Induction and Restriction Functors for Cyclotomic q-Schur Algebras

和田 堅太郎 (Kentaro Wada) *
(信州大学 理学部)

§ 0. Introduction

$\mathscr{H}_{n,r}$ を複素鏡映群 $\mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$ に付随する Ariki-Koike 代数とし，$\mathscr{S}_{n,r}$ を $\mathscr{H}_{n,r}$ に付随する cyclotomic q-Schur 代数とする。$\mathscr{S}_{n,r}$ は $\mathscr{H}_{n,r}$ の quasi-hereditary cover の１つであることが知られている。$\mathscr{H}_{n,r}$ の表現論における最も重要な結果の１つとして，現在 LLT-Ariki 理論と呼ばれているものがある ([A])。それは，$\bigoplus_{n\geq 0} \mathscr{H}_{n,r}$-mod の Grothendieck 群をあるウェイトの最高ウェイト $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$-加群 V と同一視し (このことを圏化という)，$\mathscr{H}_{n,r}$ の直既約射影加群，単純加群，Specht 加群をそれぞれ，V の canonical base, dual canonical base, standard base と同一視することによって，$\mathscr{H}_{n,r}$-mod の様々な情報を V の中から読み取ることである。ここで，V 上の $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$ の作用は，$\bigoplus_{n\geq 0} \mathscr{H}_{n,r}$-mod 上定義される，制限，誘導関手によって与えられることになる。

[W2] において，$\bigoplus_{n\geq 0} \mathscr{S}_{n,r}$-mod 上に制限，誘導関手を定義し，その関手を用いて，$\bigoplus_{n\geq 0} \mathscr{S}_{n,r}$-mod が (level r の) Fock 空間を圏化することを示すことができたので，その内容をまとめてみたいと思います。

§ 1. Cyclotomic q-Schur algebras

1.1. R を可換環とし，$q, Q_1, \dots, Q_r \in R$ (q は可逆元) とする。また，$\mathcal{A} = \mathbb{Z}[q, q^{-1}, Q_1, Q_2, \dots, Q_r]$ (このとき $q, Q_1, \dots, Q_r$ は不定元) とし，$\mathcal{K} = \mathbb{Q}(q, Q_1, \dots, Q_r)$ ($\mathcal{A}$ の商体) とする。$G(r, 1, n)$ 型の複素鏡映群 $\mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$ に付随する R 上の Ariki-Koike 代数 (cyclotomic Hecke 代数) ${}_R\mathscr{H}_{n,r}$ とは，以下の生成元と基本関係式で定義される R 上の単位元を持った結合代数である。

生成元: $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$,

基本関係式:

$$(T_0 - Q_1)(T_0 - Q_2)\dots(T_0 - Q_r) = 0,$$

$$(T_i - q)(T_i + q^{-1}) = 0 \qquad (1 \leq i \leq n-1),$$

$$T_0T_1T_0T_1 = T_1T_0T_1T_0,$$

*This research was supported by JSPS Grant-in-Aid for Research Activity Start-up No. 22840025, and partially supported by GCOE ‘Fostering top leaders in mathematics’, Kyoto University.

$$T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1} \qquad (1 \le i \le n-2),$$
$$T_iT_j = T_jT_i \qquad (|i-j| \le 2).$$

反自己同型写像 $*: {}_R\mathscr{H}_{n,r} \to {}_R\mathscr{H}_{n,r}$ $(h \mapsto h^*)$ を $T_i^* = T_i$ $(0 \le i \le n-1)$ によって定める。また，$T_1, \dots, T_{n-1}$ によって生成される ${}_R\mathscr{H}_{n,r}$ の部分代数は，n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の Iwahori-Hecke 代数 $\mathscr{H}(\mathfrak{S}_n)$ と同型である。$\{T_w \,|\, w \in \mathfrak{S}_n\}$ を $\mathscr{H}(\mathfrak{S}_n)$ の自然な基底とする。また，$w \in \mathfrak{S}_n$ に対し，その length を $\ell(w)$ で表す。${}_R\mathscr{H}_{n,r}$ の元 $L_1, \dots, L_n$ を $L_1 = T_0$, $L_i = T_{i-1}L_{i-1}T_{i-1}$ によって定める (${}_R\mathscr{H}_{n,r}$ の Jucys-Murphy 元という)。すると，$\left\{T_w L_1^{p_1} \dots L_n^{p_n} \;\middle|\; w \in \mathfrak{S}_n, 0 \le p_1, \dots, p_n \le r-1\right\}$ は ${}_R\mathscr{H}_{n,r}$ の自由 R-基底を与える ([AK])。

1.2. $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}_{>0}^r$ $(m_k \ge n$ for any $k)$ に対し，

$$\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}) = \left\{ \mu = (\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(r)}) \;\middle|\; \begin{matrix} \mu^{(k)} = (\mu_1^{(k)}, \dots, \mu_{m_k}^{(k)}) \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^{m_k} \\ \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)} = n \end{matrix} \right\}$$

とおく。$\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$ の元のことをサイズが n の r-composition という。また，

$$\Lambda_{n,r}^+ = \left\{ \lambda \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m}) \;\middle|\; \lambda_1^{(k)} \ge \lambda_2^{(k)} \ge \dots \ge \lambda_{m_k}^{(k)} \text{ for any } k = 1, \dots, r \right\}$$

とおく。つまり，$\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$ の元 $\lambda = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)})$ で，各成分 $\lambda^{(k)}$ $(1 \le k \le r)$ が分割になっているものの集合である。今，$m_k \ge n$ $(1 \le k \le r)$ となるように $\mathbf{m}$ を取っているので，$\Lambda_{n,r}^+$ は，$\mathbf{m}$ の取り方に依らないことを注意しておく。$\Lambda_{n,r}^+$ の元のことを サイズが n の r-partition という。

1.3. $\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$ に対し，

$$m_\mu = \Big(\sum_{w \in \mathfrak{S}_\mu} q^{\ell(w)} T_w \Big) \Big(\prod_{k=1}^{r} \prod_{i=1}^{a_k} (L_i - Q_k) \Big), \quad M^\mu = m_\mu \cdot {}_R\mathscr{H}_{n,r}$$

とおく。ここで，$\mathfrak{S}_\mu$ は μ に対応する $\mathfrak{S}_n$ の Young 部分群，$a_k = \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{m_j} \mu_i^{(j)}$ ($a_1 = 0$ とする) である。このとき，${}_R\mathscr{H}_{n,r}$ に付随する cyclotomic q-Schur 代数 ${}_R\mathscr{S}_{n,r}$ は，以下のように，右 ${}_R\mathscr{H}_{n,r}$-加群 $\bigoplus_{\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})} M^\mu$ の自己準同型環として定義される:

$${}_R\mathscr{S}_{n,r} = {}_R\mathscr{S}_{n,r}(\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})) = \mathrm{End}_{{}_R\mathscr{H}_{n,r}^{\mathrm{op}}} \Big(\bigoplus_{\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})} M^\mu \Big).$$

1.4. ${}_R\mathscr{S}_{n,r}$-mod と ${}_R\mathscr{S}_{n+1,r}$-mod の間に制限，誘導関手を定義するために，[W] に従って，${}_R\mathscr{S}_{n,r}(\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}))$ の生成元と基本関係式による表示を考える。

$m = m_1 + \dots m_r$ とし，$P = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}\varepsilon_i$ を 一般線型リー代数 $\mathfrak{gl}_m$ の weight lattice とする。$\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ $(1 \le i \le m-1)$ を simple root とし，$Q = \bigoplus_{i=1}^{m-1} \mathbb{Z}\alpha_i$ を root lattice

とする。P 上の反順序 "$\geq$" (dominance order) を $\lambda \geq \mu \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lambda - \mu \in \bigoplus_{i=1}^{m-1} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$ によって定める。

$\varGamma(\mathbf{m}) = \{(i,k) \,|\, 1 \leq i \leq m_k, 1 \leq k \leq r\}$ とし，$\varGamma(\mathbf{m})$ と 集合 $\{1,2,\dots,m\}$ とを対応 $(i,k) \leftrightarrow \sum_{j=1}^{k-1} m_k + i$ によって同一視する。また，$\varGamma'(\mathbf{m}) = \varGamma(\mathbf{m}) \setminus \{(m_r, r)\}$ とおき，上と同様な対応で集合 $\{1,2,\dots,m-1\}$ と同一視する。この対応より，便宜上 $(m_k+1, k) = (1, k+1)$, $(0, k+1) = (m_k, k)$ 等と考えることにする。この対応より，

$$P = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z}\varepsilon_i = \bigoplus_{(i,k)\in\varGamma(\mathbf{m})} \mathbb{Z}\varepsilon_{(i,k)}, \quad Q = \bigoplus_{i=1}^{m-1} \mathbb{Z}\alpha_i = \bigoplus_{(i,k)\in\varGamma'(\mathbf{m})} \mathbb{Z}\alpha_{(i,k)}$$

と表せる。また，対応

$$\varLambda_{n,r}(\mathbf{m}) \ni \mu \mapsto \sum_{(i,k)\in\varGamma(\mathbf{m})} \mu_i^{(k)} \varepsilon_{(i,k)} \in P$$

によって，$\varLambda_{n,r}(\mathbf{m})$ を P の部分集合と思う。よって，$\mu \in \varLambda_{n,r}$ に対し，$\mu \pm \alpha_{(i,k)}$ 等が P の中で意味を持つ。

1.5. ${}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,r}$ の生成元となるものを以下のように定義する。

$(i,k) \in \varGamma'_{n,r}(\mathbf{m})$ に対し，

$$E_{(i,k)}(m_\mu \cdot h) := q^{-\mu_{i+1}^{(k)}+1} m_{\mu+\alpha_{(i,k)}} \left(1 + \sum_{t=1}^{\mu_{i+1}^{(k)}-1} q^t T_{N+1}T_{N+2}\dots T_{N+t}\right) \cdot h,$$

$$F_{(i,k)}(m_\mu \cdot h) := q^{-\mu_i^{(k)}+1} m_{\mu-\alpha_{(i,k)}} h^\mu_{-(i,k)} \left(1 + \sum_{t=1}^{\mu_i^{(k)}-1} q^t T_{N-1}T_{N-2}\dots T_{N-t}\right) \cdot h,$$

$$(\mu \in \varLambda_{n,r}(\mathbf{m}), h \in {}_{\mathcal{K}}\mathscr{H}_{n,r})$$

と定める。ここで，$N = \sum_{l=1}^{k-1} |\mu^{(l)}| + \sum_{j=1}^{i} \mu_j^{(k)}$, また，$h^\mu_{-(i,k)} \begin{cases} 1 & (i \neq m_k) \\ L_N - Q_{k+1} & (i = m_k) \end{cases}$ である。また，$m_\mu + \alpha_{(i,k)} \notin \varLambda_{n,r}(\mathbf{m})$ (resp. $m_\mu - \alpha_{(i,k)} \notin \varLambda_{n,r}(\mathbf{m})$) のときは，$E_{(i,k)}(m_\mu \cdot h) = 0$ (resp. $F_{(i,k)}(m_\mu \cdot h) = 0$) と約束する。

また，$\lambda \in \varLambda_{n,r}$ に対し，

$$1_\lambda(m_\mu \cdot h) := \delta_{\lambda\mu} m_\lambda \cdot h \qquad (\mu \in \varLambda_{n,r}(\mathbf{m}), h \in {}_{\mathcal{K}}\mathscr{H}_{n,r})$$

とする。さらに，$\lambda \in \mathit{\Lambda}_{n,r}(\mathbf{m})$, $(i,k) \in \mathit{\Gamma}(\mathbf{m})$ に対し，

$$\sigma^\lambda_{(i,k)}(m_\mu \cdot h) := \begin{cases} \delta_{\lambda\mu} m_\lambda (L_N + L_{N-1} + \cdots + L_{N-\lambda_i^{(k)}+1}) \cdot h & \text{if } \lambda_i^{(k)} \neq 0 \\ 0 & \text{if } \lambda_i^{(k)} = 0 \end{cases}$$
$$(\mu \in \mathit{\Lambda}_{n,r}(\mathbf{m}), h \in {}_{\mathcal{K}}\mathscr{H}_{n,r})$$

とする。ここでも，$N = \sum_{l=1}^{k-1} |\mu^{(l)}| + \sum_{j=1}^{i} \mu_j^{(k)}$ である。[W, Lemma 7.2] によって，$\sigma^\lambda_{(i,k)}$ は $E_{(i,k)}, F_{(i,k)}$ $((i,k) \in \mathit{\Gamma}'(\mathbf{m}))$ 達のみで表されるある元 $g^\lambda_{(i,k)}(F,E)$ を用いて，$\sigma^\lambda_{(i,k)} = g^\lambda_{(i,k)}(F,E)1_\lambda$ と書けることが分かっている。よって，${}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,r}$ の生成元としては $\sigma^\lambda_{(i,k)}$ は必要ないが，$g^\lambda_{(i,k)}(F,E)$ の具体的な表示法は分かっていないくて，${}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,r}$ の関係式を記述するのに $\sigma^\lambda_{(i,k)}$ が必要となることを注意しておく。

以上の準備のもと，以下のことが成り立つ。

Theorem 1.6 ([W, Theorem 7.16]). ${}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,r}$ は，$E_{(i,k)}$，$F_{(i,k)}$ $((i,k) \in \mathit{\Gamma}'(\mathbf{m}))$，$1_\lambda$ $(\lambda \in \mathit{\Lambda}_{n,r}(\mathbf{m}))$ を生成元とし，以下の基本関係式によって定まる $\mathcal{K}$ 上の結合代数と同型である。

$$1_\lambda 1_\mu = \delta_{\lambda,\mu} 1_\lambda, \qquad \sum_{\lambda \in \mathit{\Lambda}_{n,r}(\mathbf{m})} 1_\lambda = 1, \tag{1.1}$$

$$E_{(i,k)} 1_\lambda = \begin{cases} 1_{\lambda+\alpha_{(i,k)}} E_{(i,k)} & \textit{if } \lambda + \alpha_{(i,k)} \in \mathit{\Lambda}_{n,r}(\mathbf{m}), \\ 0 & \textit{otherwise}, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$F_{(i,k)} 1_\lambda = \begin{cases} 1_{\lambda-\alpha_{(i,k)}} F_{(i,k)} & \textit{if } \lambda - \alpha_{(i,k)} \in \mathit{\Lambda}_{n,r}(\mathbf{m}), \\ 0 & \textit{otherwise}, \end{cases} \tag{1.3}$$

$$1_\lambda E_{(i,k)} = \begin{cases} E_{(i,k)} 1_{\lambda-\alpha_{(i,k)}} & \textit{if } \lambda - \alpha_{(i,k)} \in \mathit{\Lambda}_{n,r}(\mathbf{m}), \\ 0 & \textit{otherwise}, \end{cases} \tag{1.4}$$

$$1_\lambda F_{(i,k)} = \begin{cases} F_{(i,k)} 1_{\lambda+\alpha_{(i,k)}} & \textit{if } \lambda + \alpha_{(i,k)} \in \mathit{\Lambda}_{n,r}(\mathbf{m}), \\ 0 & \textit{otherwise}, \end{cases} \tag{1.5}$$

$$E_{(i,k)} F_{(j,l)} - F_{(j,l)} E_{(i,k)} = \delta_{(i,k),(j,l)} \sum_{\lambda \in \mathit{\Lambda}_{n,r}} \eta^\lambda_{(i,k)}, \tag{1.6}$$

$$\textit{where } \eta^\lambda_{(i,k)} = \begin{cases} [\lambda_i^{(k)} - \lambda_{i+1}^{(k)}] 1_\lambda & \textit{if } i \neq m_k, \\ \Big(- Q_{k+1} [\lambda_{m_k}^{(k)} - \lambda_1^{(k+1)}] & \\ \quad + q^{\lambda_{m_k}^{(k)} - \lambda_1^{(k+1)}} (q^{-1} g^\lambda_{(m_k,k)}(F,E) - q g^\lambda_{(1,k+1)}(F,E)) \Big) 1_\lambda & \textit{if } i = m_k, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & E_{(i\pm1,k)} (E_{(i,k)})^2 - (q+q^{-1}) E_{(i,k)} E_{(i\pm1,k)} E_{(i,k)} + (E_{(i,k)})^2 E_{(i\pm1,k)} = 0, \\ & E_{(i,k)} E_{(j,l)} = E_{(j,l)} E_{(i,k)} \qquad (|(i,k)-(j,l)| \geq 2), \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} & F_{(i\pm1,k)} (F_{(i,k)})^2 - (q+q^{-1}) F_{(i,k)} F_{(i\pm1,k)} F_{(i,k)} + (F_{(i,k)})^2 F_{(i\pm1,k)} = 0, \\ & F_{(i,k)} F_{(j,l)} = F_{(j,l)} F_{(i,k)} \qquad (|(i,k)-(j,l)| \geq 2), \end{aligned} \tag{1.8}$$

where $(i,k)-(j,l) = (\sum_{a=1}^{k-1} m_a + i) - (\sum_{b=1}^{l-1} m_b + j)$ *for* $(i,k),(j,l) \in \Gamma'(\mathbf{m})$.

さらに，${}_{\mathcal{A}}\mathscr{S}_{n,r}$ は $E^l_{(i,k)}/[l]!$, $F^l_{(i,k)}/[l]!$ $\big((i,k) \in \Gamma'(\mathbf{m}),\ l \geq 1\big)$, 1_λ $(\lambda \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m}))$ によって生成される ${}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,r}$ の $\mathcal{A}$-部分代数と同型である。
ここで，$[k] = (q^k - q^{-k})/(q-q^{-1})$ $(k \in \mathbb{Z})$, $[l]! = [l][l-1]\dots[1]$ $(l \in \mathbb{Z}_{>0})$ である。

1.7. Theorem 1.6 より，${}_R\mathscr{S}_{n,r}$ は ${}_{\mathcal{A}}\mathscr{S}_{n,r}$ の特殊化 $R \otimes_{\mathcal{A}} {}_{\mathcal{A}}\mathscr{S}_{n,r}$ によって得られる。以下，${}_R\mathscr{S}_{n,r}$ を単に $\mathscr{S}_{n,r}$ と書くことにし，$\mathscr{S}_{n,r}$ の生成元を

$$E^{(l)}_{(i,k)} := 1 \otimes E^l_{(i,k)}/[l]!, \quad F^{(l)}_{(i,k)} := 1 \otimes F^l_{(i,k)}[l]!, \quad 1_\lambda := 1 \otimes 1_\lambda$$

と表すことにする。(以下，基礎環を考える必要があるときには，左下に記す。)

$\mathscr{S}^+_{n,r}$ (resp. $\mathscr{S}^-_{n,r}$) を $E^{(l)}_{(i,k)}$ (resp. $F^{(l)}_{(i,k)}$) $((i,k) \in \Gamma'(\mathbf{m}),\ l \geq 1)$ で生成される $\mathscr{S}_{n,r}$ の部分代数とし，$\mathscr{S}^0_{n,r}$ を 1_λ $(\lambda \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m}))$ で生成される $\mathscr{S}_{n,r}$ の部分代数とする。すると，$\mathscr{S}_{n,r}$ は三角分解

$$\mathscr{S}_{n,r} = \mathscr{S}^-_{n,r}\mathscr{S}^0_{n,r}\mathscr{S}^+_{n,r}$$

を持つ。さらに，$\mathscr{S}^{\geq 0}_{n,r}$ を $\mathscr{S}^+_{n,r}$ と $\mathscr{S}^0_{n,r}$ で生成される $\mathscr{S}_{n,r}$ の部分代数とする。

1.8. (1.1) より，$1 = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})} 1_\lambda$ であり，1_λ $(\lambda \in \Lambda_{n,r}(Bm))$ 達は，互いに直交するベキ等元であるので，$\mathscr{S}_{n,r}$-加群 M はウェイト空間分解

$$M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})} 1_\lambda \cdot M$$

を持つことが分かる。

$\lambda \in \Lambda^+_{n,r}$ に対し，$\Theta_\lambda = Rv_\lambda$ を以下によって定まる $\mathscr{S}^{\geq 0}_{n,r}$-加群とする:

$$\begin{aligned} &E^{(l)}_{(i,k)} \cdot v_\lambda = 0 \quad ((i,k) \in \Gamma'(\mathbf{m}), l \geq 1), \\ &1_\mu \cdot v_\lambda = \delta_{\lambda\mu} v_\lambda \quad (\mu \in \Lambda_{n,r}). \end{aligned}$$

また，$\mathscr{S}_{n,r}$-加群 $\Delta_n(\lambda)$ を

$$\Delta_n(\lambda) := \mathscr{S}_{n,r} \otimes_{\mathscr{S}^{\geq 0}_{n,r}} \Theta_\lambda$$

として定める。$\Delta_n(\lambda)$ のことを $\mathscr{S}_{n,r}$ の **Weyl 加群**という。これは，[DJM] によって構成された $\mathscr{S}_{n,r}$ の cellular 基底を用いて定義されるものと同型である。特に $R = \mathcal{K}$ であるとき，$\{{}_{\mathcal{K}}\Delta_n(\lambda) \,|\, \lambda \in \Lambda^+_{n,r}\}$ は ${}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,r}$ の既約表現の完全代表系を与える。

定義より，$\Delta_n(\lambda)$ は最高ウェイト λ の最高ウェイト加群となる。最高ウェイト加群の定義を復習しておこう。$\mathscr{S}_{n,r}$ 加群 M に対し，ある元 $x_\lambda \in M$ が存在して，

- $1_\lambda \cdot x_\lambda = x_\lambda$,
- $M = \mathscr{S}_{n,r} \cdot x_\lambda$

を満たすとき，M を最高ウェイト λ の最高ウェイト加群という。また，このとき x_λ のことを M の最高ウェイト元という。Weyl 加群 $\Delta_n(\lambda)$ は次のような普遍性を持っている。

Lemma 1.9. M を最高ウェイト λ の最高ウェイト $\mathscr{S}_{n,r}$-加群とし，x_λ を最高ウェイト元とすると，$\mathscr{S}_{n,r}$-加群としての全射準同型

$$\Delta_n(\lambda) \to M \ \textit{such that}\ 1 \otimes v_\lambda \mapsto x_\lambda$$

が存在する。

§ 2. 制限，誘導関手

2.1. $\mathscr{S}_{n,r}$-mod と $\mathscr{S}_{n+1,r}$-mod の間に制限，誘導関手を定義するために，以下の設定で考える:

$$\begin{aligned}&\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}^r_{>0} \text{ such that } m_k \geq n+1 \text{ for all } k = 1, \dots, r,\\ &\mathbf{m}' = (m_1, \dots, m_{r-1}, m_r - 1)\end{aligned}$$

とし，

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_{n+1,r} &= \mathscr{S}_{n+1,r}(\varLambda_{n+1,r}(\mathbf{m}))\\ \mathscr{S}_{n,r} &= \mathscr{S}_{n,r}(\varLambda_{n,r}(\mathbf{m}'))\end{aligned}$$

とする。定義より，次の対応により，$\varLambda_{n,r}(\mathbf{m}')$ を $\varLambda_{n+1,r}(\mathbf{m})$ の部分集合とみなすことができる:

$$\gamma : \varLambda_{n,r}(\mathbf{m}') \to \varLambda_{n+1,r}(\mathbf{m}), \quad (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r-1)}, \lambda^{(r)}) \mapsto (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r-1)}, \widehat{\lambda}^{(r)}),$$

ここで，$\widehat{\lambda}^{(r)} = (\lambda^{(r)}_1, \lambda^{(r)}_2, \dots, \lambda^{(r)}_{m_r-1}, 1)$ である。

Remark 2.2. 上記の設定は，制限，誘導関手を定義し，その性質を具体的に調べるために必要な技術的な設定である。しかし，$m_k \geq n$ $(k = 1, \dots, r)$ を満たしている $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}^r_{>0}$ に対しては，$\mathscr{S}_{n,r}(\varLambda_{n,r}(\mathbf{m}))$-mod は，(森田同値を除いて) $\mathbf{m}$ の取り方に依らないことが知られているので，cyclotomic q-Schur 代数の加群のなす圏，及び，それらの間の制限，誘導関手を考える上では，上の設定は本質的でないことを注意しておく。

上記の設定のもとで，次のことが成り立つ。

Proposition 2.3 ([W2])**.** 代数としての単射準同型写像 $\iota : \mathscr{S}_{n,r} \to \mathscr{S}_{n+1,r}$ が

$$\begin{aligned} &E^{(l)}_{(i,k)} \mapsto E^{(l)}_{(i,k)}\xi, \quad F^{(l)}_{(i,k)} \mapsto F^{(l)}_{(i,k)}\xi \quad ((i,k) \in \Gamma'(\mathbf{m}'), l \geq 1), \\ &1_\lambda \mapsto 1_{\gamma(\lambda)} \quad (\lambda \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m}')) \end{aligned}$$

によって定まる。ここで，$\xi = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m}')} 1_{\gamma(\lambda)} \in \mathscr{S}_{n+1,r}$ である。

2.4. Proposition 2.3 より，$\iota : \mathscr{S}_{n,r} \to \mathscr{S}_{n+1,r}$ によって，$\mathscr{S}_{n,r}$ の単位元　$1_{\mathscr{S}_{n,r}}$ は ξ に移されることが分かる。また，明らかに $\mathscr{S}_{n,r}$ は $\xi\mathscr{S}_{n+1,r}\xi$ の部分代数となる (これらは，共通の単位元 $\gamma(1_{\mathscr{S}_{n,r}}) = \xi$ を持つ)。よって，$\mathscr{S}_{n+1,r}\xi$ (resp. $\xi\mathscr{S}_{n+1,r}$) を $(\mathscr{S}_{n+1,r}, \mathscr{S}_{n,r})$-bimodule (resp. $(\mathscr{S}_{n,r}, \mathscr{S}_{n+1,r})$-bimodule) と思うことができる。そのことに注意して，制限，誘導関手を以下のように定義する。

- $\mathrm{Res}^{n+1}_n : \mathscr{S}_{n+1,r}$ -mod $\to \mathscr{S}_{n,r}$ -mod by

$$\mathrm{Res}^{n+1}_n := \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}_{n+1,r}}(\mathscr{S}_{n+1,r}\xi, ?) \cong \xi\mathscr{S}_{n+1,r} \otimes_{\mathscr{S}_{n+1,r}} ?$$

- Ind^{n+1}_n, $\mathrm{coInd}^{n+1}_n : \mathscr{S}_{n,r}$ -mod $\to \mathscr{S}_{n+1,r}$ -mod by

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ind}^{n+1}_n := \mathscr{S}_{n+1,r}\xi \otimes_{\mathscr{S}_{n,r}} ? \\ &\mathrm{coInd}^{n+1}_n := \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}_{n,r}}(\xi\mathscr{S}_{n+1,r}, ?) \end{aligned}$$

定義より，Res^{n+1}_n は完全関手であり，Ind^{n+1}_n は Res^{n+1}_n の左随伴関手，coInd^{n+1}_n は Res^{n+1}_n の右随伴関手となることが直ちに従うが，実はもっと強く，次のことが成り立つ。

Theorem 2.5 ([W2])**.** 関手の同値

$$\mathrm{Ind}^{n+1}_n \cong \mathrm{coInd}^{n+1}_n$$

が存在する。よって，$\mathrm{Ind}^{n+1}_n \cong \mathrm{coInd}^{n+1}_n$ は Res^{n+1}_n の左かつ右随伴関手であり，特に，完全関手である。

2.6. 制限関手 Res^{n+1}_n と誘導関手 Ind^{n+1}_n の性質を述べるために，いくつかのことを準備しよう。まず，$\mathscr{S}_{n,r}$ は cellular 代数であることが知られているので，cellular 構造を定める反自己同型写像 $\theta_n : \mathscr{S}_{n,r} \to \mathscr{S}_{n,r}$ が存在する。$M \in \mathscr{S}_{n,r}$ -mod に対し，自然な方法で $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ を右 $\mathscr{S}_{n,r}$-加群と思い，その作用を θ_n で捻って左 $\mathscr{S}_{n,r}$-加群と思ったものを $M^{\circledast}$ と書くことにすると，関手

$$\circledast : \mathscr{S}_{n,r}\text{ -mod} \to \mathscr{S}_{n,r}\text{ -mod}, \quad M \mapsto M^{\circledast}$$

が定まる。$\mathscr{S}_{n+1,r}$ に対しても，同様に定める（混乱することはないので，同じ記号 $\circledast$ で表す)。また，

$$\Omega_n : \mathscr{S}_{n,r}\text{-mod} \to \mathscr{H}_{n,r}\text{-mod}, \quad \Omega_{n+1} : \mathscr{S}_{n+1,r}\text{-mod} \to \mathscr{H}_{n,r}\text{-mod}$$

を **Schur 関手** とする。また，$\mathscr{H}_{n,r}$ は自然に $\mathscr{H}_{n+1,r}$ の部分代数と思うことができ，そのことを用いて, 制限関手 ${}^{\mathscr{H}}\mathrm{Res}_n^{n+1} : \mathscr{H}_{n+1,r}\text{-mod} \to \mathscr{H}_{n,r}\text{-mod}$, 及び 誘導関手 ${}^{\mathscr{H}}\mathrm{Ind}_n^{n+1} : \mathscr{H}_{n,r}\text{-mod} \to \mathscr{H}_{n+1,r}\text{-mod}$ を定義することができる (${}^{\mathscr{H}}\mathrm{Ind}_n^{n+1}$ が ${}^{\mathscr{H}}\mathrm{Res}_n^{n+1}$ の左かつ右随伴関手となることが知られている)。これらに対し，次のことが成り立つ。

Proposition 2.7 ([W]).

(i) Res_n^{n+1}, Ind_n^{n+1} は完全関手である。

(ii) Ind_n^{n+1} は Res_n^{n+1} の左かつ右随伴関手である。

(iii) 関手の同値

$$\mathrm{Res}_n^{n+1} \circ \circledast \cong \circledast \circ \mathrm{Res}_n^{n+1}, \quad \mathrm{Ind}_n^{n+1} \circ \circledast \cong \circledast \circ \mathrm{Ind}_n^{n+1}$$

が存在する。

(iv) 関手の同値

$$\Omega_n \circ \mathrm{Res}_n^{n+1} \cong {}^{\mathscr{H}}\mathrm{Res}_n^{n+1} \circ \Omega_{n+1}, \quad \Omega_{n+1} \circ \mathrm{Ind}_n^{n+1} \cong {}^{\mathscr{H}}\mathrm{Ind}_n^{n+1} \circ \Omega_n$$

が存在する。

Remark 2.8. [R] によって，パラメータが特別な場合に，$\mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$ に付随する有理 Cherednik 代数の圏 $\mathcal{O}_n$ と ${}_{\mathbb{C}}\mathscr{S}_{n,r}\text{-mod}$ とが圏同値（もっと強く $\mathscr{H}_{n,r}$ の quasi-hereditary cover として同値) であることが示されている。また，[BE] によって，$\mathcal{O}_n$ と $\mathcal{O}_{n+1}$ との間に，制限，誘導関手が定義されている。$\mathcal{O}_n$ (resp. $\mathcal{O}_{n+1}$) と ${}_{\mathbb{C}}\mathscr{S}_{n,r}\text{-mod}$ (resp. ${}_{\mathbb{C}}\mathscr{S}_{n+1,r}\text{-mod}$) と $\mathscr{H}_{n,r}$ (resp. $\mathscr{H}_{n+1,r}$) の quasi-hereditary cover として同値であるとき，その同値を通して，今回の cyclotomic q-Schur 代数における制限，誘導関手と，有理 Cherednik 代数の圏 $\mathcal{O}$ に対する [BE] の制限，誘導関手とは同値となる ([W2])。

§ 3. 精密化された誘導，制限関手と Fock 空間の圏化

$\mathscr{S}_{n,r}\text{-mod}$, 及び $\mathscr{S}_{n+1,r}\text{-mod}$ の各ブロックへの射影を用いて制限関手 Res_n^{n+1}, 誘導関手 Ind_n^{n+1} を精密化し, それらを用いて，Fock 空間を圏化することを考えよう。

以下，この章では，R を体 (**標数は何でもよい**) とし，パラメータ $q, Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$ が以下のようであると仮定する。

- ある自然数 e が存在して，$1+(q^2)+(q^2)^2+\cdots+(q^2)^{e-1}=0$ かつ，$1+(q^2)+(q^2)^2+\cdots+(q^2)^t\neq 0$ $(0<t<e-1)$.
- $Q_i=(q^2)^{s_i}$ $(s_i\in\mathbb{Z},\ i=1,\ldots,r)$.

3.1. $\lambda\in\Lambda_{n,r}^+$ に対し，その diagram $[\lambda]$ を，

$$[\lambda]=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{Z}^3\;\middle|\;1\leq a\leq m_c,\,1\leq b\leq\mu_a^{(c)},1\leq c\leq r\right\}$$

とし，$x=(a,b,c)\in[\lambda]$ に対し，その residue を

$$\mathrm{res}(x)=(q^2)^{b-a}\cdot Q_c=(q^2)^{b-a+s_c}$$

によって定義する。パラメータに対する仮定より，

$$\mathrm{res}(x)\in\left\{(q^2)^0,(q^2)^1,\ldots,(q^2)^{e-1}\right\}$$

となる。そこで，$x\in[\lambda]$ に対し，$\mathrm{res}(x)=(q^2)^i$ であるとき，x のことを λ の i**-node** と呼ぶ。$(q^2)^i=(q^2)^{i+ex}$ $(x\in\mathbb{Z})$ なので，$i\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ と考えてよい。さらに，$\lambda\in\Lambda_{n,r}^+$ に対し，$r_i(\lambda):=\sharp\left\{x\in[\lambda]\;\middle|\;x:\,i\text{-node}\right\}$ とし，

$$r(\lambda):=\big(r_0(\lambda),r_1(\lambda),\ldots,r_{e-1}(\lambda)\big)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^e$$

とする。さて，$\mathscr{S}_{n,r}$ は quasi-hereditary (cellular) 代数であることが知られていて，Weyl 加群 $\{\Delta_n(\lambda)\,|\,\lambda\in\Lambda_{n,r}^+\}$ が $\mathscr{S}_{n,r}$ の standard (cellular) 加群を与えることが知られている。よって，$\Delta_n(\lambda)$ の Top は一意的であり，$\{L_n(\lambda):=\Delta_n(\lambda)/\operatorname{rad}\Delta_n(\lambda)\,|\,\lambda\in\Lambda_{n,r}^+\}$ が $\mathscr{S}_{n,r}$ の既約加群の同型類の完全代表系を与える。特に，$\Delta_n(\lambda)$ は直既約であり，$\Delta_n(\lambda)$ 達の linkage class が $\mathscr{S}_{n,r}$ のブロックの分類を与えることになる。その分類については，以下のことが知られている。

Theorem 3.2 ([LM])**.** $\lambda,\mu\in\Lambda_{n,r}^+$ に対し，

$$\Delta_n(\lambda)\text{ と }\Delta_n(\mu)\text{ が }\mathscr{S}_{n,r}\text{ の同じブロックに属する}\Leftrightarrow r(\lambda)=r(\mu).$$

この定理より，

$$R_{n,e}:=\left\{a=(a_0,a_1,\ldots,a_{e-1})\in\mathbb{Z}^e\,|\,a=r(\lambda)\text{ for some }\lambda\in\Lambda_{n,r}^+\right\}$$

とおけば，$R_{n,e}$ と $\mathscr{S}_{n,r}$ のブロックとが１対１に対応することになる。そこで，$a=(a_0,a_1,\dots,a_{e-1})\in\mathbb{Z}^e$ s.t. $\sum_{j=0}^{e-1}=n$ に対し，関手 $1_a:\mathscr{S}_{n,r}\text{-mod}\to\mathscr{S}_{n,r}\text{-mod}$ を，

$$1_a=\begin{cases} a\ \text{に対応するブロックへの射影} & \text{if } a\in R_{n,e}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

と定める。また，$a=(a_0,\dots,a_{e-1})\in\mathbb{Z}^e$ と $i\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ に対し，

$$a\pm i:=(a_0,\dots,a_{i-1},a_i\pm 1,a_i,\dots,a_{e-1})$$

と定義する。以上の準備のもとで，$i\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ に対し，精密化された制限，誘導関手を

- $i\text{-Res}_n^{n+1}:\mathscr{S}_{n+1,r}\text{-mod}\to\mathscr{S}_{n,r}\text{-mod}$ を

$$i\text{-Res}_n^{n+1}:=\bigoplus_{a\in R_{n+1,e}}1_{a-i}\circ\text{Res}_n^{n+1}\circ 1_a$$

- $i\text{-Ind}_n^{n+1}:\mathscr{S}_{n,r}\text{-mod}\to\mathscr{S}_{n+1,r}\text{-mod}$ を

$$i\text{-Ind}_n^{n+1}:=\bigoplus_{a\in R_{n,e}}1_{a+i}\circ\text{Ind}_n^{n+1}\circ 1_a$$

によって定める。定義より，$\text{Res}_n^{n+1}=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}e\mathbb{Z}}i\text{-Res}_n^{n+1}$, $\text{Ind}_n^{n+1}=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}e\mathbb{Z}}i\text{-Ind}_n^{n+1}$ となる。

3.3. Weyl 加群や既約加群に $i\text{-Res}_n^{n+1}$, $i\text{-Ind}_n^{n+1}$ を施した場合，どのようになっているかを記述するために，いくつかの言葉を準備しよう。$\lambda\in\Lambda_{n,r}^+$ に対し，

- $x\in[\lambda]$ が λ の removable node $\overset{\text{def}}{\iff}$ $[\lambda]\setminus x$ がある $\mu\in\Lambda_{n-1,r}$ の diagram である。
- $x\in\mathbb{Z}^3$ が λ の addable node $\overset{\text{def}}{\iff}$ $[\lambda]\cup x$ がある $\mu\in\Lambda_{n+1,r}$ の diagram である。

と定義する。$x\in[\lambda]$ が λ の removable node であるとき，$[\lambda]\setminus x$ を diagram とする r-partition を $\lambda\setminus x$ と表す。同様に，$x\in\mathbb{Z}^3$ が λ の addable node であるとき，$[\lambda]\cup x$ を diagram とする r-partition を $\lambda\cup x$ と表す。また，集合 $\mathbb{Z}^3$ 上に反順序 “$\succeq$” を

$$(a,b,c)\succ(a',b',c')\overset{\text{def}}{\iff}\begin{matrix} c<c'\\ \text{or}\\ c=c'\text{ and }a<a'\end{matrix}$$

によって定める。すると次のことが成り立つ。

Theorem 3.4 ([W2])**.**

(i) $\lambda\in\Lambda_{n+1,r}^+$ に対し，$\mathscr{S}_{n,r}$-加群としての *filtration*

$$i\text{-Res}_n^{n+1}(\Delta_{n+1}(\lambda))=M_1\supset M_2\supset\cdots\supset M_k\supset M_{k+1}=0$$

で，$M_j/M_{j+1} \cong \Delta_n(\lambda \setminus x_j)$ となるものが存在する。ここで，$x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_k$ は，λ の全ての *removable* i*-node* である。

(ii) $\mu \in \Lambda^+_{n,r}$ に対し，$\mathscr{S}_{n+1,r}$-加群としての *filtration*

$$i\text{-}\mathrm{Ind}_n^{n+1}(\Delta_n(\mu)) = N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_l \supset N_{l+1} = 0$$

で，$N_j/N_{j+1} \cong \Delta_{n+1}(\mu \cup y_j)$ となるものが存在する。ここで，$y_l \succ y_{l-1} \succ \cdots \succ y_1$ は μ の全ての *addable* i*-node* である。

(iii) $\lambda \in \Lambda^+_{n+1,r}$ に対し，$\mathscr{S}_{n,r}$-加群としての *filtration*

$$i\text{-}\mathrm{Res}_n^{n+1}(L_{n+1}(\lambda)) = \overline{M}_1 \supset \overline{M}_2 \supset \cdots \supset \overline{M}_k \supset \overline{M}_{k+1} = 0$$

で，$\Delta_n(\lambda \setminus x_j) \twoheadrightarrow \overline{M}_j/\overline{M}_{j+1}$ となるものが存在する。ここで，$x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_k$ は，λ の全ての *removable* i*-node* である。

(iv) $\mu \in \Lambda^+_{n,r}$ に対し，$\mathscr{S}_{n+1,r}$-加群としての *filtration*

$$i\text{-}\mathrm{Ind}_n^{n+1}(L_n(\mu)) = \overline{N}_1 \supset \overline{N}_2 \supset \cdots \supset \overline{N}_l \supset \overline{N}_{l+1} = 0$$

で，$\Delta_{n+1}(\mu \cup y_j) \twoheadrightarrow \overline{N}_j/\overline{N}_{j+1}$ となるものが存在する。ここで，$y_l \succ y_{l-1} \succ \cdots \succ y_1$ は μ の全ての *addable* i*-node* である。

3.5. さて，Res_n^{n+1} や Ind_n^{n+1} は完全関手であったし，ブロックへの射影も当然完全関手なので，$i\text{-}\mathrm{Res}_n^{n+1}$ や $i\text{-}\mathrm{Ind}_n^{n+1}$ も完全関手となる。そこで，$i\text{-}\mathrm{Res} := \bigoplus_{n\geq 0} i\text{-}\mathrm{Res}_n^{n+1}$, $i\text{-}\mathrm{Ind} := \bigoplus_{n\geq 0} i\text{-}\mathrm{Ind}_n^{n+1}$ とおくと，$i\text{-}\mathrm{Res}$ や $i\text{-}\mathrm{Ind}$ は $\bigoplus_{n\geq 0} \mathscr{S}_{n,r}\text{-mod}$ の Grothendieck 群 (の係数を $\mathbb{C}$ まで拡大したもの) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(\bigoplus_{n\geq 0} \mathscr{S}_{n,r}\text{-mod})$ 上に well-defined な作用を与える。その作用を $[i\text{-}\mathrm{Res}]$, $[i\text{-}\mathrm{Ind}]$ と書くことにする。このとき， Theorem 3.4 (i),(ii) より，次のことが従う。

Corollary 3.6. $e_i := [i\text{-}\mathrm{Res}]$, $f_i := [i\text{-}\mathrm{Ind}]$ $(i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z})$ は，$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(\bigoplus_{n\geq 0} \mathscr{S}_{n,r}\text{-mod})$ 上に $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$ の作用を定め，この作用に関して，$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(\bigoplus_{n\geq 0} \mathscr{S}_{n,r}\text{-mod})$ は $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$-加群として *(level* r *の) Fock* 空間と同型になる。

Remarks 3.7.

(i) Proposition 2.7 (iv) によって，Res_n^{n+1} や Ind_n^{n+1} が Schur 関手 Ω_n, Ω_{n+1} と可換であることが分かるので，Corollary 3.6 における Fock 空間の圏化と，[A] における $\bigoplus_{n\geq 0} \mathscr{H}_{n,r}\text{-mod}$ を用いたある最高ウェイト $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$-加群 V の圏化とは整合的である。特に，今回の結果の系として ([A] の結果を用いずに)，$\bigoplus_{n\geq 0} \mathscr{H}_{n,r}\text{-mod}$ を用いた V の圏化を得ることができる。

(ii) Theorem 3.4 (iii), (iv) において，$\overline{M}_j/\overline{M}_{j+1}=0$ (resp. $\overline{N}_j/\overline{N}_{j+1}=0$) となることもある。いつ 0 にならないかということが問題であるが，それについては，次のように予想される。(normal (resp. conormal, good, cogood) node の定義については，[AM] 等を参照のこと)

(予想) Theorem 3.4 (iii), (iv) において

- $\overline{M}_j/\overline{M}_{j+1}\neq 0 \Leftrightarrow x_j$ は λ の normal i-node.
- $\overline{N}_j/\overline{N}_{j+1}\neq 0 \Leftrightarrow y_j$ は μ の conormal i-node.

この予想を仮定すれば,

$$\mathrm{Top}\, i\text{-}\mathrm{Res}(L_{n+1}(\lambda)) = L_n(\lambda\setminus x) \quad (x \text{ は } \lambda \text{ の good } i\text{-node}),$$
$$\mathrm{Soc}\, i\text{-}\mathrm{Ind}(L_n(\mu)) = L_{n+1}(\mu\cup y) \quad (y \text{ は } \mu \text{ の cogood } i\text{-node})$$

であることが示せ，$\{L_n(\lambda)\,|\,\lambda\in\Lambda^+_{n,r}, n\geq 0\}$ 上に，$\widetilde{e}_i := \mathrm{Top}\, i\text{-Res}$, $f_i := \mathrm{Soc}\, i\text{-Ind}$ ($i\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$) を Kashiwara operator とする $\widehat{\mathfrak{sl}}_e$-crystal 構造が定まり，それは crystal として対応する level 1 v-deformed Fock 空間 $\mathcal{F}_v[s_i]$ の crystal base $\mathcal{B}[s_i]$ ($1\leq i\leq r$) のテンサー積 $\mathcal{B}[s_1]\otimes\cdots\otimes\mathcal{B}[s_r]$ に一致することが分かる。

References

[A] S. Ariki, On the decomposition numbers of the Hecke algebra of $G(m,1,n)$, *J. Math. Kyoto Univ.* **36** (1996), 789-808.
[AK] S. Ariki and K. Koike, A Hecke algebra of $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})\wr\mathfrak{S}_n$ and construction of its irreducible representations, *Adv. Math.* **106** (1994), 216-243.
[AM] S. Ariki and A. Mathas, The number of simple modules of the Hecke algebras of type $G(r,1,n)$, *Math. Z.* **233** (2000), 601-623.
[BE] R. Bezrukavnikov and P. Etingof, Parabolic induction and restriction functors for rational Cherednik algebras, *Sel. Math.* **14** (2009), 397-425.
[DJM] R. Dipper, G. James, and A. Mathas, Cyclotomic q-Schur algebras, *Math. Z.* **229** (1998), 385-416.
[LM] S. Lyle and A. Mathas, Blocks of cyclotomic Hecke algebras, *Adv. Math.* **216** (2007), 854-878.
[R] R. Rouquier, q-Schur algebras and complex reflection groups, *Moscow Math. J.* **8**, (2008) 119-158.
[W] K. Wada, Presenting cyclotomic q-Schur algebras, *Nagoya Math. J.* **201** (2011), 45-116.
[W2] K. Wada, Induction and restriction functors for cyclotomic q-Schur algebras, in preparation.

〒 390-8621 長野県松本市旭３－１－１ 信州大学 理学部
E-mail address: wada@math.shinshu-u.ac.jp