On Weyl modules of cyclotomic q-Schur algebras

和田 堅太郎 (Kentaro Wada) *
(京都大学 数理解析研究所)

Abstract. [W2] において, cyclotomic q-Schur 代数 $\mathscr{S}_{n,r}$ の Weyl 加群の指標を Kostka 数を用いて記述し, 指標と対称関数との関係を調べました。さらに, $\mathscr{S}_{n,r}$ のモジュラー表現への簡単な応用も与えました。その際に, [W1] で得た cyclotomic q-Schur 代数 $\mathscr{S}_{n,r}$ の生成元と基本関係式による表示を使って, 量子群 $U_g(\mathfrak{gl}_m)$ のある Levi 部分代数 $U_q(\mathfrak{g}) \cong U_q(\mathfrak{gl}_{m_1}) \otimes \cdots \otimes U_q(\mathfrak{gl}_{m_r})$ から $\mathscr{S}_{n,r}$ への代数としての (自然な) 準同型写像 $\Phi_{\mathfrak{g}} : U_q(\mathfrak{g}) \to \mathscr{S}_{n,r}$ を定義し, この $\Phi_{\mathfrak{g}}$ を通じて $\mathscr{S}_{n,r}$ の Weyl 加群を $U_q(\mathfrak{g})$-加群と思い, その $U_q(\mathfrak{g})$-結晶基底に対応する結晶グラフを組み合わせ論的に記述することが基本的なアイデアとなっています。この報告では, [W2] の結果を簡単にまとめ, 最後に Example を与えます。

§ 1. Cyclotomic q-Schur algebras

F を体とし, $\mathscr{H}_{n,r}$ を $q, Q_1, \cdots, Q_r \in F$ $(q \neq 0)$ をパラメータ とする $\mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$ ($G(r,1,n)$ 型の複素鏡映群) に付随する F 上の **Ariki-Koike 代数**とする。

r 個の正の整数の組 $\mathbf{m} = (m_1, \cdots, m_r) \in \mathbb{Z}^r_{>0}$ $(m_k \geq n$ for $^\forall k)$ に対し,

$$\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}) := \left\{ \mu = (\mu^{(1)}, \cdots, \mu^{(r)}) \;\middle|\; \begin{array}{c} \mu^{(k)} = (\mu^{(k)}_1, \cdots, \mu^{(k)}_{m_k}) \in \mathbb{Z}^{m_k}_{\geq 0} \\ \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{m_k} \mu^{(k)}_i = n \end{array} \right\}$$

とし,

$$\mathscr{S}_{n,r} = \mathscr{S}_{n,r}(\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})) = \mathrm{End}_{\mathscr{H}_{n,r}} \Big(\bigoplus_{\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})} M^\mu \Big)$$

を $\mathscr{H}_{n,r}$ に付随する **cyclotomic q-Schur 代数** とする。ここで, M^μ は $\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$ によって定まる $\mathscr{H}_{n,r}$-加群である (M^μ の定義については, [DJM], [W1], [W2] 等を参照)。また,

$$\Lambda^+_{n,r} := \big\{ \lambda = (\lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(r)}) \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m}) \bigm| \lambda^{(k)} : \text{partition} \big\}$$

を サイズが n の r-partition の集合とし, $W(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda^+_{n,r})$ を $\mathscr{S}_{n,r}$ の **Weyl 加群**とする (定義については, [DJM], [W1], [W2] 等を参照)。

*This research was supported by GCOE ‘Fostering top leaders in mathematics’, Kyoto University.

$\mathcal{K} = \mathbb{Q}(q, Q_1, \cdots, Q_r)$ を有理関数体とする (このとき, $q, Q_1, \cdots, Q_r$ は不定元とする) 。$F = \mathcal{K}$ のとき, $\mathscr{S}_{n,r}$ は半単純であり, $\{W(\lambda) \,|\, \lambda \in \Lambda^+_{n,r}\}$ が $\mathscr{S}_{n,r}$ の既約加群の同型類の完全代表系を与える。また, F が勝手な体 (パラメータも F の勝手な元) であるとき, $\mathscr{S}_{n,r}$ は quasi-hereditary 代数となることが知られており, $\{L(\lambda) := W(\lambda)/\operatorname{rad} W(\lambda) \,|\, \lambda \in \Lambda^+_{n,r}\}$ が $\mathscr{S}_{n,r}$ の既約加群の同型類の完全代表系を与える。

$\mathscr{S}_{n,r}$ の加群を特徴付けるために, $\mathscr{S}_{n,r}$-加群の "指標" を以下のように定める。$x^{(k)} = (x^{(k)}_1, \cdots, x^{(k)}_{m_k})$ $(1 \leq k \leq r)$ を m_k 個の独立な変数とし, $\mathbf{x} = (x^{(1)}, \cdots, x^{(r)})$ をこれら全ての変数の集合とする。$\mathbf{x}$ を変数とする $\mathbb{Z}$ 上の多項式環 $\mathbb{Z}[\mathbf{x}]$ を考える。

$\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$ に対し, $1_\mu \in \mathscr{S}_{n,r}$ を M^μ 上は恒等写像で, M^τ $(\tau \neq \mu)$ 上は 0-写像であるものとすると, $\mathscr{S}_{n,r}$ の単位元 $1_{\mathscr{S}_{n,r}}$ は,

$$1_{\mathscr{S}_{n,r}} = \sum_{\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})} 1_\mu$$

と互いに直交するベキ等元の和に分解する。この単位元の分解より, $\mathscr{S}_{n,r}$-加群 M は,

$$M = \bigoplus_{\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})} 1_\mu \cdot M \tag{1.1}$$

と分解する。以下, $M_\mu := 1_\mu \cdot M$ と置く。そこで, M の**指標** $\operatorname{ch} M \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$ を

$$\operatorname{ch} M = \sum_{\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})} \dim_F M_\mu \cdot x^\mu$$

によって定める。ここで, $x^\mu = \prod_{k=1}^r (x^{(k)}_1)^{\mu^{(k)}_1} (x^{(k)}_2)^{\mu^{(k)}_2} \cdots (x^{(k)}_{m_k})^{\mu^{(k)}_{m_k}}$ である。M の組成因子は, その指標 $\operatorname{ch} M$ によって一意的に定まる。特に, $F = \mathcal{K}$ のときは, $\mathscr{S}_{n,r}$ が半単純となるので, $\mathscr{S}_{n,r}$ の加群は, その指標によって (同型を除いて) 一意的に定まる。

Weyl 加群 $W(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda^+_{n,r})$ の指標を記述するために, 半標準盤を定義しよう。$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 上の順序を

$$(a, c) \geq (a', c') \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} c > c' \text{ or } c = c' \text{ かつ } a \geq a'$$

によって定める (逆辞書式順序)。$\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$ に対し,

$$[\mu] := \left\{ (i, j, k) \in \mathbb{Z}^3 \;\middle|\; 1 \leq i \leq m_k, 1 \leq j \leq \mu^{(k)}_i, 1 \leq k \leq r \right\}$$

とする。$\lambda \in \Lambda^+_{n,r}$, $\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$ に対し, λ を枠とするウェイト μ の半標準盤 T とは, 写像 $T : [\lambda] \to \bigl\{(a,c) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \bigm| a \geq 1, 1 \leq c \leq r\bigr\}$ で,

(i) $\mu^{(k)}_i = \sharp\bigl\{x \in [\lambda] \bigm| T(x) = (i,k)\bigr\}$.

(ii) If $T((i,j,k)) = (a,c)$, then $k \leq c$,

(iii) $T((i,j,k)) \leq T((i,j+1,k))$ if $(i,j+1,k) \in [\lambda]$,

(iv) $T((i,j,k)) < T((i+1,j,k))$ if $(i+1,j,k) \in [\lambda]$.

を満たすもののことである。λ を枠とするウェイト μ の半標準盤全ての集合を $\mathcal{T}_0(\lambda,\mu)$ とし, $\mathcal{T}_0(\lambda) = \cup_{\mu\in\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})}\mathcal{T}_0(\lambda,\mu)$ とおく。すると, [DJM] によって, $\lambda \in \Lambda^+_{n,r}$ に対し,

$$\operatorname{ch} W(\lambda) = \sum_{\mu\in\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})} \sharp\mathcal{T}_0(\lambda,\mu)\cdot x^{\mu}$$

となることが知られている。

§ 2. Weyl 加群 $W(\lambda)$ の指標と対称関数

まず, 対称関数に関する記号を準備しよう。変数の集合 $\mathbf{x} = (x^{(1)},\cdots,x^{(r)})$ は前章と同じものとする。$\mathfrak{S}(x^{(1)})\times\cdots\times\mathfrak{S}(x^{(r)})$ に関する対称多項式のなす環 $\Xi_{\mathbf{m}} = \bigotimes_{k=1}^{r}\mathbb{Z}[x^{(k)}]^{\mathfrak{S}(x^{(k)})}$ を考える。$\Xi^n_{\mathbf{m}}$ を次数 n の斉次対称多項式からなる $\Xi_{\mathbf{m}}$ の $\mathbb{Z}$-部分加群とすれば, $\Xi_{\mathbf{m}} = \bigoplus_{n\geq 0}\Xi^n_{\mathbf{m}}$ となる。

さらに, 各 $n \geq 0$ に対し, $\Xi^n = \varprojlim_{\mathbf{m}}\Xi^n_{\mathbf{m}}$ ($\mathbf{m}$ に関する射影極限) を考え, $\Xi := \bigoplus_{n\geq 0}\Xi^n$ とおく。Ξ は無限個の変数 $X^{(k)} = (X^{(k)}_1, X^{(k)}_2,\cdots)$ $(k = 1,\cdots,r)$ を持った対称関数のなす環 $\bigotimes_{k=1}^{r}\mathbb{Z}[X^{(k)}]^{\mathfrak{S}(X^{(k)})}$ に一致する。また, $\mathbf{X} = (X^{(1)},\cdots,X^{(r)})$ を Ξ の変数全体の集合とする。

$\lambda = (\lambda^{(1)},\cdots,\lambda^{(r)}) \in \Lambda^+_{n,r}$ に対し, $S_\lambda(\mathbf{x}) := \prod_{k=1}^{r} S_{\lambda^{(k)}}(x^{(k)})$ (resp. $S_\lambda(\mathbf{X}) := \prod_{k=1}^{r} S_{\lambda^{(k)}}(X^{(k)})$) とおく。ここで, $S_{\lambda^{(k)}}(x^{(k)})$ (resp. $S_{\lambda^{(k)}}(X^{(k)})$) は $\lambda^{(k)}$ に対応する **Schur 多項式** (resp. **Schur 関数**) である。すると, $\bigl\{S_\lambda(\mathbf{x}) \bigm| \lambda \in \Lambda^+_{n,r}\bigr\}$ (resp. $\bigl\{S_\lambda(\mathbf{X}) \bigm| \lambda \in \Lambda^+_{n,r}\bigr\}$) が $\Xi^n_{\mathbf{m}}$ (resp. Ξ^n) の自由 $\mathbb{Z}$-基底を与える。

さて, 対称関数と $\mathscr{S}_{n,r}$ の Weyl 加群の指標との関係をみるために, 以下の事を考える。$m = m_1 + \cdots + m_r$ とし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{m_1}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{gl}_{m_r}$ を $\mathfrak{gl}_m$ の Levi 部分代数とする。$P^{(k)} = \bigoplus_{i=1}^{m_k}\mathbb{Z}\varepsilon_{(i,k)}$ を $\mathfrak{gl}_{m_k}$ の weight lattice とする。また, $P = \bigoplus_{k=1}^{r} P^{(k)}$ を $\mathfrak{g}$ の weight lattice とする。すると, 対応 $\mu \mapsto \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{m_k}\mu^{(k)}_i\varepsilon_{(i,k)}$ $(\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m}))$ によって, $\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$ を P の部分集合とみなせる。以下, この対応によって $\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$ を P の部分集合と思う。

$U_q(\mathfrak{g}) \cong U_q(\mathfrak{gl}_{m_1})\otimes\cdots\otimes U_q(\mathfrak{gl}_{m_r})$ を $\mathfrak{g}$ に対応する量子群 (divided power を使った Lusztig's integral form を F (パラメータ $q \in F$) に特殊化したもの) とする。す

ると, [W1] で得た $\mathscr{S}_{n,r}$ の表示を用いることによって, 代数としての自然な準同型写像

$$\Phi_{\mathfrak{g}} : U_q(\mathfrak{g}) \to \mathscr{S}_{n,r}$$

が得られる ($\Phi_{\mathfrak{g}}$ の具体的な定義は [W1, 2.1] を参照)。ここで, 大事なことは, $\mathscr{S}_{n,r}$-加群 M を $\Phi_{\mathfrak{g}}$ を通じて $U_q(\mathfrak{g})$-加群とみなしたとき, $1_\mu \cdot M$ ($\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m}) \subset P$) はウェイト μ のウェイト空間となる。さらに, $\mathscr{S}_{n,r}$-加群 M を $\Phi_{\mathfrak{g}}$ を通じて $U_q(\mathfrak{g})$-加群とみなしたとき, M の ($U_q(\mathfrak{g})$-加群としての) ウェイトは $\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$ の元であることに注意する。特に, M の組成因子として現れる既約 $U_q(\mathfrak{g})$-加群の最高ウェイトは, $\Lambda^+_{n,r}$ の元である。

以下, この章では $F = \mathcal{K}$ (パラメータは全て不定元) とする。$F = \mathcal{K}$ のとき, 有限次元 $U_q(\mathfrak{g})$-加群は半単純である。よって, $\mathscr{S}_{n,r}$ の Weyl 加群 $W(\lambda)$ ($\lambda \in \Lambda^+_{n,r}$) の $U_q(\mathfrak{g})$-加群としての既約分解

$$W(\lambda) \cong \bigoplus_{\mu \in \Lambda^+_{n,r}} \big(W(\mu^{(1)}) \boxtimes \cdots \boxtimes W(\mu^{(r)})\big)^{\beta_{\lambda\mu}} \tag{2.1}$$

を考えることが出来る。ここで, $W(\mu^{(k)})$ は $U_q(\mathfrak{gl}_{m_k})$ の最高ウェイト $\mu^{(k)}$ の Weyl 加群である。$W(\lambda)$ のウェイト を見ることによって, $\beta_{\lambda\mu}$ は三角性 ($\beta_{\lambda\lambda} = 1$ かつ $\beta_{\lambda\mu} \neq 0 \Rightarrow \lambda \geq \mu$, ここで "$\geq$" は $\Lambda^+_{n,r}$ 上の支配的順序) を持つことが分かる。この分解と $U_q(\mathfrak{gl}_{m_k})$ の表現論でよく知られていることから, 次の定理が従う。

Theorem 2.1 ([W2, Theorem 4.3])**.**

(i) $\lambda \in \Lambda^+_{n,r}$ に対し,

$$\operatorname{ch} W(\lambda) = \sum_{\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})} \left(\sum_{\nu \in \Lambda^+_{n,r}} \beta_{\lambda\nu} \prod_{k=1}^{r} K_{\nu^{(k)}\mu^{(k)}} \right) \cdot x^\mu.$$

ここで, $K_{\nu^{(k)}\mu^{(k)}}$ は分割 $\nu^{(k)}, \mu^{(k)}$ に対応する ***Kostka* 数**である。

(ii) $\lambda \in \Lambda^+_{n,r}$ に対し, $\widetilde{S}_\lambda(\mathbf{x}) := \operatorname{ch} W(\lambda)$ とすると,

$$\widetilde{S}_\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{\mu \in \Lambda^+_{n,r}} \beta_{\lambda\mu} S_\mu(\mathbf{x})$$

が成り立つ。

(iii) $\{\widetilde{S}_\lambda(\mathbf{x}) \mid \lambda \in \Lambda^+_{n,r}\}$ は, $\Xi^n_{\mathbf{m}}$ の自由 $\mathbb{Z}$-基底を与える。

$\lambda \in \Lambda^+_{n,r}$ に対し, $\widetilde{S}_\lambda(\mathbf{X}) \in \Xi^n$ を $\Xi^n_{\mathbf{m}}$ へ射影すると $\widetilde{S}_\lambda(\mathbf{x})$ となるものとして定義する。すると, Theorem 2.1 より,

$$\widetilde{S}_\lambda(\mathbf{X}) = \sum_{\mu \in \Lambda^+_{n,r}} \beta_{\lambda\mu} S_\mu(\mathbf{X}) \tag{2.2}$$

となり, $\left\{\widetilde{S}_\lambda(\mathbf{X}) \mid \lambda \in \Lambda^+_{n,r}\right\}$ が Ξ^n の $\mathbb{Z}$-自由基底を与える。さらに, 非常に特別な $\lambda \in \Lambda^+_{n,r}$ に対しては, $\widetilde{S}_\lambda(\mathbf{X})$ は以下のように通常の Schur 関数と同一視される。

Proposition 2.2 ([W2, Proposition 4.5])**.** *ある $t \in \{1, \cdots, r\}$ に対し, $\lambda^{(l)} = \emptyset$ $(l \neq t)$ であるような $\lambda \in \Lambda^+_{n,r}$ (つまり, $\lambda = (\emptyset, \cdots, \emptyset, \lambda^{(t)}, \emptyset, \cdots, \emptyset)$) に対し,*

$$\widetilde{S}_\lambda(\mathbf{X}) = S_{\lambda^{(t)}}(X^{(t)} \cup X^{(t+1)} \cup \cdots \cup X^{(r)})$$

が成り立つ。ここで, $S_{\lambda^{(t)}}(X^{(t)} \cup \cdots \cup X^{(r)}) \in \mathbb{Z}[X^{(t)} \cup \cdots \cup X^{(r)}]^{\mathfrak{S}(X^{(t)} \cup \cdots \cup X^{(r)})}$ は, 分割 $\lambda^{(t)}$ に対応する変数が $X^{(t)} \cup \cdots \cup X^{(r)}$ である Schur 関数である (自然な埋め込みによって $\mathbb{Z}[X^{(t)} \cup \cdots \cup X^{(r)}]^{\mathfrak{S}(X^{(t)} \cup \cdots \cup X^{(r)})} \subset \bigotimes_{k=t}^{r} \mathbb{Z}[X^{(k)}]^{\mathfrak{S}(X^{(k)})} \subset \Xi$ であることに注意)。

Proposition 2.2, 及び (2.2) より, $\widetilde{S}_\lambda(\mathbf{X})$ は Schur 関数の一般化とみなすことが出来る。

$\Lambda^+_{\geq 0,r} := \bigcup_{n \geq 0} \Lambda^+_{n,r}$ とすれば, $\left\{\widetilde{S}_\lambda(\mathbf{X}) \mid \lambda \in \Lambda^+_{\geq 0,r}\right\}$ は, Ξ の $\mathbb{Z}$-自由基底を与える。そこで, $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda^+_{\geq 0,r}$ に対し, $c^\nu_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z}$ を,

$$\widetilde{S}_\lambda(\mathbf{X})\widetilde{S}_\mu(\mathbf{X}) = \sum_{\nu \in \Lambda^+_{\geq,r}} c^\nu_{\lambda\mu} \widetilde{S}_\nu(\mathbf{X})$$

によって定める (Littlewood-Richardson 係数の一般化)。この $c^\nu_{\lambda\mu}$ に関して以下のことが成り立つ。

Proposition 2.3 ([W2, Proposition 4.7])**.** *$\lambda, \mu, \nu \in \Lambda^+_{\geq 0,r}$ に対し,*

(i) $c^\nu_{\lambda\mu} = 0$ *unless* $|\nu| = |\lambda| + |\mu|$.

(ii) $c^\nu_{\lambda\mu} = \displaystyle\sum_{\xi,\eta,\tau \in \Lambda^+_{\geq 0,r}} \beta_{\lambda\xi}\beta_{\mu\eta}\beta'_{\tau\nu} \prod_{k=1}^{r} \mathrm{LR}^{\tau^{(k)}}_{\xi^{(k)}\eta^{(k)}}$,

ここで, $\left(\beta'_{\tau\nu}\right)_{\tau,\nu \in \Lambda^+_{n,r}} = \left(\beta_{\tau\nu}\right)^{-1}_{\tau,\nu \in \Lambda^+_{n,r}}$ $(n := |\nu|)$ とし, $\mathrm{LR}^{\tau^{(k)}}_{\xi^{(k)}\eta^{(k)}}$ は, 分割 $\tau^{(k)}, \xi^{(k)}, \eta^{(k)}$ に対する Littlewood-Richardson 係数である。

(iii) 全ての k に対し $|\nu^{(k)}| = |\lambda^{(k)}| + |\mu^{(k)}|$ であるならば,

$$c^{\nu}_{\lambda\mu} = \prod_{k=1}^{r} \mathrm{LR}^{\nu^{(k)}}_{\lambda^{(k)}\mu^{(k)}}$$

である。

(iv) ある $t \in \{1, \cdots, r\}$ に対し, $\lambda^{(l)} = \mu^{(l)} = \emptyset$ $(l \neq t)$ であるならば,

$$c^{\nu}_{\lambda\mu} = \begin{cases} \mathrm{LR}^{\nu^{(t)}}_{\lambda^{(t)}\mu^{(t)}} & \textit{if } \lambda^{(l)} = \emptyset \textit{ unless } l = t \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

である。

さらに, 次のことを予想しています。

予想１: $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda^{+}_{\geq 0, r}$ に対し, $c^{\nu}_{\lambda\mu}$ は非負整数である。

より強く,

予想２: $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda^{+}_{\geq 0, r}$ に対し, $c^{\nu}_{\lambda\mu} = \prod_{k=1}^{r} \mathrm{LR}^{\nu^{(k)}}_{\lambda^{(k)}\mu^{(k)}}$ である。

Proposition 2.3 (iii) と $\mathrm{LR}^{\nu^{(k)}}_{\lambda^{(k)}\mu^{(k)}} = 0$ if $|\nu^{(k)}| \neq |\lambda^{(k)}| + |\mu^{(k)}|$ であることに注意すれば, **予想２** は, 全ての k に対し $|\nu^{(k)}| = |\lambda^{(k)}| + |\mu^{(k)}|$ でない限り $c^{\nu}_{\lambda\mu} = 0$ であることと同値である (Proposition 2.3 (iv) にも注意)。

§ 3. Weyl 加群 $W(\lambda)$ 上の $U_q(\mathfrak{g})$-結晶構造

この章でも, $F = \mathcal{K}$ (パラメータは全て不定元) と仮定する。前章の議論において, 分解 (2.1) に現れる重複度 $\beta_{\lambda\mu}$ が大切な役割を果たしていました。この章では, $\mathscr{S}_{n,r}$ の Weyl 加群 $W(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda^{+}_{n,r})$ の ($\Phi_{\mathfrak{g}}$ を通じた) $U_q(\mathfrak{g})$-加群としての結晶構造を記述し, それを用いて $\beta_{\lambda\mu}$ を組み合わせ論的に計算する方法を与えます。

まず, $W(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda^{+}_{n,r})$ の μ-ウェイト空間 $W(\lambda)_{\mu}$ の基底と λ を枠とするウェイト μ の半標準盤全ての集合 $\mathcal{T}_0(\lambda, \mu)$ との間に 1 対 1 の対応があることに注意する。よって, $W(\lambda)$ の基底と λ を枠とする半標準盤全ての集合 $\mathcal{T}_0(\lambda)$ との間に ($W(\lambda)$ のウェイト空間分解 (1.1) と整合的な) 1 対 1 対応があることに注意しよう。そこで, まず $\mathcal{T}_0(\lambda)$ 上に組み合わせ論的に $U_q(\mathfrak{g})$-結晶構造を定義して, それが, ($U_q(\mathfrak{g})$-加群としての) $W(\lambda)$ の結晶構造と同型になることを示すことによって, $W(\lambda)$ 上の $U_q(\mathfrak{g})$-結晶構造を記述する。$r = 1$ の場合は, [KN] で導入された, “Far-Eastern reading” (admissible reading の一種) と呼ばれているものに一致することを注意しておく。

まず, $U_q(\mathfrak{gl}_{m_k})$ の自然表現 V_{m_k} の結晶基底を復習する。$\{v_1, v_2, \cdots, v_{m_k}\}$ を V_{m_k} の自然な基底とする。また, $\mathcal{A}_0$ を $\mathbb{Q}(Q_1, \cdots, Q_r)[q]$ の $q = 0$ での局所化とする。

$\mathcal{L}_{m_k} := \bigoplus_{j=1}^{m_k} \mathcal{A}_0 \cdot v_j$ とすれば, $\mathcal{L}_{m_k}$ は V_{m_k} の crystal lattice となる。さらに, $\boxed{j} = v_j + q\mathcal{L}_{m_k} \in \mathcal{L}_{m_k}/q\mathcal{L}_{m_k}$ とおき, $\mathcal{B}_{m_k} = \left\{\boxed{j} \,|\, 1 \le j \le m_k\right\}$ を考えると, $(\mathcal{L}_{m_k}, \mathcal{B}_{m_k})$ は, V_{m_k} の結晶基底となる。また, 結晶グラフは,

$$\boxed{1} \xrightarrow{1} \boxed{2} \xrightarrow{2} \cdots \xrightarrow{m_k-2} \boxed{m_k-1} \xrightarrow{m_k-1} \boxed{m_k}$$

となる。

V_{m_k} の n_k 階のテンソル積を $V_{m_k}^{\otimes n_k}$ とし, $U_q(\mathfrak{g})$-加群 $V_{m_1}^{\otimes n_1} \boxtimes \cdots \boxtimes V_{m_r}^{\otimes n_r}$ $(n_1, \cdots, n_r \in \mathbb{Z}_{\ge 0})$ に対応する結晶基底を $\mathcal{B}_{m_1}^{\otimes n_1} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{B}_{m_r}^{\otimes n_r}$ とする ($\mathcal{B}_{m_k}^{\otimes n_k}$ の結晶構造は $\mathcal{B}_{m_k}$ の結晶構造とテンソル積ルールより得られる)。以下, $\mathcal{T}_0(\lambda)$ を $\mathcal{B}_{m_1}^{\otimes n_1} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{B}_{m_r}^{\otimes n_r}$ 達の直和の中に埋め込むことを考える。

$\lambda \in \Lambda_{n,r}^+$ に対し, 各 $\lambda^{(k)}$ $(1 \le k \le r)$ に対応するヤング図を並べたものと $[\lambda]$ とを同一視し, 枠が λ であるような半標準盤 T を, $(i,j,k) \in [\lambda]$ に対応する箱の中に $T((i,j,k))$ の値を書き込んだものとして表す。例えば, $\lambda = ((3,2),(3,1),(1,1))$, $\mu = ((2,1),(2,2),(3,1))$ に対し,

$$\text{(例 1)} \quad T = \left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline (1,1) & (1,1) & (1,2) \\ \hline (2,1) & (1,3) \\ \cline{1-2} \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline (1,2) & (2,2) & (1,3) \\ \hline (2,2) \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline (1,3) \\ \hline (2,3) \\ \hline \end{array} \right) \in \mathcal{T}_0(\lambda, \mu),$$

とすると, $T((1,1,1)) = (1,1)$, $T((1,2,1)) = (1,1)$, $\cdots$, $T((2,1,3)) = (2,3)$ という対応になる。

$\lambda \in \Lambda_{n,r}^+$ に対し, $[\lambda]$ 上の全順序 “$\succeq$” を,

$$(i,j,k) \succ (i',j',k') \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} k > k' \\ \quad \text{or} \\ k = k' \text{ and } j > j' \\ \quad \text{or} \\ k = k', j = j' \text{ and } i < i' \end{cases}$$

によって定める。例えば,

$$(5,4,2) \succ (2,3,2) \succ (5,3,2) \succ (6,4,1)$$

である。また, $\mathcal{T}_0(\lambda)$ 上の同値関係 “$\sim$” を

$$T \sim T' \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{l} \left\{x \in [\lambda] \,\middle|\, T(x) = (i,k) \text{ for some } i = 1, \cdots, m_k\right\} \\ = \left\{y \in [\lambda] \,\middle|\, T'(y) = (j,k) \text{ for some } j = 1, \cdots, m_k\right\} \end{array} \text{ for any } k = 1, \cdots, r$$

によって定める。例えば,

$$T_1 = \left(\begin{array}{|c|c|}\hline (1,1) & (1,1) \\ \hline (1,2) & (2,2) \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline (1,2) & (2,2) \\ \hline (3,2) \\ \cline{1-1} \end{array} \right), \quad T_2 = \left(\begin{array}{|c|c|}\hline (1,1) & (2,1) \\ \hline (1,2) & (3,2) \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline (2,2) & (2,2) \\ \hline (4,2) \\ \cline{1-1} \end{array} \right),$$

$$T_3 = \left(\begin{array}{|c|c|}\hline (1,1) & (1,2) \\ \hline (2,1) & (3,2) \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline (2,2) & (2,2) \\ \hline (4,2) \\ \cline{1-1} \end{array} \right), \ T_4 = \left(\begin{array}{|c|c|}\hline (1,1) & (2,2) \\ \hline (3,1) & (3,2) \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline (1,2) & (1,2) \\ \hline (2,2) \\ \cline{1-1} \end{array} \right).$$

であるとすると, $T_1 \sim T_2$, $T_2 \not\sim T_3$ and $T_3 \sim T_4$ である。

$\mathcal{T}_0(\lambda) = \bigcup_t \mathcal{T}_0(\lambda)[t]$ を "$\sim$" に関する同値類への分解とする。各同値類 $\mathcal{T}_0(\lambda)[t]$ に対し, $(n_1, \cdots, n_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ を, $n_k := |\mu^{(k)}|$ (for some $\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$ s.t. $\mathcal{T}_0(\lambda, \mu) \cap \mathcal{T}_0(\lambda)[t] \neq \emptyset$) によって定める (同値関係 "$\sim$" の定義より well-defined である)。例えば, (例 1) の半標準盤 T を含む同値類に対しては, $(3,4,4) = (|\mu^{(1)}|, |\mu^{(2)}|, |\mu^{(3)}|)$ である。以上の設定のもと, 各同値類 $\mathcal{T}_0(\lambda)[t]$ に対し, 写像

$$\begin{aligned} \Psi_t^\lambda : \mathcal{T}_0(\lambda)[t] &\to \mathcal{B}_{m_1}^{\otimes n_1} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{B}_{m_r}^{\otimes n_r}, \\ T &\mapsto \left(\boxed{i_1^{(1)}} \otimes \cdots \otimes \boxed{i_{n_1}^{(1)}}\right) \boxtimes \cdots \boxtimes \left(\boxed{i_1^{(r)}} \otimes \cdots \otimes \boxed{i_{n_r}^{(r)}}\right) \end{aligned}$$

を以下の３つの条件によって定義する:

(i) $\{x \in [\lambda] \,|\, T(x) = (i,k) \text{ for some } i = 1, \cdots, m_k\} = \{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_{n_k}^{(k)}\}$ for $k = 1, \cdots, r$.

(ii) $x_1^{(k)} \succ x_2^{(k)} \succ \cdots \succ x_{n_k}^{(k)}$ for $k = 1, \cdots, r$.

(iii) $T(x_j^{(k)}) = (i_j^{(k)}, k)$ for $1 \leq j \leq n_k$, $1 \leq k \leq r$.

つまり, $\Psi_t^\lambda(T)$ の中の $\left(\boxed{i_1^{(k)}} \otimes \cdots \otimes \boxed{i_{n_k}^{(k)}}\right)$ の成分は, $T(x) = (i,k)$ for some $i = 1, \cdots, m_k$ であるような x 全てに対し, "$\succeq$" に関して大きい順に $T(x) = (i,k)$ の最初の成分 i を読んでいくことによって得られる。例えば,

$$T = \left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline (1,1) & (1,1) & (1,2) \\ \hline (2,1) & (1,3) \\ \cline{1-2} \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline (1,2) & (2,2) & (1,3) \\ \hline (2,2) \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline (1,3) \\ \hline (2,3) \\ \hline \end{array} \right) \in \mathcal{T}_0(\lambda)[t],$$

に対し, $\Psi_t^\lambda(T) = (\boxed{1} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{2}) \boxtimes (\boxed{2} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{1}) \boxtimes (\boxed{1} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{1})$ となる。この写像 Ψ_t^λ に対し, 次のことが成り立つ。

Proposition 3.1 ([W2, Proposition 2.14])**.**

$T_0(\lambda)$ ($\lambda \in \Lambda_{n,r}^+$) の各同値類 $\mathcal{T}_0(\lambda)[t]$ に対し, 写像 $\Psi_t^\lambda : \mathcal{T}_0(\lambda)[t] \to \mathcal{B}_{m_1}^{\otimes n_1} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{B}_{m_r}^{\otimes n_r}$ は単射であり, さらに, $\Psi_t^\lambda(\mathcal{T}_0(\lambda)[t]) \cup \{0\}$ は $\mathcal{B}_{m_1}^{\otimes n_1} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{B}_{m_r}^{\otimes n_r}$ 上の柏原作用素に関して閉じている。

この命題によって, Ψ_t^λ を通じて $\mathcal{T}_0(\lambda)[t]$ 上に $U_q(\mathfrak{g})$-結晶構造を入れることができる。さらに, (結晶としての) 直和 $\bigoplus_t \mathcal{T}_0(\lambda)[t]$ を考えることによって, $\mathcal{T}_0(\lambda) = \bigcup_t \mathcal{T}_0(\lambda)[t]$ 上に $U_q(\mathfrak{g})$-結晶構造が定義される。

$U_q(\mathfrak{g}) \cong U_q(\mathfrak{gl}_{m_1}) \otimes \cdots \otimes U_q(\mathfrak{gl}_{m_r})$ のもとで, $U_q(\mathfrak{gl}_{m_k})$ $(1 \leq k \leq r)$ の Chevalley generator を $e_{(i,k)}$ $f_{(i,k)}$ $(1 \leq i \leq m_k - 1)$ とし, それぞれに対応する柏原作用素を

$\widetilde{e}_{(i,k)}$, $\widetilde{f}_{(i,k)}$ とする。$\Gamma'_{\mathfrak{g}}(\mathbf{m}) := \big\{(i,k) \bigm| 1 \le i \le m_k - 1, 1 \le k \le r\big\}$ とおけば, $\widetilde{e}_{(i,k)}, \widetilde{f}_{(i,k)}$ $((i,k) \in \Gamma'_{\mathfrak{g}}(\mathbf{m}))$ が $U_q(\mathfrak{g})$-結晶 $\mathcal{T}_0(\lambda)$ 上の柏原作用素となる。$T \in \mathcal{T}_0(\lambda)$ に対し,

$$T : U_q(\mathfrak{g})\text{-singular} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \widetilde{e}_{(i,k)} \cdot T = 0 \text{ for any } (i,k) \in \Gamma'_{\mathfrak{g}}(\mathbf{m})$$

と定義する。$T \in \mathcal{T}_0(\lambda)$ がいつ $U_q(\mathfrak{g})$-singular であるかは, 以下の Lemma によって判定できる。

Lemma 3.2 ([W2, Lemma 3.3]).

$T \in \mathcal{T}_0(\lambda)[t]$ に対し, $\Psi_t^{\lambda}(T) = \Big(\boxed{i_1^{(1)}} \otimes \cdots \otimes \boxed{i_{n_1}^{(1)}}\Big) \boxtimes \cdots \boxtimes \Big(\boxed{i_1^{(r)}} \otimes \cdots \otimes \boxed{i_{n_r}^{(r)}}\Big)$ であるとする。このとき,

$$\begin{aligned} T : U_q(\mathfrak{g})\textit{-singular} \Leftrightarrow\ & \Big(\boxed{i_1^{(k)}} \otimes \cdots \otimes \boxed{i_j^{(k)}}\Big) \in \mathcal{B}_{m_k}^{\otimes j} \text{ のウェイトが分割} \\ & \textit{for any } 1 \le j \le n_k,\ 1 \le k \le r \\ \Leftrightarrow\ & \sharp\big\{a \in \{1, \cdots, j\} \bigm| i_a^{(k)} = b\big\} \ge \sharp\big\{a \in \{1, \cdots, j\} \bigm| i_a^{(k)} = b+1\big\} \\ & \textit{for any } 1 \le j \le n_k,\ 1 \le b \le m_k - 1,\ 1 \le k \le r \end{aligned}$$

である。

以上の準備のもと, 次の定理が成り立つ。

Theorem 3.3 ([W2, Theorem 2.17]).

(i) $\lambda, \mu \in \Lambda_{n,r}^+$ に対し,

$$\beta_{\lambda\mu} = \sharp\big\{T \in \mathcal{T}_0(\lambda, \mu) \bigm| T : U_q(\mathfrak{g})\textit{-singular}\big\}$$

である。

(ii) $\lambda \in \Lambda_{n,r}^+$ に対し, $\mathcal{T}_0(\lambda)$ 上の $U_q(\mathfrak{g})$-結晶構造は, $W(\lambda)$ の ($\Phi_{\mathfrak{g}}$ を通じた $U_q(\mathfrak{g})$-加群としての) 結晶基底と (結晶として) 同型である。

§ 4. $\mathscr{S}_{n,r}$ のモジュラー表現への応用

この章では, F を勝手な体とし, パラメータを $q, Q_1, \cdots, Q_r \in F$ $(q \neq 0)$ とする。$\lambda, \mu \in \Lambda_{n,r}^+$ に対し,

$$d_{\lambda\mu} := [W(\lambda) : L(\mu)]_{\mathscr{S}_{n,r}}$$

を $\mathscr{S}_{n,r}$ の Weyl-加群 $W(\lambda)$ の $\mathscr{S}_{n,r}$-加群としての組成列における既約 $\mathscr{S}_{n,r}$-加群 $L(\mu)$ の重複度とする (**分解定数という**)。また,

$$x_{\lambda\mu} := [L(\lambda) : L(\mu^{(1)}) \boxtimes \cdots \boxtimes L(\mu^{(r)})]_{U_q(\mathfrak{g})}$$

を, 既約 $\mathscr{S}_{n,r}$-加群 $L(\lambda)$ を $\Phi_{\mathfrak{g}}$ を通じて $U_q(\mathfrak{g})$-加群と思ったときの組成列に現れる既約 $U_q(\mathfrak{g})$-加群 $L(\mu^{(1)}) \boxtimes \cdots \boxtimes L(\mu^{(r)})$ の重複度とする。また,

$$\overline{d}_{\lambda\mu} := \prod_{k=1}^{r} [W(\lambda^{(k)}) : L(\mu^{(k)})]_{U_q(\mathfrak{gl}_{m_k})}$$

とおく。ここで, $[W(\lambda^{(k)}) : L(\mu^{(k)})]_{U_q(\mathfrak{gl}_{m_k})}$ は 分割 $\lambda^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ に対応する $U_q(\mathfrak{gl}_{m_k})$ の分解定数である ($|\lambda^{(k)}| \neq |\mu^{(k)}|$ のときは, $[W(\lambda^{(k)}) : L(\mu^{(k)})]_{U_q(\mathfrak{gl}_{m_k})} = 0$ となることに注意)。さらに,

$$D = \left(d_{\lambda\mu}\right)_{\lambda,\mu \in \Lambda^+_{n,r}}, \qquad \overline{D} = \left(\overline{d}_{\lambda\mu}\right)_{\lambda,\mu \in \Lambda^+_{n,r}},$$
$$X = \left(x_{\lambda\mu}\right)_{\lambda,\mu \in \Lambda^+_{n,r}}, \qquad B = \left(\beta_{\lambda\mu}\right)_{\lambda,\mu \in \Lambda^+_{n,r}}.$$

とおく。ここで D は $\mathscr{S}_{n,r}$ の **分解行列** という。このとき, 以下のように $\mathscr{S}_{n,r}$ の分解行列 D の分解が得られる。

Theorem 4.1 ([W2, Theorem 5.5])**.**
$B \cdot \overline{D} = D \cdot X$ が成り立つ。

Remark 4.2. $B \cdot \overline{D}$ はパラメータ $Q_1, \cdots, Q_r$ の取り方に依らずに定まる。また, 上の定理と, $d_{\lambda\mu}$, $\overline{d}_{\lambda\mu}$, $\beta_{\lambda\mu}$, $x_{\lambda\mu}$ に関する性質 (三角性) より, $B \cdot \overline{D}$ の各成分は, $d_{\lambda\mu}$, $x_{\lambda\mu}$ それぞれの上限を与える。

パラメータが特殊な場合は, 以下のように X が単位行列となる。

Corollary 4.3 ([W2, Corollary 5.8])**.**

(i) $Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_r = 0$ ならば, X は単位行列である。よって, $D = B \cdot \overline{D}$ となる。

(ii) $q = 1$, $Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_r$ (0 である必要はない) ならば, X は単位行列である。さらに $\operatorname{char} F = 0$ であるならば, $D = B$ である。

§ 5. Example : $G(2,1,2)$ 型 ($\mathbf{m}=(2,2)$) の場合

この章では, $r=2$, $n=2$, $\mathbf{m}=(2,2)$ の場合の例を与える。

$W\left(\left(\boxed{}\boxed{}\,,\ \emptyset\right)\right)$ の $U_q(\mathfrak{g})$-結晶グラフ

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \left(\boxed{(1,1)}\boxed{(1,1)}\,,\ \emptyset\right)^{\spadesuit} \arrow[d, "{(1,1)}"'] & \\
 & \left(\boxed{(1,1)}\boxed{(2,1)}\,,\ \emptyset\right) \arrow[dl, "{(1,1)}"'] & \\
\left(\boxed{(2,1)}\boxed{(2,1)}\,,\ \emptyset\right) & & \left(\boxed{(1,1)}\boxed{(1,2)}\,,\ \emptyset\right)^{\spadesuit} \arrow[dll, "{(1,1)}"'] \arrow[d, "{(1,2)}"] \\
\left(\boxed{(2,1)}\boxed{(1,2)}\,,\ \emptyset\right) \arrow[drr, "{(1,2)}"] & & \left(\boxed{(1,1)}\boxed{(2,2)}\,,\ \emptyset\right) \arrow[d, "{(1,1)}"] \\
\left(\boxed{(1,2)}\boxed{(1,2)}\,,\ \emptyset\right)^{\spadesuit} \arrow[dr, "{(1,2)}"'] & & \left(\boxed{(2,1)}\boxed{(2,2)}\,,\ \emptyset\right) \\
 & \left(\boxed{(1,2)}\boxed{(2,2)}\,,\ \emptyset\right) \arrow[d, "{(1,2)}"'] & \\
 & \left(\boxed{(2,2)}\boxed{(2,2)}\,,\ \emptyset\right) &
\end{tikzcd}
$$

$W\left(\left(\begin{array}{|c|}\hline \\\hline \\\hline\end{array}\,,\ \emptyset\right)\right)$ の $U_q(\mathfrak{g})$-結晶グラフ

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \left(\begin{array}{|c|}\hline (1,1)\\\hline (2,1)\\\hline\end{array}\,,\ \emptyset\right)^{\spadesuit} & \\
 & \left(\begin{array}{|c|}\hline (1,1)\\\hline (1,2)\\\hline\end{array}\,,\ \emptyset\right)^{\spadesuit} \arrow[dl, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{(1,2)}"] & \\
\left(\begin{array}{|c|}\hline (2,1)\\\hline (1,2)\\\hline\end{array}\,,\ \emptyset\right) \arrow[dr, "{(1,2)}"'] & & \left(\begin{array}{|c|}\hline (1,1)\\\hline (2,2)\\\hline\end{array}\,,\ \emptyset\right) \arrow[dl, "{(1,1)}"] \\
 & \left(\begin{array}{|c|}\hline (2,1)\\\hline (2,2)\\\hline\end{array}\,,\ \emptyset\right) & \\
 & \left(\begin{array}{|c|}\hline (1,2)\\\hline (2,2)\\\hline\end{array}\,,\ \emptyset\right)^{\spadesuit} &
\end{tikzcd}
$$

$W\left(\left(\boxed{}\,,\ \boxed{}\right)\right)$ の $U_q(\mathfrak{g})$-結晶グラフ

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \left(\boxed{(1,1)}\,,\ \boxed{(1,2)}\right)^{\spadesuit} \arrow[dl, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{(1,2)}"] & \\
\left(\boxed{(2,1)}\,,\ \boxed{(1,2)}\right) \arrow[drr, "{(1,2)}"] & & \left(\boxed{(1,1)}\,,\ \boxed{(2,2)}\right) \arrow[d, "{(1,1)}"] \\
\left(\boxed{(1,2)}\,,\ \boxed{(1,2)}\right)^{\spadesuit} \arrow[d, "{(1,2)}"'] & & \left(\boxed{(2,1)}\,,\ \boxed{(2,2)}\right) \\
\left(\boxed{(2,2)}\,,\ \boxed{(1,2)}\right) \arrow[dr, "{(1,2)}"'] & & \left(\boxed{(1,2)}\,,\ \boxed{(2,2)}\right)^{\spadesuit} \\
 & \left(\boxed{(2,2)}\,,\ \boxed{(2,2)}\right) &
\end{tikzcd}
$$

$W\left(\left(\emptyset\,,\ \boxed{}\boxed{}\right)\right)$ の $U_q(\mathfrak{g})$-結晶グラフ

$$
\begin{tikzcd}
\left(\emptyset\,,\ \boxed{(1,2)}\boxed{(1,2)}\right)^{\spadesuit} \arrow[d, "{(1,2)}"'] \\
\left(\emptyset\,,\ \boxed{(1,2)}\boxed{(2,2)}\right) \arrow[d, "{(1,2)}"'] \\
\left(\emptyset\,,\ \boxed{(2,2)}\boxed{(2,2)}\right)
\end{tikzcd}
$$

$W\left(\left(\emptyset\,,\ \begin{array}{|c|}\hline \\\hline \\\hline\end{array}\right)\right)$ の $U_q(\mathfrak{g})$-結晶グラフ

$$
\left(\emptyset\,,\ \begin{array}{|c|}\hline (1,2)\\\hline (2,2)\\\hline\end{array}\right)^{\spadesuit}
$$

($\spadesuit$ が付いているものが $U_q(\mathfrak{g})$-singular)

行列 B はパラメータ $q, Q_1, \cdots, Q_r$ に依らずに定まる。

$B =$

	$(\emptyset, \begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix})$	$(\emptyset, \square\square)$	$(\square, \square)$	$(\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}, \emptyset)$	$(\square\square, \emptyset)$
$(\emptyset, \begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix})$	1				
$(\emptyset, \square\square)$	0	1			
$(\square, \square)$	1	1	1		
$(\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}, \emptyset)$	1	0	1	1	
$(\square\square, \emptyset)$	0	1	1	0	1

行列 $\overline{D}$ はパラメータ q のみに依って定まる (行列の並べ方は B の場合と同様)。

$$\overline{D} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ if } q^2 = -1, \quad \overline{D} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ otherwise }.$$

行列 D, X はパラメータ q, Q_1, Q_2 に依存する (行列の並べ方は B の場合と同様)。

<u>$q^2 \neq \pm 1, 0,\ Q_1 = Q_2$ のとき</u>

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>$q^2 \neq \pm 1, 0,\ q^{-2} Q_1 = Q_2 \neq 0$ のとき</u>

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>$q^2 \neq \pm 1, 0,\ q^2 Q_1 = Q_2 \neq 0$ のとき</u>

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\underline{q^2 \neq -1, 0,\ Q_1 = Q_2 = 0 \text{ or } q^2 = 1,\ Q_1 = Q_2 \neq 0 \text{ のとき}}$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\underline{q^2 = -1,\ \pm Q_1 \neq Q_2 \text{ のとき}}$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 2 & 1 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\underline{q^2 = -1,\ Q_1 = Q_2 \neq 0 \text{ のとき}}$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 2 & 1 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\underline{q^2 = -1,\ -Q_1 = Q_2 \text{ のとき}}$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\underline{q^2 = -1,\ Q_1 = Q_2 = 0 \text{ のとき}}$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 2 & 1 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

References

[DJM] R. Dipper, G. James, and A. Mathas, *Cyclotomic q-Schur algebras,* Math. Z. **229** (1998), 385–416.

[KN] M. Kashiwara and T. Nakashima, *Crystal Graphs for Representations of the q-Analogue of Classical Lie Algebras,* J. Algebra **165** (1994), 295–345.

[W1] K. Wada, *Presenting cyclotomic q-Schur algebras*, to appear in Nagoya Math. J. arXiv:0908.3306
[W2] K. Wada, *On Weyl modules of cyclotomic q-Schur algebras*, preprint.

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto 606-8502, JAPAN
E-mail address: wada@kurims.kyoto-u.ac.jp