変形カレント Lie 代数の有限次元既約表現

和田 堅太郎 (信州大学)

§ 0. Introduction

量子変形カレント代数は, cyclotomic q-Schur 代数の表現論を調べている過程で [W1] において導入された。それは, 対称群に付随した q-Schur 代数が一般線形 Lie 代数に付随した量子群の商代数であるという知られている事実 (これは, 対称群に付随した Iwahori-Hecke 代数と量子群の間の q-Schur-Weyl 双対から従う) と, cyclotomic q-Schur 代数が q-Schur 代数の一般化とみなせることから, cyclotomic q-Schur 代数の表現論の背後にも, 量子群にあたる良い構造があると期待して調べていった結果, 現れたものである。

変形カレント Lie 代数*は量子カレント代数のパラメータ q を 1 にすることによって得られる Lie 代数であり, 一般線形 Lie 代数 $\mathfrak{gl}_m$ のカレント Lie 代数 $\mathfrak{gl}_m[x]$ の変形パラメータ $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_{m-1}) \in \mathbb{C}^{m-1}$ を持った deformation である。カレント Lie 代数の表現論については, Chari-Pressley を中心に多くの結果が知られているが, 変形カレント Lie 代数についても, 類似の結果が成り立つことが期待できる。この報告集では, [W2] で得られた, 変形カレント Lie 代数の有限次元既約表現の分類について解説する。

§ 1. 変形カレント Lie 代数 $\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x]$ と $\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x]$

この節では, まず変形カレント Lie 代数を定義し, その基本的な性質および表現論 (特に最高ウェイト表現) についてまとめる。基本的な概念は全てカレント Lie 代数におけるものと全く同様である。

Definition 1.1. $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_{m-1}) \in \mathbb{C}^{m-1}$ を取る。**変形カレント Lie 代数** $\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x]$ とは, 以下の生成元と基本関係式によって定まる $\mathbb{C}$ 上の *Lie* 代数である*:*

生成元: $\mathcal{X}_{i,t}^{\pm}$, $\mathcal{J}_{i,t}$ *(*$1 \leq i \leq m-1$, $t \geq 0$*).*

基本関係式:

(L1) $\quad [\mathcal{J}_{i,s}, \mathcal{J}_{j,t}] = 0,$

(L2) $\quad [\mathcal{J}_{j,s}, \mathcal{X}_{i,t}^{\pm}] = \pm a_{ji} \mathcal{X}_{i,s+t}^{\pm},$

(L3) $\quad [\mathcal{X}_{i,t}^{+}, \mathcal{X}_{j,s}^{-}] = \delta_{ij} (\mathcal{J}_{i,s+t} - Q_i \mathcal{J}_{i,s+t+1}),$

(L4) $\quad [\mathcal{X}_{i,t}^{\pm}, \mathcal{X}_{j,s}^{\pm}] = 0 \quad$ *if* $j \neq i \pm 1,$

(L5) $\quad [\mathcal{X}_{i,t+1}^{+}, \mathcal{X}_{i\pm 1,s}^{+}] = [\mathcal{X}_{i,t}^{+}, \mathcal{X}_{i\pm 1,s+1}^{+}], \quad [\mathcal{X}_{i,t+1}^{-}, \mathcal{X}_{i\pm 1,s}^{-}] = [\mathcal{X}_{i,t}^{-}, \mathcal{X}_{i\pm 1,s+1}^{-}],$

*この報告集で扱っているものは, [W1] で導入したものとは少し違う。[W1] で導入したものとの関係は [W2] を参照。

(L6) $\quad [\mathcal{X}^+_{i,s},[\mathcal{X}^+_{i,t},\mathcal{X}^+_{i\pm1,u}]]=[\mathcal{X}^-_{i,s},[\mathcal{X}^-_{i,t},\mathcal{X}^-_{i\pm1,u}]]=0,$

$$ここで, a_{ji}=\begin{cases}2 & \textit{if } j=i,\\ -1 & \textit{if } j=i\pm1,\\ 0 & \textit{otherwise}\end{cases} である。$$

また, **変形カレント Lie 代数** $\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x]$ とは, 以下の生成元と基本関係式によって定まる $\mathbb{C}$ 上の *Lie* 代数である*:*

生成元: $\mathcal{X}^\pm_{i,t}$ *(*$1\le i\le m-1,\ t\ge 0$*),* $\mathcal{I}_{j,t}$ *(*$1\le j\le m,\ t\ge 0$*).*
基本関係式:

(L'1) $\quad [\mathcal{I}_{i,s},\mathcal{I}_{j,t}]=0,$

(L'2) $\quad [\mathcal{I}_{j,s},\mathcal{X}^\pm_{i,t}]=\pm a'_{ji}\mathcal{X}^\pm_{i,s+t},$

(L'3) $\quad [\mathcal{X}^+_{i,t},\mathcal{X}^-_{j,s}]=\delta_{ij}(\mathcal{J}_{i,s+t}-Q_i\mathcal{J}_{i,s+t+1})$, ここで, $\mathcal{J}_{i,t}=\mathcal{I}_{i,t}-\mathcal{I}_{i+1,t}$ である,

$$+ 上記の関係式 (L4) - (L6).\ ここで,\ a'_{ji}=\begin{cases}1 & \textit{if } j=i,\\ -1 & \textit{if } j=i+1,\\ 0 & \textit{otherwise}\end{cases} である。$$

$\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x]$ は, 以下の単射準同型によって $\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x]$ の部分 Lie 代数とみなせる:

$$\Upsilon:\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x]\to\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x] \text{ by } \mathcal{X}^\pm_{i,t}\mapsto\mathcal{X}^\pm_{i,t},\quad \mathcal{J}_{i,t}\mapsto\mathcal{I}_{i,t}-\mathcal{I}_{i+1,t}. \tag{1.1.1}$$

1.2. 変形パラメータ $\mathbf{Q}=(Q_1,\dots,Q_{m-1})$ を $\mathbf{0}=(0,\dots,0)$ (i.e. $Q_i=0$ $(1\le i\le m-1)$) とすると, $\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{0}\rangle}[x]$ は，特殊線形Lie代数 $\mathfrak{sl}_m$ のカレントLie代数 $\mathfrak{sl}_m[x]$ と同型である。ここで, カレントLie代数 $\mathfrak{sl}_m[x]$ とは, 線形空間としては $\mathfrak{sl}_m[x]=\mathfrak{sl}_m\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[x]$ であり, その上のブラケット積が

$$[a\otimes f,b\otimes g]=[a,b]\otimes fg\quad (a,b\in\mathfrak{sl}_m,\ f,g\in\mathbb{C}[x])$$

によって定まっているLie代数である。$\mathfrak{sl}_m$ の Chevalley 生成元を e_i,f_i,H_i $(1\le i\le m-1)$ とすると, $\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{0}\rangle}[x]$ の生成元と $\mathfrak{sl}_m[x]=\mathfrak{sl}_m\otimes\mathbb{C}[x]$ の元とは,

$$\mathcal{X}^+_{i,t}\leftrightarrow e_i\otimes x^t,\quad \mathcal{X}^-_{i,t}\leftrightarrow f_i\otimes x^t,\quad \mathcal{J}_{i,t}\leftrightarrow H_i\otimes x^t$$

によって対応している (この対応の元で, $\mathbf{Q}=\mathbf{0}$ のときの (L1)-(L6) がカレント Lie 代数 $\mathfrak{sl}_m[x]$ の基本関係式である)。

同様に, $\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{0}\rangle}[x]$ は, 一般線形Lie代数 $\mathfrak{gl}_m$ のカレントLie代数 $\mathfrak{gl}_m[x]=\mathfrak{gl}_m\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[x]$ と同型である。$\mathfrak{gl}_m$ の Chevalley 生成元を e_i,f_i $(1\le i\le m-1)$, K_j $(1\le j\le m)$ と

すると, $\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{0}\rangle}[x]$ の生成元と $\mathfrak{gl}_m[x] = \mathfrak{sl}_m \otimes \mathbb{C}[x]$ の元とは,

$$\mathcal{X}_{i,t}^{+} \leftrightarrow e_i \otimes x^t, \quad \mathcal{X}_{i,t}^{-} \leftrightarrow f_i \otimes x^t, \quad \mathcal{I}_{j,t} \leftrightarrow K_j \otimes x^t$$

によって対応している。

$\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x]$ (resp. $\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x]$) の生成元の 2 番目の添え字を次数と思い, 適切な filtration を考えることによって, $\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x]$ (resp. $\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x]$) を $\mathfrak{sl}_m[x]$ (resp. $\mathfrak{gl}_m[x]$) の filtered deformation と思うこともできる (cf. [W1, Proposition 2.13])。

1.3. $\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x]$ (resp. $\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x]$) の部分 Lie 代数 $\mathfrak{n}^+$, $\mathfrak{n}^-$ を, それぞれ

$$\begin{aligned}
\mathfrak{n}^{+} &:= \langle \mathcal{X}_{i,t}^{+} \mid 1 \leq i \leq m-1,\, t \geq 0 \rangle_{\text{Lie alg.}} \subset \mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x] \text{ (resp. } \mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x]),\\
\mathfrak{n}^{-} &:= \langle \mathcal{X}_{i,t}^{-} \mid 1 \leq i \leq m-1,\, t \geq 0 \rangle_{\text{Lie alg.}} \subset \mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x] \text{ (resp. } \mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x])
\end{aligned}$$

によって定める。また, $\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x]$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{n}^0$, 及び, $\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x]$ の部分 Lie 代数 $\widetilde{\mathfrak{n}}^0$ を, それぞれ

$$\begin{aligned}
\mathfrak{n}^{0} &:= \langle \mathcal{J}_{i,t} \mid 1 \leq i \leq m-1,\, t \geq 0 \rangle_{\text{Lie alg.}} \subset \mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x],\\
\widetilde{\mathfrak{n}}^{0} &:= \langle \mathcal{I}_{j,t} \mid 1 \leq j \leq m,\, t \geq 0 \rangle_{\text{Lie alg.}} \subset \mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x]
\end{aligned}$$

によって定める。すると, $\mathfrak{n}^0$, $\widetilde{\mathfrak{n}}^0$ はそれぞれ可換な部分 Lie 代数であり, さらに, 三角分解

$$\begin{aligned}
\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x] &= \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{n}^0 \oplus \mathfrak{n}^+ \quad \text{as vector spaces},\\
\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x] &= \mathfrak{n}^- \oplus \widetilde{\mathfrak{n}}^0 \oplus \mathfrak{n}^+ \quad \text{as vector spaces}
\end{aligned} \tag{1.3.1}$$

が成り立つ。

$\mathfrak{n}^0$, $\widetilde{\mathfrak{n}}^0$ が可換であること, 三角分解 (1.3.1) が成り立つこと, 及び定義関係式 (L2), (L'2) に注意すれば, 通常のウェイト理論が適用でき, 特に, 有限次元既約 $U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x])$-加群 (resp. 有限次元既約 $U(\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x])$-加群) は最高ウェイト加群であることが分かる。ここで, 最高ウェイト加群の定義を与えておこう。

Definition 1.4.

$U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x])$-加群 M に対し, ある $v_0 \in M$ が存在し,

(i) $M = U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x]) \cdot v_0$,

(ii) $\mathcal{X}_{i,t}^{+} \cdot v_0 = 0$ *for all* $i = 1, \dots, m-1$ *and* $t \geq 0$,

(iii) $\mathcal{J}_{i,t} \cdot v_0 = u_{i,t} v_0$ ($u_{i,t} \in \mathbb{C}$) *for each* $i = 1, \dots, m-1$ *and* $t \geq 0$

を満たすとき, M は**最高ウェイト** $\mathbf{u} = (u_{i,t})_{1 \leq i \leq m-1,\, t \geq 0} \in \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{t \geq 0} \mathbb{C}$ の**最高ウェイト加群**であるといい, v_0 を**最高ウェイトベクトル**という。

$U(\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群 M に対し, ある $v_0 \in M$ が存在し,

(i) $M = U(\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x]) \cdot v_0$,

(ii) $\mathcal{X}_{i,t}^+ \cdot v_0 = 0$ *for all* $i = 1, \ldots, m-1$ *and* $t \geq 0$,

(iii) $\mathcal{I}_{j,t} \cdot v_0 = \widetilde{u}_{j,t} v_0$ $(\widetilde{u}_{j,t} \in \mathbb{C})$ *for each* $j = 1, \ldots, m$ *and* $t \geq 0$

を満たすとき, M は**最高ウェイト** $\widetilde{\mathbf{u}} = (\widetilde{u}_{j,t})_{1 \leq j \leq m, t \geq 0} \in \prod_{j=1}^{m} \prod_{t \geq 0} \mathbb{C}$ の**最高ウェイト加群**であるといい, v_0 を**最高ウェイトベクトル**という。

1.5. 最高ウェイト加群は (通常行われる議論と同様に) Verma 加群の商加群として実現できる。$\mathbf{u} = (u_{i,t}) \in \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{t \geq 0} \mathbb{C}$ に対し, $U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$ の左イデアル

$$\mathfrak{I}(\mathbf{u}) := \langle \mathcal{X}_{i,t}^+, \ \mathcal{J}_{i,t} - u_{i,t} \mid 1 \leq i \leq m-1, \, t \geq 0 \rangle_{\text{left ideal}} \subset U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$$

を考え, 商加群 $\mathcal{M}(\mathbf{u}) := U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])/\mathfrak{I}(\mathbf{u})$ (**Verma 加群**) を考えると, $\mathcal{M}(\mathbf{u})$ は $\overline{1}$ を最高ウェイトベクトルとする最高ウェイト $\mathbf{u}$ の最高ウェイト $U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群となる。任意の最高ウェイト $\mathbf{u}$ の最高ウェイト $U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群は, $\mathcal{M}(\mathbf{u})$ の商加群と同型である。さらに, $\mathcal{M}(\mathbf{u})$ は一意的な真の極大部分加群 $\operatorname{rad} \mathcal{M}(\mathbf{u})$ を持ち, 最高ウェイト $\mathbf{u}$ の既約最高ウェイト $U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群は $\mathcal{L}(\mathbf{u}) := \mathcal{M}(\mathbf{u}) / \operatorname{rad} \mathcal{M}(\mathbf{u})$ と同型である。

同様に, $\widetilde{\mathbf{u}} = (\widetilde{u}_{j,t}) \in \prod_{j=1}^{m} \prod_{t \geq 0} \mathbb{C}$ に対し, $U(\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$ の左イデアル

$$\mathfrak{I}(\widetilde{\mathbf{u}}) := \langle \mathcal{X}_{i,t}^+, \ \mathcal{I}_{j,t} - \widetilde{u}_{j,t} \mid 1 \leq i \leq m-1, \, 1 \leq j \leq m, \, t \geq 0 \rangle_{\text{left ideal}} \subset U(\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$$

を考え, 商加群 $\mathcal{M}(\widetilde{\mathbf{u}}) := U(\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])/\mathfrak{I}(\widetilde{\mathbf{u}})$ (**Verma 加群**) を考えると, $\mathcal{M}(\widetilde{\mathbf{u}})$ は $\overline{1}$ を最高ウェイトベクトルとする最高ウェイト $\widetilde{\mathbf{u}}$ の最高ウェイト $U(\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群となる。任意の最高ウェイト $\widetilde{\mathbf{u}}$ の最高ウェイト $U(\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群は, $\mathcal{M}(\widetilde{\mathbf{u}})$ の商加群と同型である。さらに, $\mathcal{M}(\widetilde{\mathbf{u}})$ は一意的な真の極大部分加群 $\operatorname{rad} \mathcal{M}(\widetilde{\mathbf{u}})$ を持ち, 最高ウェイト $\widetilde{\mathbf{u}}$ の既約最高ウェイト $U(\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群は $\mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{u}}) := \mathcal{M}(\widetilde{\mathbf{u}}) / \operatorname{rad} \mathcal{M}(\widetilde{\mathbf{u}})$ と同型である。

結論として以下のことが成り立つ。

Proposition 1.6.

(i) 任意の有限次元既約 $U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群は, ある $\mathbf{u} \in \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{t \geq 0} \mathbb{C}$ を最高ウェイトとする既約最高ウェイト加群 $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ と同型である。

(ii) 任意の有限次元既約 $U(\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群は, ある $\widetilde{\mathbf{u}} \in \prod_{j=1}^{m} \prod_{t \geq 0} \mathbb{C}$ を最高ウェイトとする既約最高ウェイト加群 $\mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{u}})$ と同型である。

この Proposition より, 有限次元既約 $U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群 (resp. 有限次元既約 $U(\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群) を分類するには, $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ (resp. $\mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{u}})$) が有限次元となる最高ウェイト $\mathbf{u}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{u}}$) を分類すればよいことが分かる。

1.7. 後で実際に有限次元最高ウェイト加群を構成する際に, evaluation 加群が必要となるので, それらについてもここで与えておこう。

$\gamma \in \mathbb{C}$ に対し, 代数の準同型写像

$$\mathbf{ev}_\gamma : U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x]) \to U(\mathfrak{sl}_m) \text{ by } \mathcal{X}_{i,t}^+ \mapsto (1 - Q_i\gamma)\gamma^t e_i,\ \mathcal{X}_{i,t}^- \mapsto \gamma^t f_i,\ \mathcal{J}_{i,t} \mapsto \gamma^t H_i,$$
$$\widetilde{\mathbf{ev}}_\gamma : U(\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x]) \to U(\mathfrak{gl}_m) \text{ by } \mathcal{X}_{i,t}^+ \mapsto (1 - Q_i\gamma)\gamma^t e_i,\ \mathcal{X}_{i,t}^- \mapsto \gamma^t f_i,\ \mathcal{I}_{j,t} \mapsto \gamma^t K_j$$

が定まる。$\mathbf{ev}_\gamma$, $\widetilde{\mathbf{ev}}_\gamma$ を $\gamma \in \mathbb{C}$ における **evaluation 準同型**という。

$U(\mathfrak{sl}_m)$-加群 M (resp. $U(\mathfrak{gl}_m)$-加群 M) に対し, M を $\mathbf{ev}_\gamma$ (resp. $\widetilde{\mathbf{ev}}_\gamma$) を通じて $U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群 (resp. $U(\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群) とみなしたものを $M^{\mathbf{ev}_\gamma}$ (resp. $M^{\widetilde{\mathbf{ev}}_\gamma}$) と表し, M の $\gamma \in \mathbb{C}$ における **evaluation 加群**という。

実際には, $\mathfrak{sl}_m$ (resp. $\mathfrak{gl}_m$) の基本表現の evaluation 加群いくつかのテンソル積表現を考えることによって, 全ての有限次元既約 $U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群 (resp. 有限次元既約 $U(\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群) が得られる。

§ 2. $\mathfrak{sl}_2^{\langle Q \rangle}[x]$ の有限次元既約表現

$Q \in \mathbb{C}$ に対し, $\mathfrak{sl}_2^{\langle Q \rangle}[x]$ は $\mathcal{X}_t^\pm$, $\mathcal{J}_t$ $(t \geq 0)$ を生成元とし,

(L1) $$[\mathcal{J}_s, \mathcal{J}_t] = 0,$$

(L2) $$[\mathcal{J}_s, \mathcal{X}_t^\pm] = \pm 2\mathcal{X}_{s+t}^\pm,$$

(L3) $$[\mathcal{X}_t^+, \mathcal{X}_s^-] = \mathcal{J}_{s+t} - Q\mathcal{J}_{s+t+1},$$

(L4) $$[\mathcal{X}_t^\pm, \mathcal{X}_s^\pm] = 0$$

を基本関係として定まる $\mathbb{C}$ 上の Lie 代数であった (ここで, 生成元の 1 番目の添え字は省略している)。各 $i = 1, 2, \ldots, m-1$ に対し, 代数の単射準同型

(2.0.1) $$\iota_i : U(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q_i \rangle}[x]) \to U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x]) \text{ by } \mathcal{X}_t^\pm \mapsto \mathcal{X}_{i,t}^\pm, \quad \mathcal{J}_t \mapsto \mathcal{J}_{i,t}$$

が定まるので, $\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x]$ の表現を調べる上で, $\mathfrak{sl}_2^{\langle Q \rangle}[x]$ の表現論が基本的な役割を果たすことは, 半単純 Lie 代数の表現論における考え方と同様である。そこで, まず $\mathfrak{sl}_2^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x]$ の有限次元既約表現について調べよう。

2.1. まず, 1 次元表現について考えよう。$\mathcal{L} = \mathbb{C}v$ を 1 次元 $U(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q \rangle}[x])$-加群とすると, 各 $t \geq 0$ に対し, $u_t \in \mathbb{C}$ が存在して,

$$\mathcal{J}_t \cdot v = u_t v$$

となる。 基本関係式 (L2) より,

$$\mathcal{J}_0 \cdot (\mathcal{X}_t^{\pm} \cdot v) = \left(\mathcal{X}_t^{\pm} \mathcal{J}_0 \pm 2\mathcal{X}_t^{\pm}\right) \cdot v = (u_0 \pm 2)\mathcal{X}_t^{\pm} \cdot v$$

となるので, もし $\mathcal{X}_t^{\pm} \cdot v \neq 0$ であるとすると, v と $\mathcal{X}_t^{\pm} \cdot v$ は, $\mathcal{J}_0$ の作用に関して固有値の異なる固有ベクトルとなるので, $\mathcal{L}$ が 1 次元表現であることに矛盾する。よって,

$$\mathcal{X}_t^{\pm} \cdot v = 0 \quad (t \geq 0)$$

となる。よって, 基本関係式 (L3) より,

$$u_t - Qu_{t+1} = 0 \quad (t \geq 0) \Rightarrow u_t = \begin{cases} 0 & \text{if } Q = 0, \\ Q^{-t} u_0 & \text{if } Q \neq 0 \end{cases} \quad (t \geq 0)$$

を得る。そこで,

$$\mathbb{B}^{\langle Q \rangle} := \begin{cases} \{0\} & \text{if } Q = 0, \\ \mathbb{C} & \text{if } Q \neq 0 \end{cases}$$

とおき, $\beta \in \mathbb{B}^{\langle Q \rangle}$ に対し, 1 次元 $U(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q \rangle}[x])$-加群 $\mathcal{L}^{\beta} = \mathbb{C}v$ を

$$\mathcal{X}_t^{\pm} \cdot v = 0, \quad \mathcal{J}_t \cdot v = \begin{cases} 0 & \text{if } Q = 0, \\ Q^{-t} \beta v & \text{if } Q \neq 0 \end{cases} \quad (t \geq 0)$$

によって定めれば (これが well-defined であることは基本関係式をチェックする), 任意の 1 次元 $U(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q \rangle}[x])$-加群は, $\mathcal{L}^{\beta}$ $(\beta \in \mathbb{B}^{\langle Q \rangle})$ と同型である。

$\beta = 0$ のとき, $\mathcal{L}^0$ は自明表現であることと, $Q = 0$ のときは, $\mathbb{B}^{\langle 0 \rangle} = \{0\}$ であることに注意しよう。

2.2. 次に, 最高ウェイトが $\mathbf{u} = (u_t)_{t \geq 0} \in \prod_{t \geq 0} \mathbb{C}$ である既約最高ウェイト $U(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q \rangle}[x])$-加群 $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ が有限次元になるための $\mathbf{u}$ に関する必要条件を考えよう。

$v_0 \in \mathcal{L}(\mathbf{u})$ を最高ウェイトベクトルとすると, 最高ウェイト加群の定義と基本関係式 (L2) より, $\mathcal{J}_0$ の作用に関する固有値が $u_0 - 2$ である $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ の固有空間は, $\{\mathcal{X}_t^{-} \cdot v_0 \mid t \geq 0\}$ によって張られる。よって, $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ が有限次元ならば, $\{\mathcal{X}_t^{-} \cdot v_0 \mid t \geq 0\}$ は 1 次従属である。特にある $n \geq 0$ が存在して,

$$\mathcal{X}_n^{-} \cdot v_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \theta_k \mathcal{X}_k^{-} \cdot v_0 \quad (\theta_k \in \mathbb{C}) \tag{2.2.1}$$

と表せる。この両辺に左から $\mathcal{X}_t^+$ $(t \geq 0)$ を掛けると, 基本関係式 (L3) と $\mathcal{X}_t^+ \cdot v_0 = 0$, $\mathcal{J}_t \cdot v_0 = u_t v_0$ より,

$$(u_{t+n} - Qu_{t+n+1})v = \sum_{k=0}^{n-1} \theta_k (u_{t+k} - Qu_{t+k+1}) \quad (t \geq 0)$$

を得る。この式を用いて u_t $(t \geq 0)$ は, $u_0, u_1, \ldots, u_n$ から帰納的に定まる。これが, 基本的な原理であるが, 実際の計算上では, $\mathcal{J}_0$ の作用に関する固有値が $u_0 - 2$ である $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ の固有空間 $\langle \mathcal{X}_t^- \cdot v_0 \mid t \geq 0 \rangle_{\mathbb{C}\text{-span}}$ の中で, (2.2.1) と同等の役割を果たす関係式を求めることになる ($Q = 0$ のときは (2.2.1) の形になる)。

$\langle \mathcal{X}_t^- \cdot v_0 \mid t \geq 0 \rangle_{\mathbb{C}\text{-span}}$ の中で, (2.2.1) と同じ役割を果たす関係式を求めよう。$t, b \geq 0$ に対し, $\mathcal{X}_t^{\pm(b)} = (\mathcal{X}_t^{\pm})^b / b!$ とおく。基本関係式 (L2) に注意すれば,

$$\mathcal{J}_0 \cdot (\mathcal{X}_t^{-(b)} \cdot v_0) = (u_0 - 2b) \mathcal{X}_t^{-(b)} v_0$$

となるので, 特に $t = 0$ の場合を考えれば, $\{\mathcal{X}_0^{-(b)} \cdot v_0 \mid b \geq 0 \text{ s.t. } \mathcal{X}_0^{-(b)} \cdot v_0 \neq 0\}$ は $\mathcal{J}_0$ の作用に関する異なる固有値を持った固有ベクトルの集合になる。よって, $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ が有限次元ならば, ある $n \geq 0$ が存在して,

$$\mathcal{X}_0^{-(n)} \cdot v_0 \neq 0, \quad \mathcal{X}_0^{-(n+1)} \cdot v_0 = 0 \tag{2.2.2}$$

となる。

また, $\deg \mathcal{X}_t^{\pm} = \pm 2$, $\deg \mathcal{J}_t = 0$ $(t \geq 0)$ と定めることにより, $U(\mathfrak{sl}_2^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$ は $\mathbb{Z}$-次数付き代数となる ($\mathfrak{sl}_2$ のルート空間分解に対応するもの) ことに注意すれば, 三角分解 (1.3.1) と最高ウェイトベクトルの定義より, $\mathcal{X}_s^{+(n)} \mathcal{X}_0^{-(n+1)} \cdot v_0 = 0$ は, $\langle \mathcal{X}_t^- \cdot v_0 \mid t \geq 0 \rangle_{\mathbb{C}\text{-span}}$ の中での関係式を与えることが分かる。

そこで, 定義関係式を用いて $\mathcal{X}_s^{+(n)} \mathcal{X}_0^{-(n+1)} \cdot v_0$ を計算すると (ここが大変な部分だが),

$$\mathcal{X}_0^{-((n);s)} \cdot v_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k+1} \theta_s^{\langle n-k \rangle} \mathcal{X}_0^{-((k);s)} \cdot v \tag{2.2.3}$$

を得る。ここで,

$$\mathcal{X}_0^{-((0);s)} = 1, \quad \mathcal{X}_0^{-((p);s)} = \sum_{w=0}^{p} \binom{p}{w} (-Q)^w \mathcal{X}_{ps+w}^- \quad (p > 0)$$

であり, $\theta_s^{\langle p\rangle} \in \mathbb{C}$ $(p \geq 0)$ は (p に関して) 帰納的に

$$\theta_s^{\langle 0\rangle} = 1, \quad \theta_s^{\langle p\rangle} = \frac{1}{p}\sum_{z=1}^{p}(-1)^{z-1}\Big(\sum_{w=0}^{z}\binom{z}{w}(-Q)^w u_{zs+w}\Big)\theta_s^{\langle p-z\rangle}$$

によって定まる。(特に, $\theta_s^{\langle 1\rangle} = u_s - Qu_{s+1}$ である。)

(2.2.3) に左から $\mathcal{X}_t^+$ を掛けると,

(2.2.4)
$$\sum_{w=0}^{n}\binom{n}{w}(-Q)^w\theta_{t+ns+w}^{\langle 1\rangle}v = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k+1}\theta_s^{\langle n-k\rangle}\Big(\sum_{w=0}^{k}\binom{k}{w}(-Q)^w\theta_{t+ks+w}^{\langle 1\rangle}\Big)v$$

を得る。特に, (2.2.4) において, $s = 0$ のときを考えると,

(2.2.5)
$$\sum_{w=0}^{n}\binom{n}{w}(-Q)^w\theta_{t+w}^{\langle 1\rangle}v = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k+1}\theta_0^{\langle n-k\rangle}\Big(\sum_{w=0}^{k}\binom{k}{w}(-Q)^w\theta_{t+w}^{\langle 1\rangle}\Big)v$$

を得る。また, $s = 1$ かつ $Q = 0$ のときを考えると ($Q = 0$ のとき, $\theta_s^{\langle 1\rangle} = u_s$ に注意すれば),

(2.2.6)
$$u_{t+n}v = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k+1}\theta_1^{\langle n-k\rangle}u_{t+k}v \quad (Q = 0 \text{ のとき})$$

を得る。((2.2.5) で $Q = 0$ とすると, $Q = 0$ の場合に欲しい関係式とはならない。)

さらに, $Q = 0$ のときは, $\langle \mathcal{X}_0^{\pm}, \mathcal{J}_0\rangle_{\text{Lie alg.}} \cong \mathfrak{sl}_2$ であることに注意すると, (2.2.2) より,

(2.2.7)
$$u_0 = n \quad (Q = 0 \text{ のとき})$$

となる。関係式 (2.2.5), (2.2.6), (2.2.7) を用いて, 組み合わせ論的な議論を行うと次の命題を得る。

Proposition 2.3. *最高ウェイトが $\mathbf{u} = (u_t)_{t\geq 0} \in \prod_{t\geq 0}\mathbb{C}$ である既約最高ウェイト $U(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$-加群 $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ が有限次元であるとき, 以下が成り立つ:*

ある $n \geq 0$ に対し, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in \mathbb{C}$ と $\beta \in \mathbb{B}^{\langle Q\rangle}$ が存在し,

(2.3.1)
$$u_0 = n + \beta, \quad u_t = \begin{cases} p_t(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) & \textit{if } Q = 0, \\ p_t(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) + Q^{-t}\beta & \textit{if } Q \neq 0 \end{cases} \quad (t > 0)$$

となる。ここで, $p_t(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = \gamma_1^t + \gamma_2^t + \cdots + \gamma_n^t$ ($\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ を変数とする t 次の冪和対称式) である。($Q = 0$ のとき, $\mathbb{B}^{\langle Q\rangle} = \{0\}$ に注意。)

2.4. 次に, (2.3.1) の形で表される $\mathbf{u} = (u_t)_{t\geq 0}$ を最高ウェイトとする最高ウェイト $U(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$-加群 $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ が有限次元であることをみてみよう。任意の $\mathbf{u} = (u_t)_{t\geq 0}$ を最高ウェイトとする最高ウェイト $U(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$-加群は, その既約商が $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ と同型になることから, (2.3.1) の形の $\mathbf{u} = (u_t)_{t\geq 0}$ を最高ウェイトとする有限次元最高ウェイト $U(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$-加群を構成すればよい。

$L(2)$ を 2 次元既約 $U(\mathfrak{sl}_2)$-加群とする。各 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in \mathbb{C}$ に対し, $L(2)$ の γ_k $(1 \leq k \leq n)$ における evaluation 加群 $L(2)^{\mathbf{ev}_{\gamma_k}}$ を考えると, $L(2)^{\mathbf{ev}_{\gamma_k}}$ は最高ウェイト $U(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$-加群となる。$L(2)^{\mathbf{ev}_{\gamma_k}}$ の最高ウェイトベクトルを $v_0^{(k)}$ とおく。また, $\beta \in \mathbb{B}^{\langle \mathbf{Q}\rangle}$ に対し, 1 次元 $U(\mathfrak{sl}_2^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x])$-加群 $\mathcal{L}^\beta$ を考える ($Q = 0$ のときは, $\beta = 0$ のみで, $\mathcal{L}^0$ は自明表現であることに注意)。$\mathcal{L}^\beta = \mathbb{C}w_0$ としよう。テンソル積表現

$$\mathcal{N}_{(\gamma_1,\dots,\gamma_n;\beta)} = L(2)^{\mathbf{ev}_{\gamma_1}} \otimes L(2)^{\mathbf{ev}_{\gamma_2}} \otimes \cdots \otimes L(2)^{\mathbf{ev}_{\gamma_n}} \otimes \mathcal{L}^\beta$$

を考え, $\mathcal{N}'_{(\gamma_1,\dots,\gamma_n;\beta)}$ を $v_0^{(1)} \otimes v_0^{(2)} \otimes \cdots \otimes v_0^{(n)} \otimes w_0$ によって生成される $\mathcal{N}_{(\gamma_1,\dots,\gamma_n;\beta)}$ の部分 $U(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$-加群とする。すると, $\mathcal{N}'_{(\gamma_1,\dots,\gamma_n;\beta)}$ は $v_0^{(1)} \otimes v_0^{(2)} \otimes \cdots \otimes v_0^{(n)} \otimes w_0$ を最高ウェイトベクトルとする最高ウェイト加群となり, その最高ウェイトは (2.3.1) の形になる。構成より, $\mathcal{N}'_{(\gamma_1,\dots,\gamma_n;\beta)}$ は有限次元なので, (2.3.1) の形の最高ウェイト $\mathbf{u} = (u_t)$ を最高ウェイトとする有限次元の最高ウェイト $U(\mathfrak{sl}_2^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x])$-加群が構成された。

2.5. これまでに, $\mathbf{u} = (u_t)_{t\geq 0}$ を最高ウェイトとする既約最高ウェイト $U(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$-加群 $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ が有限次元であるための必要十分条件は, $\mathbf{u}$ が (2.3.1) の形で表されることであることを見た。最後に, このような最高ウェイトの添え字集合として次のようなものを考えよう。

$\mathbb{C}[x]$ を x を変数とする $\mathbb{C}$ 上の多項式環とし, $\mathbb{C}[x]_{\mathrm{monic}}$ をモニック多項式からなる $\mathbb{C}[x]$ の部分集合とする。さらに,

$$\mathbb{C}[x]_{\mathrm{monic}}^{\langle Q\rangle} = \begin{cases} \mathbb{C}[x]_{\mathrm{monic}} & \text{if } Q = 0, \\ \{\varphi \in \mathbb{C}[x]_{\mathrm{monic}} \mid Q^{-1} \text{ は } \varphi \text{ の根でない}\} & \text{if } Q \neq 0 \end{cases}$$

とおく。また, 写像

$$\mathbb{C}[x]_{\mathrm{monic}}^{\langle Q\rangle} \times \mathbb{B}^{\langle Q\rangle} \to \prod_{t\geq 0} \mathbb{C}, \quad (\varphi, \beta) \mapsto \mathbf{u}^{\langle Q\rangle}(\varphi, \beta) = (\mathbf{u}^{\langle Q\rangle}(\varphi, \beta)_t)_{t\geq 0} \tag{2.5.1}$$

を

$$\mathbf{u}^{\langle Q\rangle}(\varphi, \beta)_t = \begin{cases} \deg \varphi + \beta & \text{if } t = 0, \\ p_t(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) & \text{if } t > 0 \text{ and } Q = 0, \\ p_t(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) + Q^{-t}\beta & \text{if } t > 0 \text{ and } Q \neq 0 \end{cases}$$

によって定める。ここで, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ は φ の根である (i.e. $\varphi = (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\dots(x-\gamma_n)$)。写像 (2.5.1) は単射である。

定義より, $\mathbf{u}^{\langle Q\rangle}(\varphi,\beta)$ ($(\varphi,\beta) \in \mathbb{C}[x]^{\langle Q\rangle}_{\mathrm{monic}} \times \mathbb{B}^{\langle Q\rangle}$) が (2.3.1) の形の最高ウェイトを与える。

以上のことより, 以下のような有限次元既約 $U(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$-加群の分類を得る。

Theorem 2.6.

$$\{\mathcal{L}(\mathbf{u}^{\langle Q\rangle}(\varphi,\beta)) \mid (\varphi,\beta) \in \mathbb{C}[x]^{\langle Q\rangle}_{\mathrm{monic}} \times \mathbb{B}^{\langle Q\rangle}\}$$

は有限次元既約 $U(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$-加群の同型類の完全代表系を与える。

Remark 2.7. $\mathbb{C}[x]^{\langle Q\rangle}_{\mathrm{monic}}$ の定義で, $Q \neq 0$ のとき, Q^{-1} を根に持つモニック多項式を除いているのは次の理由による:

(i) $\varphi = (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\dots(x-\gamma_n)(x-Q^{-1})^k$ であるとすると,

$$p_t(\gamma_1,\dots,\gamma_n,\underbrace{Q^{-1},\dots,Q^{-1}}_{k}) + Q^{-t}\beta = p_t(\gamma_1,\dots,\gamma_n) + Q^{-t}(\beta+k) \tag{2.7.1}$$

となるので, $\mathbb{C}[x]^{\langle Q\rangle}_{\mathrm{monic}}$ の中に Q^{-1} を根に持つモニック多項式も含めてしまうと, 写像 (2.5.1) は単射にならない。

(ii) $U(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x])$-加群の方では, 次のように理由付けできる。

$\gamma = Q^{-1}$ とすると, evaluation 準同型 $\mathbf{ev}_{Q^{-1}} : U(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q\rangle}[x]) \to U(\mathfrak{sl}_2)$ は全射にはならない。このとき, 2 次元既約 $U(\mathfrak{sl}_2)$-加群 $L(2)$ の Q^{-1} における evaluation 加群 $L(2)^{\mathbf{ev}_{Q^{-1}}}$ は可約であり,

$$L(2)^{\mathbf{ev}_{Q^{-1}}} / \operatorname{rad} L(2)^{\mathbf{ev}_{Q^{-1}}} \cong \mathcal{L}^1$$

となる。よって, 有限次元最高ウェイト表現を構成する際に用いたテンソル積表現 $\mathcal{N}_{(\gamma_1,\dots,\gamma_n;\beta)}$ において, $\gamma_j = Q^{-1}$ である j に対し, $L(2)^{\mathbf{ev}_{\gamma_j}}$ を $\mathcal{L}^1$ に置き換えても, 最終的に得られる最高ウェイトは同じであり, さらに,

$$\underbrace{\mathcal{L}^1 \otimes \dots \otimes \mathcal{L}^1}_{k} \otimes \mathcal{L}^\beta \cong \mathcal{L}^{\beta+k}$$

である。これらのことが等式 (2.7.1) に対応している。

§ 3. $\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x]$ の有限次元既約表現

この節では, $\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x]$ の有限次元既約表現の分類を考える。

3.1. まず, 1 次元表現について考える。1 次元既約 $U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x])$-加群 $\mathcal{L}$ を, (2.0.1) の単射準同型 $\iota_i : U(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q_i\rangle}[x]) \to U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x])$ $(1 \le i \le m-1)$ を通じて $U(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q_i\rangle}[x])$-加

群とみなすと, それも 1 次元なので, $\mathcal{L}$ の構造は 1 次元 $U(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q_i\rangle}[x])$-加群としての構造 $(1 \le i \le m-1)$ から決まってしまう。

実際には, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_i)_{1\le i\le m-1} \in \prod_{i=1}^{m-1} \mathbb{B}^{\langle Q_i\rangle}$ に対し, 1 次元 $U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x])$-加群 $\mathcal{L}^{\boldsymbol{\beta}} = \mathbb{C}v$ を,

$$\mathcal{X}_{i,t}^{\pm} \cdot v = 0, \quad \mathcal{J}_{i,t} \cdot v = \begin{cases} 0 & \text{if } Q_i = 0, \\ Q_i^{-t}\beta_i v & \text{if } Q_i \neq 0 \end{cases} \quad (1 \le i \le m-1,\, t \ge 0)$$

によって定めると, これは well-defined であり, 任意の 1 次元 $U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x])$-加群は $\mathcal{L}^{\boldsymbol{\beta}}\,(\boldsymbol{\beta} \in \prod_{i=1}^{m-1} \mathbb{B}^{\langle Q_i\rangle})$ と同型になる。

3.2. $\mathbf{u} = (u_{i,t}) \in \prod_{i=1}^{m-1}\prod_{t\ge 0}\mathbb{C}$ を最高ウェイトとする既約最高ウェイト $U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x])$-加群 $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ に対し, $v_0 \in \mathcal{L}(\mathbf{u})$ を最高ウェイトベクトルとする。(2.0.1) の単射準同型 $\iota_i : U(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q_i\rangle}[x]) \to U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x])$ $(1 \le i \le m-1)$ を通じて $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ を $U(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q_i\rangle}[x])$-加群とみなすと, $U(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q_i\rangle}[x]) \cdot v_0$ は, v_0 を最高ウェイトベクトルとする最高ウェイト $U(\mathfrak{sl}_2^{\langle Q_i\rangle}[x])$-加群となる。よって, $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ が有限次元となるための最高ウェイト $\mathbf{u}$ に関する必要条件については, (ι_i を通じて) $\mathfrak{sl}_2^{\langle Q_i\rangle}[x]$ の場合に帰着される (実際にはそれが必要十分条件となる)。そこで, 以下のようなことを準備する。

$(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}) = ((\varphi_i, \beta_i))_{1\le i\le m-1} \in \prod_{i=1}^{m-1}(\mathbb{C}[x]_{\text{monic}}^{\langle Q_i\rangle} \times \mathbb{B}^{\langle Q_i\rangle})$ に対し,

$$\mathbf{u}^{\langle \mathbf{Q}\rangle}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{u}^{\langle \mathbf{Q}\rangle}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta})_{i,t})_{1\le i\le m-1,\, t\ge 0} \in \prod_{i=1}^{m-1}\prod_{t\ge 0}\mathbb{C}$$

を

$$\mathbf{u}^{\langle \mathbf{Q}\rangle}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta})_{i,t} = \begin{cases} \deg\varphi_i + \beta_i & \text{if } t = 0, \\ p_t(\gamma_{i,1}, \gamma_{i,2}, \dots, \gamma_{i,n_i}) & \text{if } t > 0 \text{ and } Q_i = 0, \\ p_t(\gamma_{i,1}, \gamma_{i,2}, \dots, \gamma_{i,n_i}) + Q_i^{-t}\beta_i & \text{if } t > 0 \text{ and } Q_i \neq 0 \end{cases} \tag{3.2.1}$$

によって定める。ここで, $\gamma_{i,1}, \gamma_{i,2}, \dots, \gamma_{i,n_i}$ は φ_i の根である。各 $i = 1, 2, \dots, m-1$ を止めて, $t \ge 0$ を全て動かした組を考えると,

$$(\mathbf{u}^{\langle \mathbf{Q}\rangle}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta})_{i,t})_{t\ge 0} = \mathbf{u}^{\langle Q_i\rangle}(\varphi_i, \beta_i) \in \prod_{t\ge 0}\mathbb{C}$$

となることに注意しよう。

上での議論より, 既約最高ウェイト $U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x])$-加群 $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ が有限次元ならば, ある $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}) \in \prod_{i=1}^{m-1}(\mathbb{C}[x]_{\text{monic}}^{\langle Q_i\rangle} \times \mathbb{B}^{\langle Q_i\rangle})$ に対し, $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\langle \mathbf{Q}\rangle}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta})$ となる。

3.3. 次に, 任意の $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}) \in \prod_{i=1}^{m-1}(\mathbb{C}[x]_{\text{monic}}^{\langle Q_i\rangle} \times \mathbb{B}^{\langle Q_i\rangle})$ に対し, 既約最高ウェイト $U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x])$-加群 $\mathcal{L}(\mathbf{u}^{\langle \mathbf{Q}\rangle}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}))$ は有限次元になることを見よう。

$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-1}$ を $\mathfrak{sl}_m$ の基本ウェイトとし, $L(\omega_i)$ $(1 \leq i \leq m-1)$ を最高ウェイトが ω_j である既約最高ウェイト $U(\mathfrak{sl}_m)$-加群 ($\mathfrak{sl}_m$ の基本表現) とする。

$(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}) = ((\varphi_i, \beta_i))_{1 \leq i \leq m-1} \in \prod_{i=1}^{m-1} (\mathbb{C}[x]^{\langle Q_i \rangle}_{\text{monic}} \times \mathbb{B}^{\langle Q_i \rangle})$ に対し, $U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$ のテンソル積表現

$$\mathcal{N}_{(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta})} = \Big(\bigotimes_{i=1}^{m-1} \bigotimes_{k=1}^{n_i} L(\omega_i)^{\mathbf{ev}_{\gamma_{i,k}}} \Big) \otimes \mathcal{L}^{\boldsymbol{\beta}}$$

を考える。ここで, $\gamma_{i,1}, \gamma_{i,2}, \dots, \gamma_{i,n_i}$ は φ_i の根であり, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_i)_{1 \leq i \leq m-1}$ である。すると, $\mathfrak{sl}_2^{\langle Q \rangle}[x]$ の場合と同様にして, $\mathcal{L}(\mathbf{u}^{\langle \mathbf{Q} \rangle}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}))$ は, $\mathcal{N}_{(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta})}$ のある部分商加群と同型となり, 特に有限次元となる。

以上のことより, 以下のような有限次元既約 $U(\mathfrak{sl}_m^{\langle Q \rangle}[x])$-加群の分類を得る。

Theorem 3.4.

$$\{\mathcal{L}(\mathbf{u}^{\langle \mathbf{Q} \rangle}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta})) \mid (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}) \in \prod_{i=1}^{m-1} (\mathbb{C}[x]^{\langle Q_i \rangle}_{\text{monic}} \times \mathbb{B}^{\langle Q_i \rangle})\}$$

は有限次元既約 $U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群の同型類の完全代表系を与える。

§ 4. $\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x]$ の有限次元既約表現

この節では, $\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x]$ の有限次元既約表現の分類を考える。(1.1.1) の単射準同型 $\Upsilon : U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x]) \to U(\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$ を通じて, 有限次元既約 $U(\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群を $U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群とみなしても, 既約のままであるので, 基本的には有限次元既約 $U(\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群の分類は, $U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群における分類から得られる。$\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x]$ の場合と $\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x]$ の場合との違いは, $U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$ に制限すると自明表現になってしまうような非自明な 1 次元 $U(\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群 (一般線形群における行列式表現に相当するもの) によって与えられることになる。議論自体は $\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x]$ の場合と同様なので, 結論のみを述べよう。

4.1. まず, 1 次元 $U(\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群を考える。

$\boldsymbol{\beta} = (\beta_i)_{1 \leq i \leq m-1} \in \prod_{i=1}^{m-1} \mathbb{B}^{\langle Q_i \rangle}$ に対し, 1 次元 $U(\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群 $\widetilde{\mathcal{L}}^{\boldsymbol{\beta}} = \mathbb{C}v$ を

$$\mathcal{X}^{\pm}_{i,t} \cdot v = 0, \quad \mathcal{J}_{i,t} \cdot v = \begin{cases} 0 & \text{if } Q_i = 0, \\ Q_i^{-t} \beta_i v & \text{if } Q_i \neq 0 \end{cases} \quad (1 \leq i \leq m-1,\ t \geq 0),$$

$$\mathcal{I}_{j,t} \cdot v = \big(\sum_{k=j}^{m-1} \mathcal{J}_{k,t} \big) \cdot v \quad (1 \leq j \leq m-1, t \geq 0), \quad \mathcal{I}_{m,t} \cdot v = 0 \quad (t \geq 0)$$

によって定める。ここで, $\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x]$ の中で $\mathcal{J}_{i,t} = \mathcal{I}_{i,t} - \mathcal{I}_{i+1,t}$ とおいていることに注意しよう。定義より, Υ を通じて, $\widetilde{\mathcal{L}}^{\boldsymbol{\beta}}$ を $U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群とみなすと,

$$\widetilde{\mathcal{L}}^{\boldsymbol{\beta}} \cong \mathcal{L}^{\boldsymbol{\beta}} \text{ as } U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])\text{-modules}$$

となる。

また, $\mathbf{h} = (h_t)_{t \geq 0} \in \prod_{t \geq 0} \mathbb{C}$ に対し, 1 次元 $U(\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群 $\widetilde{\mathcal{L}}^{\mathbf{h}} = \mathbb{C}v$ を

$$\mathcal{X}_{i,t}^{\pm} \cdot v = 0, \quad \mathcal{I}_{j,t} \cdot v = h_t v \quad (1 \leq i \leq m-1,\, 1 \leq j \leq m,\ t \geq 0)$$

によって定める。Υ を通じて, $\widetilde{\mathcal{L}}^{\mathbf{h}}$ を $U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群とみなすと,

$$\widetilde{\mathcal{L}}^{\mathbf{h}} \cong \mathcal{L}^{\mathbf{0}} \text{ as } U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])\text{-modules} \quad (\mathcal{L}^{\mathbf{0}} \text{は } \mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x] \text{ の自明表現})$$

となる。

任意の 1 次元 $U(\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群は $\widetilde{\mathcal{L}}^{\boldsymbol{\beta}} \otimes \widetilde{\mathcal{L}}^{\mathbf{h}}$ ($\boldsymbol{\beta} \in \prod_{i=1}^{m-1} \mathbb{B}^{\langle Q_i \rangle}$, $\mathbf{h} \in \prod_{t \geq 0} \mathbb{C}$) と同型である。

4.2. $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{h}) = ((\varphi_i, \beta_i)_{1 \leq i \leq m-1}, (h_t)_{t \geq 0}) \in \prod_{i=1}^{m-1} (\mathbb{C}[x]_{\mathrm{monic}}^{\langle Q_i \rangle} \times \mathbb{B}^{\langle Q_i \rangle}) \times \prod_{t \geq 0} \mathbb{C}$ に対し,

$$\widetilde{\mathbf{u}}^{\langle \mathbf{Q} \rangle}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{h}) = (\widetilde{\mathbf{u}}^{\langle \mathbf{Q} \rangle}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{h})_{j,t}) \in \prod_{j=1}^{m} \prod_{t \geq 0} \mathbb{C}$$

を

$$\widetilde{\mathbf{u}}^{\langle \mathbf{Q} \rangle}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{h})_{j,t} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=j}^{m-1} \mathbf{u}^{\langle \mathbf{Q} \rangle}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta})_{k,t} + h_t & \text{if } 1 \leq j \leq m-1 \text{ and } t \geq 0, \\ h_t & \text{if } j = m \text{ and } t \geq 0 \end{cases}$$

によって定める。ここで, $\mathbf{u}^{\langle \mathbf{Q} \rangle}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta})_{k,t}$ は (3.2.1) で定義されたものである。定義より, Υ を通じて, $\mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{u}}^{\langle \mathbf{Q} \rangle}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{h}))$ を $U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])$-加群とみなすと,

$$\mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{u}}^{\langle \mathbf{Q} \rangle}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{h})) \cong \mathcal{L}(\mathbf{u}^{\langle \mathbf{Q} \rangle}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta})) \text{ as } U(\mathfrak{sl}_m^{\langle \mathbf{Q} \rangle}[x])\text{-modules}$$

となる。特に, $\mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{u}}^{\langle \mathbf{Q} \rangle}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{h}))$ は有限次元である。

結論として, 以下のような有限次元既約 $U(\mathfrak{gl}_m^{\langle Q \rangle}[x])$-加群の分類を得る。

Theorem 4.3.

$$\{\mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{u}}^{\langle \mathbf{Q} \rangle}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{h})) \mid (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{h}) \in \prod_{i=1}^{m-1} (\mathbb{C}[x]_{\mathrm{monic}}^{\langle Q_i \rangle} \times \mathbb{B}^{\langle Q_i \rangle}) \times \prod_{t \geq 0} \mathbb{C}\}$$

は有限次元既約 $U(\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x])$-加群の同型類の完全代表系を与える。

Remark 4.4. $P = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}\varepsilon_i$ を $\mathfrak{gl}_m$ のウェイト格子とし, $\widetilde{\omega}_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_i$ $(1 \leq i \leq m-1)$ とおく。また, $L(\widetilde{\omega}_i)$ $(1 \leq i \leq m-1)$ を $\widetilde{\omega}_i$ を最高ウェイトとする既約最高ウェイト $U(\mathfrak{gl}_m)$-加群とする。

$(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{h}) = ((\varphi_i, \beta_i)_{1\leq i\leq m-1}, (h_t)_{t\geq 0}) \in \prod_{i=1}^{m-1}(\mathbb{C}[x]^{\langle Q_i\rangle}_{\mathrm{monic}} \times \mathbb{B}^{\langle Q_i\rangle}) \times \prod_{t\geq 0}\mathbb{C}$ に対し, $U(\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x])$ のテンソル積表現

$$\widetilde{\mathcal{N}}_{(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\beta},\mathbf{h})} = \Big(\bigotimes_{i=1}^{m-1}\bigotimes_{k=1}^{n_i} L(\widetilde{\omega}_i)^{\widetilde{\mathbf{ev}}_{\gamma_{i,k}}}\Big) \otimes \widetilde{\mathcal{L}}^{\boldsymbol{\beta}} \otimes \widetilde{\mathcal{L}}^{\mathbf{h}}$$

を考える。ここで, $\gamma_{i,1}, \gamma_{i,2}, \dots, \gamma_{i,n_i}$ は φ_i の根であり, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_i)_{1\leq i\leq m-1}$, $\mathbf{h} = (h_t)_{t\geq 0}$ である。すると, $\mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{u}}^{\langle \mathbf{Q}\rangle}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{h}))$ は, $\widetilde{\mathcal{N}}_{(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\beta},\mathbf{h})}$ の部分商加群と同型になる。

§ 5. Cyclotomic q-Schur 代数 ($q = 1$ の場合) の既約表現の最高ウェイト

5.1. $\widehat{Q}_0, \widehat{Q}_1 \dots, \widehat{Q}_{r-1} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ とし, $\mathscr{H}_{n,r}$ を パラメータが $q = 1$, $\widehat{Q}_0, \dots, \widehat{Q}_{r-1}$ である $\mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$ に付随した $\mathbb{C}$ 上の Ariki-Koike 代数とする。つまり, $\mathscr{H}_{n,r}$ は, 以下の生成元と基本関係式で定義される $\mathbb{C}$ 上の結合代数である:

生成元: $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$,
基本関係式:

$$(T_0 - \widehat{Q}_0)(T_0 - \widehat{Q}_1)\dots(T_0 - \widehat{Q}_{r-1}) = 0, \quad T_i^2 = 1 \quad (1 \leq i \leq n-1),$$
$$T_0T_1T_0T_1 = T_1T_0T_1T_0, \quad T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-2), \quad T_iT_j = T_jT_i \quad (|i-j| > 1).$$

$\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}^r_{>0}$ に対し, $\mathscr{H}_{n,r}$ に付随した ($q = 1$ での) cyclotomic q-Schur 代数 $\mathscr{S}^{\mathbf{1}}_{n,r}(\mathbf{m})$ が定義される (定義は [W1, §6] などを参照)。

$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_r$ とおき, $\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x]$ の変形パラメータ $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_{m-1})$ を

$$Q_i = \begin{cases} \widehat{Q}_k^{-1} & \text{if } i = \sum_{l=1}^k m_l \text{ for some } k = 1, 2, \dots, r-1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5.1.1}$$

とおく。すると, $\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x]$ と [W1] で定義された Lie 代数 $\mathfrak{g}_{\widehat{\mathbf{Q}}}(\mathbf{m})$ とは同型になり ([W2] 参照), [W1, Theorem 8.4] より, 代数の準同型

$$\Psi : U(\mathfrak{gl}_m^{\langle \mathbf{Q}\rangle}[x]) \to \mathscr{S}^{\mathbf{1}}_{n,r}(\mathbf{m})$$

が存在する。特に, 全ての $i = 1, \ldots, r$ に対し, $m_i \geq n$ であるとき, Ψ は全射となる。以下, 全ての $i = 1, \ldots, r$ に対し, $m_i \geq n$ であると仮定する。

$$\Lambda^+_{n,r} := \left\{ \lambda = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(r)}) \;\middle|\; \begin{array}{c} \lambda^{(k)} = (\lambda^{(k)}_1, \lambda^{(k)}_2, \ldots, \lambda^{(k)}_{m_k}) \in \mathbb{Z}^{m_k}_{\geq 0} \\ \text{s.t. } \lambda^{(k)}_1 \geq \lambda^{(k)}_2 \geq \cdots \geq \lambda^{(k)}_{m_k}, \\ \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{m_k} \lambda^{(k)}_i = n \end{array} \right\}$$

とおくと, [DJM] より, $\{L(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda^+_{n,r}\}$ が $\mathscr{S}^{\mathbf{1}}_{n,r}(\mathbf{m})$ の既約表現の同型類の完全代表系を与える ($L(\lambda)$ の定義等は [DJM] 等を参照)。

$L(\lambda)$ ($\lambda \in \Lambda^+_{n,r}$) を Ψ を通じて $U(\mathfrak{gl}^{\langle \mathbf{Q} \rangle}_m[x])$-加群と思うと,

$$L(\lambda) \cong \mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{u}}^{\langle \mathbf{Q} \rangle}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{h})) \text{ as } U(\mathfrak{gl}^{\langle \mathbf{Q} \rangle}_m[x])\text{-modules}$$

となる。ここで, $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{h}) \in \prod_{i=1}^{m-1} (\mathbb{C}[x]^{\langle Q_i \rangle}_{\text{monic}} \times \mathbb{B}^{\langle Q_i \rangle}) \times \prod_{t \geq 0} \mathbb{C}$ は,

$$\varphi_i = \begin{cases} (x - \widehat{Q}_{k-1})^{\lambda^{(k)}_j - \lambda^{(k)}_{j+1}} & \text{if } i = \sum_{l=1}^{k-1} m_l + j \quad (j \neq m_k), \\ (x - \widehat{Q}_{k-1})^{\lambda^{(k)}_{m_k}} & \text{if } i = \sum_{l=1}^{k} m_l \text{ and } \widehat{Q}_{k-1} \neq \widehat{Q}_k, \\ 1 & \text{if } i = \sum_{l=1}^{k} m_l \text{ and } \widehat{Q}_{k-1} = \widehat{Q}_k, \end{cases}$$

$$\beta_i = \begin{cases} 0 & \text{if } i = \sum_{l=1}^{k-1} m_l + j \quad (j \neq m_k), \\ \lambda^{(k+1)}_1 & \text{if } i = \sum_{l=1}^{k} m_l \text{ and } \widehat{Q}_{k-1} \neq \widehat{Q}_k, \\ \lambda^{(k)}_{m_k} + \lambda^{(k+1)}_1 & \text{if } i = \sum_{l=1}^{k} m_l \text{ and } \widehat{Q}_{k-1} = \widehat{Q}_k, \end{cases}$$

$$h_t = \lambda^{(r)}_{m_r} \widehat{Q}^t_{r-1}$$

によって定まる。

Remark 5.2.

(i) $\mathscr{S}^{\mathbf{1}}_{n,r}(\mathbf{m})$ の既約表現を考える際には, $U(\mathfrak{gl}^{\langle \mathbf{Q} \rangle}_m[x])$ の変形パラメータ (5.1.1) と最高ウェイトを定めるモニック多項式の根, 共に $\mathscr{S}^{\mathbf{1}}_{n,r}(\mathbf{m})$ のパラメータ $\widehat{\mathbf{Q}} = (\widehat{Q}_0, \ldots, \widehat{Q}_{r-1})$ が現れる。モニック多項式の根は, 実際に有限次元の最高ウェイト加群を構成する際に用いた evaluation 加群の evaluation 値に対応していた。つまり, $\mathscr{S}^{\mathbf{1}}_{n,r}(\mathbf{m})$ の既約表現においては, 変形パラメータと evaluation 値に同じものが現れているという, 一般の $U(\mathfrak{gl}^{\langle \mathbf{Q} \rangle}_m[x])$-加群から見ると特殊なことが起こっている。

(ii) $r = 1$ のときは, $U(\mathfrak{gl}^{\langle \mathbf{Q} \rangle}_m[x])$ の変形パラメータ $\mathbf{Q}$ は $\mathbf{0}$ であり (i.e. カレント Lie 代数), 全ての i に対し, $\varphi_i = (x - \widehat{Q}_0)^{\lambda_i - \lambda_{i+1}}$ となる ($\lambda^{(1)}$ の右肩の (1) は明らかなので省略する)。つまり, 全てのモニック多項式の根は $\widehat{Q}_0$ のみである。これは, $L(\lambda)$ が 分割 λ に対応する既約 $U(\mathfrak{gl}_m)$-加群の $\widehat{Q}_0$ における evaluation 加群であることを意味している。

References

[DJM] R. Dipper, G. James and A. Mathas, Cyclotomic q-Schur algebras, *Math. Z.* **229** (1998), 385-416.

[W1] K. Wada, *New Realization of Cyclotomic q-Schur Algebras*, to appear in Publ. RIMS. arXiv:1504.03863.

[W2] K. Wada, *Finite dimensional simple modules of deformed current Lie algebras*, in preparation.

E-mail address: wada@math.shinshu-u.ac.jp