)} (F_{(i,k)})^2 - (q+q^{-1}) F_{(i,k)} F_{(i\pm1,k)} F_{(i,k)} + (F_{(i,k)})^2 F_{(i\pm1,k)} = 0, \\ &F_{(i,k)} F_{(j,l)} = F_{(j,l)} F_{(i,k)} \qquad (|(p_k+i)-(p_l+j)| \geq 2), \end{aligned} \tag{3.11.8}$$

> ここで, $\eta^\lambda_{(i,k)}$ も $\eta_{(i,k)}$ (in (3.8.2)) と同様な方法で $E_{(i,k)}$, $F_{(i,k)}$ $\big((i,k) \in \varGamma'\big)$, 1_λ $(\lambda \in \varLambda_{n,r})$ によって表される元である。詳しくは [W, 7.1-7.4] を参照)。

3.12. 実際には, $U_{n,r}$ と $\mathcal{S}_{n,r}$ とが同型になることが分かる ([W, Prop. 7.12])。よって以下のような可換図式を得る。

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{U}_q \arrow[r, twoheadrightarrow, "\widetilde{\rho}"] \arrow[d, twoheadrightarrow] & \mathscr{S}_{n,r} \\ U_{n,r} \cong & \mathcal{S}_{n,r} \arrow[ur, twoheadrightarrow, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

従って, 全射準同型 $\Phi : \mathcal{S}_{n,r} \to \mathscr{S}_{n,r}$ が同型写像であることが分かれば, Theorem 3.9 が示され, さらに, $\mathcal{S}_{n,r}$ の生成元と基本関係式も $\mathscr{S}_{n,r}$ の presentation を与えることになります。

3.13. 全射準同型 $\Phi : \mathcal{S}_{n,r} \to \mathscr{S}_{n,r}$ が同型写像であることを示すために, $\mathcal{S}_{n,r}$ の構造を少し調べておく必要があります。つまり, $\mathscr{S}_{n,r}$ の Weyl 加群 $W(\lambda)$, 及び, cell chain (1.3.2) にあたるものを $\mathcal{S}_{n,r}$ に対し与え, それらを比べることによって, Φ が同型写像であることを示します。

3.14. 以下, $\mathcal{S}_{n,r}$ の構造について調べていきます。

まず, $\mathcal{S}^+_{n,r}$ (resp. $\mathcal{S}^-_{n,r}$, $\mathcal{S}^0_{n,r}$) を $\{E_{(i,k)} \,|\, (i,k) \in \varGamma'\}$ (resp. $\{F_{(i,k)} \,|\, (i,k) \in \varGamma'\}$, $\{1_\lambda \,|\, \lambda \in \varLambda_{n,r}\}$) によって生成される $\mathcal{S}_{n,r}$ の部分代数とする。すると, 以下のことが成り立つ ([W, Prop. 2.6]);

$$\mathcal{S}_{n,r} = \mathcal{S}^-_{n,r} \cdot \mathcal{S}^0_{n,r} \cdot \mathcal{S}^+_{n,r}. \tag{3.14.1}$$

つまり, $\mathcal{S}_{n,r}$ は三角分解を持つ。ちなみに, $\mathcal{S}^-_{n,r}$ (resp. $\mathcal{S}^+_{n,r}$, $\mathcal{S}^0_{n,r}$) は 全射準同型 $\widetilde{U}_q \to \mathcal{S}_{n,r}$ における $\widetilde{U}^-_q$ (resp. $\widetilde{U}^+_q$, $\widetilde{U}^0_q$) の像と一致する。

$\lambda \in \varLambda_{n,r}$ に対し, $\mathcal{S}_{n,r}$ の部分空間

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{n,r}(\geq \lambda) &= \big\{ x1_\mu y \;\big|\; x \in \mathcal{S}^-_{n,r},\, y \in \mathcal{S}^+_{n,r},\, \mu \in \varLambda_{n,r} \text{ s.t. } \mu \geq \lambda \big\}, \\
\mathcal{S}_{n,r}(> \lambda) &= \big\{ x1_\mu y \;\big|\; x \in \mathcal{S}^-_{n,r},\, y \in \mathcal{S}^+_{n,r},\, \mu \in \varLambda_{n,r} \text{ s.t. } \mu > \lambda \big\}
\end{aligned}$$

を考えると, $\mathcal{S}_{n,r}$ の基本関係式 と (3.14.1) より, $\mathcal{S}_{n,r}(\geq \lambda)$, $\mathcal{S}_{n,r}(> \lambda)$ ともに, $\mathcal{S}_{n,r}$ の両側イデアルになることが分かります。このとき, 次のことが成り立つ ([W, Lemma 7.10][†]) ;

$$\varLambda^+_{n,r} = \big\{ \lambda \in \varLambda_{n,r} \;\big|\; 1_\lambda \notin \mathcal{S}_{n,r}(> \lambda) \big\} = \big\{ \lambda \in \varLambda_{n,r} \;\big|\; \mathcal{S}_{n,r}(\geq \lambda) \neq \mathcal{S}_{n,r}(> \lambda) \big\}. \tag{3.14.2}$$

そこで, $\lambda \in \varLambda^+_{n,r}$ に対し, $\overline{1}_\lambda$ $\big($ 1_λ の $\mathcal{S}_{n,r}(\geq \lambda)/\mathcal{S}_{n,r}(> \lambda)$ における像$\big)$ によって生成される $\mathcal{S}_{n,r}(\geq \lambda)/\mathcal{S}_{n,r}(> \lambda)$ の左 (resp. 右) $\mathcal{S}_{n,r}$-部分加群を $\Delta(\lambda)$ (resp. $\Delta^\sharp(\lambda)$) とする。三角分解 (3.14.1) と $\mathcal{S}_{n,r}$ の基本関係式より, 線形空間として

$$\Delta(\lambda) = \mathcal{S}^-_{n,r} \cdot \overline{1}_\lambda, \quad \Delta^\sharp(\lambda) = \overline{1}_\lambda \cdot \mathcal{S}^+_{n,r}$$

となることが分かる。このことから, $\mathcal{S}_{n,r}$-両側加群としての全射準同型

$$\begin{aligned}
&\Delta(\lambda) \otimes_{\mathcal{K}} \Delta^\sharp(\lambda) \to \mathcal{S}_{n,r}(\geq \lambda)/\mathcal{S}_{n,r}(> \lambda) \\
&\qquad \text{s.t. } \overline{x1_\lambda} \otimes \overline{1_\lambda y} \mapsto \overline{x1_\lambda y} \quad \text{for} \quad x \in \mathcal{S}^-_{n,r},\ y \in \mathcal{S}^+_{n,r}
\end{aligned} \tag{3.14.3}$$

が得られる。

[†][W] の中では, $\varLambda^+_{n,r}$ を (3.14.2) の右辺によって定まる $\varLambda_{n,r}$ の部分集合として定義し, [W, Lemma 7.10] で, それが size が n の r-partition の集合と一致することを示していることに注意。

また, $\Lambda_{n,r}^+$ 上の全順序 $\Lambda_{n,r}^+ = \{\lambda_{\langle 1\rangle}, \lambda_{\langle 2\rangle}, \cdots, \lambda_{\langle z\rangle}\}$ ((1.3.1) で考えたもの) を考えると, $\mathcal{S}_{n,r}$ の両側イデアルの列

$$\mathcal{S}_{n,r} = \mathcal{S}_{n,r}(\lambda_{\langle z\rangle}) \supset \mathcal{S}_{n,r}(\lambda_{\langle z-1\rangle}) \supset \cdots \supset \mathcal{S}_{n,r}(\lambda_{\langle 1\rangle}) \supset \mathcal{S}_{n,r}(\lambda_{\langle 0\rangle}) = 0 \tag{3.14.4}$$

で, $\mathcal{S}_{n,r}$-両側加群として $\mathcal{S}_{n,r}(\lambda_{\langle k\rangle})/\mathcal{S}_{n,r}(\lambda_{\langle k-1\rangle}) \cong \mathcal{S}_{n,r}(\geq \lambda_{\langle k\rangle})/\mathcal{S}_{n,r}(> \lambda_{\langle k\rangle})$ となるものが取れる。さらに以下のことが成り立ちます。

Theorem 3.15 ([W, Theorem 2.16])**.**
$\lambda \in \Lambda_{n,r}^+$ に対し, $\Delta(\lambda)$ (resp. $\Delta^\sharp(\lambda)$) は一意的な極大部分加群 $\operatorname{rad}\Delta(\lambda)$ (resp. $\operatorname{rad}\Delta^\sharp(\lambda)$) を持つ。さらに, $L(\lambda) = \Delta(\lambda)/\operatorname{rad}\Delta(\lambda)$ (resp. $L^\sharp(\lambda) = \Delta^\sharp(\lambda)/\operatorname{rad}\Delta^\sharp(\lambda)$) とおくと, $\{L(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda_{n,r}^+\}$ (resp. $\{L^\sharp(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda_{n,r}^+\}$) は, 左 (resp. 右) 既約 $\mathcal{S}_{n,r}$-加群の完全代表系を与える。

3.16. 全射準同型 $\Phi : \mathcal{S}_{n,r} \to \mathscr{S}_{n,r}$ が同型写像であることを示すために, $\mathscr{S}_{n,r}$, $\mathcal{S}_{n,r}$ それぞれの両側イデアルの列 (1.3.2) と (3.14.4) を比べて, $\Lambda_{n,r}^+$ の全順序に関する帰納法によって, $\mathscr{S}_{n,r}(\lambda_{\langle k\rangle}) \cong \mathcal{S}_{n,r}(\lambda_{\langle k\rangle})$ を示すということをやります。それは, 以下のような感じになります。

まず, 全射準同型 $\widetilde{\rho} : \widetilde{U}_q \to \mathscr{S}_{n,r}$ (resp. $\widetilde{U}_q \to \mathcal{S}_{n,r}$) を通じて $W(\lambda)$ (resp. $\Delta(\lambda)$) を $\widetilde{U}_q$-加群と思うと, $W(\lambda)$, $\Delta(\lambda)$ ともに, highest weight λ の highest weight 加群になることが分かる (highest weight 加群の定義については, [W, §1] を参照。量子群の場合と同様です) 。このことと, $W(\lambda)$ が既約 $\mathscr{S}_{n,r}$ 加群であることから, $\widetilde{U}_q$-加群 (あるいは $\mathcal{S}_{n,r}$-加群) としての全射準同型 $\Delta(\lambda) \to W(\lambda)$ が存在することが分かる。一方で, 帰納法の仮定から, $\mathcal{S}_{n,r}$-両側加群として, $\mathscr{S}_{n,r}(> \lambda) \cong \mathcal{S}_{n,r}(> \lambda)$ となり, このことと, $W(\lambda)$, $\Delta(\lambda)$ の構造から, 実は 全射準同型 $\Delta(\lambda) \to W(\lambda)$ が同型写像であることが分かる。よって, $\Delta(\lambda)$ も左既約 $\mathcal{S}_{n,r}$-加群となる。同様にして $\Delta^\sharp(\lambda)$ も右既約 $\mathcal{S}_{n,r}$-加群となる。よって, $\mathcal{S}_{n,r}$-両側加群としての全射準同型 (3.14.3) は同型写像となる。以上のことと, (1.3.3) とを合わせれば, $\mathcal{S}_{n,r}(\geq \lambda)/\mathcal{S}_{n,r}(> \lambda) \cong \mathscr{S}_{n,r}(\geq \lambda)/\mathscr{S}_{n,r}(> \lambda)$ となることが分かる。帰納法の仮定より, $\mathcal{S}_{n,r}(> \lambda) \cong \mathscr{S}_{n,r}(> \lambda)$ だったので, $\mathcal{S}_{n,r}(\geq \lambda) \cong \mathscr{S}_{n,r}(\geq \lambda)$ となり, これを繰り返すことによって, $\mathcal{S}_{n,r} \cong \mathscr{S}_{n,r}$ を得る。

以上によって, cyclotomic q-Schur algebra $\mathscr{S}_{n,r}$ の presentation が得られたことになります。最後に定理 ($\mathscr{S}_{n,r}$ の presentation) をもう一度書いておきます。$\mathcal{A}$ 上の cyclotomic q-Schur algebra ${}_{\mathcal{A}}\mathscr{S}_{n,r}$ に関する主張は説明していませんが, 基本的には, 必要な議論が $\mathcal{A}$ 上でも成立しているということです。

Theorem 3.17 ([W, Theorem 7.16])**.**

(i) *$\mathscr{S}_{n,r}$ は, 生成元 $E_{(i,k)}, F_{(i,k)}$ $\big((i,k) \in \Gamma'\big)$, 1_λ $(\lambda \in \Lambda_{n,r})$ と基本関係式 (3.11.1)–(3.11.8) によって定義される $\mathcal{K}$ 上の結合代数と同型である。*

さらに, ${}_{\mathcal{A}}\mathscr{S}_{n,r}$ は, $E^{l}_{(i,k)}/[l]!$, $F^{l}_{(i,k)}/[l]!$ $\big((i,k) \in \Gamma',\, l \geq 1\big)$, 1_λ $(\lambda \in \Lambda_{n,r})$ で生成される $\mathscr{S}_{n,r}$ の $\mathcal{A}$-部分代数と同型である。

(ii) $\mathscr{S}_{n,r}$ は, 生成元 e_i, f_i $(1 \leq i \leq m-1)$, $K_i^{\pm}$ $(1 \leq i \leq m)$ と基本関係式 (3.5.1)$-$(3.5.3), (3.5.6), (3.5.7) *and* (3.9.1)$-$(3.9.3) によって定義される $\mathcal{K}$ 上の結合代数と同型である。

さらに, ${}_{\mathcal{A}}\mathscr{S}_{n,r}$ は, $e_i^k/[k]!$, $f_i^k/[k]!$, $K_j^{\pm}$, $\begin{bmatrix} K_j;0 \\ t \end{bmatrix}$ $(1 \leq i \leq m-1,\, 1 \leq j \leq m,\, k,t \geq 1)$ で生成される $\mathscr{S}_{n,r}$ の $\mathcal{A}$-部分代数と同型である。

References

[DJM] R. Dipper, G. James, and A. Mathas, Cyclotomic q-Schur algebras, *Math. Z.* **229** (1998), 385-416.

[DG] S. Doty and A. Giaquinto, Presenting Schur Algebras, *International Mathematical Research Notices* **36** (2002) 1907-1944.

[DR] J. Du and H. Rui, Borel type subalgebras of the q-Schur^m algebra, *J. Algebra* **213** (1999), 567-595.

[GL] J. J. Graham and G. I. Lehrer, Cellular algebras, *Invent. Math.* **123** (1996), 1-34.

[J] M. Jimbo, A q-analogue of $U(\mathfrak{gl}(N+1))$, Hecke algebra and the Yang-Baxter equation, *Lett. Math. Phys.* **11** (1986), 247-252.

[M1] A. Mathas, *Iwahori-Hecke algebras and Schur algebras of the symmetric group*, *University Lecture Series* Vol.**15**, Amer. Math. Soc. 1999.

[M2] A. Matahs, The representation theory of the Ariki-Koike and cyclotomic q-Schur algebras. In "*Representation theory of algebraic groups and quantum groups*", *Adv. Stud. Pure Math.* Vol. **40**, Math. Soc. Japan, Tokyo 2004, pp. 261-320.

[M3] A. Mathas, Seminormal forms and Gram determinants for cellular algebras, *J. Reine Angew. Math.* **619** (2008), 141-173

[PW] B. Parshall and J.-P. Wang, *Quantum linear groups*, *Mem. Amer. Math. Soc.* vol.**89**, No. 439, (1991).

[W] K. Wada, Presenting cyclotomic q-Schur algebras, to appear in Nagoya Math. J. arXiv:0908.3306

Graduate School of Mathematics Nagoya University, Furocho, Chikusaku, Nagoya, Japan 464-8602

E-mail address: kentaro-wada@math.nagoya-u.ac.jp