

A quantum Frobenius map and tensor product theorem for cyclotomic q -Schur algebras

和田 堅太郎 (信州大学)

概要: cyclotomic q -Schur 代数の加群圏を用いた, Fock 空間の圏化について, (完成には程遠いが) 現在までに分かっていることをまとめてみます。

§ 1. FOCK 空間

1.1. Bosonic Fock 空間.

Heisenberg 代数 \mathfrak{h} は, 以下の生成元と基本関係式によって定まる \mathbb{C} 上の結合代数である;

生成元: a_k, a'_k ($k \in \mathbb{Z}_{>0}$), c .

基本関係式: c : central element, $[a_j, a_k] = [a'_j, a'_k] = 0$, $[a'_j, a_k] = \delta_{j,k}kc$.

\mathbb{C} 上の無限変数の多項式環 $\mathcal{B} = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$ 上の作用素 b_k, b'_k ($k \in \mathbb{Z}_{>0}$) をそれぞれ,

$$b_k = x_k, \quad b'_k = k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

と定めると, これらの作用素は, \mathcal{B} 上に $\mathfrak{h} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{B})$ ($a_k \mapsto b_k, a'_k \mapsto b'_k$) によって Heisenberg 代数 \mathfrak{h} のレベル 1 表現を与える。この \mathfrak{h} -加群 \mathcal{B} のことを, **bosonic Fock 空間** という。明らかに, \mathcal{B} は, \mathfrak{h} -加群として 1 によって生成され, 任意の $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, $a'_k \cdot 1 = 0$ を満たす既約 \mathfrak{h} -加群である。このような \mathfrak{h} -加群は同型を除いて一意である。

後の議論のために, \mathcal{B} を対称関数のなす環と同一視しておこう。 $\mathbf{x} = \{x_k \mid k \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ とおき, 変数 \mathbf{x} に関する (\mathbb{C} 上の) 対称関数のなす環を $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\text{Sym}(\mathbf{x})}$ で表す。分割 λ のサイズが n であるとき $\lambda \vdash n$ と書き, λ の長さを $\ell(\lambda)$ で表すことにする。また, 分割 λ のサイズを $|\lambda|$ で表す。 $\lambda \vdash n$ に対し, $s_\lambda(\mathbf{x})$ を λ に対応する Schur 関数とすれば, $\{s_\lambda(\mathbf{x}) \mid \lambda \vdash n, n \geq 0\}$ が $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\text{Sym}(\mathbf{x})}$ の基底を与える。 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\text{Sym}(\mathbf{x})}$ 上の双線形形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\text{Sym}(\mathbf{x})} \times \mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\text{Sym}(\mathbf{x})} \rightarrow \mathbb{C}$ を, $\langle s_\lambda(\mathbf{x}), s_\mu(\mathbf{x}) \rangle = \delta_{\lambda\mu}$ によって定める。 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が非退化であることを注意して, $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\text{Sym}(\mathbf{x})}$ 上の線形作用素 $\varphi \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\text{Sym}(\mathbf{x})})$ に対し, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関する随伴 $D_\varphi \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\text{Sym}(\mathbf{x})})$ を

$$\langle D_\varphi(f), g \rangle = \langle f, \varphi(g) \rangle \quad \text{for all } f, g \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\text{Sym}(\mathbf{x})}$$

を満たす一意な線形作用素として定義する。

ベキ和対称関数 $p_k(\mathbf{x}) = \sum_{i \geq 1} x_i^k$ ($k \in \mathbb{Z}_{>0}$) を考えれば, $\mathbb{C}[x]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})}$ は, $\{p_k(\mathbf{x}) \mid k \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ を変数とする多項式環 $\mathbb{C}[p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots]$ と一致する。そこで, 線形空間としての同型写像 $\mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}[x]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})}$ ($x_k \mapsto p_k(\mathbf{x})$) を通じて, $\mathbb{C}[x]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})}$ 上にも \mathfrak{S} の作用を考える。このとき, $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})}$ 上の作用素として,

$$(1.1) \quad b'_k = D_{b_k} \quad \text{i.e. } \langle b'_k(f), g \rangle = \langle f, b_k(g) \rangle \text{ for all } f, g \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})}$$

が成り立つ。

分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)})$ に対し, $p_\lambda(\mathbf{x}) = p_{\lambda_1}(\mathbf{x})p_{\lambda_2}(\mathbf{x}) \dots p_{\lambda_{\ell(\lambda)}}(\mathbf{x})$ とおけば, $\{p_\lambda(\mathbf{x}) \mid \lambda \vdash n, n \geq 0\}$ も $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})}$ の基底を与える。このとき, 分割 λ, μ に対し,

$$(1.2) \quad \langle p_\lambda(\mathbf{x}), p_\mu(\mathbf{x}) \rangle = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda, \quad \text{where } z_\lambda = \prod_{i \geq 1} i^{m_i} m_i! \text{ if } \lambda = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots)$$

が成り立つ。このことを踏まえて, $f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})}$ に対し, $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})}$ 上の線形作用素 $b_f, b'_f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})})$ を

$$b_f = \sum_{\mu \vdash n, n \geq 0} \frac{1}{z_\mu} \langle p_\mu(\mathbf{x}), f \rangle b_\mu, \quad \text{where } b_\mu = b_{\mu_1} b_{\mu_2} \dots b_{\mu_{\ell(\mu)}},$$

$$b'_f = \sum_{\mu \vdash n, n \geq 0} \frac{1}{z_\mu} \langle p_\mu(\mathbf{x}), f \rangle b'_\mu, \quad \text{where } b'_\mu = b'_{\mu_{\ell(\mu)}} \dots b'_{\mu_2} b'_{\mu_1},$$

によって定義する。(1.2) より, $b_{p_\lambda(\mathbf{x})} = b_\lambda, b'_{p_\lambda(\mathbf{x})} = b'_\lambda$ となることに注意しよう。定義と (1.1) より,

$$(1.3) \quad b'_f = \sum_{\mu \vdash n, n \geq 0} \frac{1}{z_\mu} \langle p_\mu(\mathbf{x}), f \rangle D_{b_\mu} = D_{b_f}$$

が成り立つ。

また, $f = \sum_i \alpha_i g_i \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})}$ ($g_i \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})}, \alpha_i \in \mathbb{C}$) と表せるとき, 明らかに, $b_f = \sum_i \alpha_i b_{g_i}, b'_f = \sum_i \alpha_i b'_{g_i}$ である。そこで, $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})}$ 上の \mathfrak{S} の作用は $b_\lambda = b_{p_\lambda(\mathbf{x})}, b'_\lambda = b'_{p_\lambda(\mathbf{x})}$ ($\lambda \vdash n, n \geq 0$) によって生成されていて, さらに $\{s_\lambda(\mathbf{x}) \mid \lambda \vdash n, n \geq 0\}$ が $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})}$ の基底であることに注意すれば, $\{b_{s_\lambda(\mathbf{x})}, D_{b_{s_\lambda(\mathbf{x})}} \mid \lambda \vdash n, n \geq 0\}$ が, $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})}$ 上の \mathfrak{S} の作用を生成することが分かる。

分割 λ に対応する対称群の \mathbb{C} 上の既約表現の指標を χ^λ とし, その巡回置換型が $\mu \vdash |\lambda|$ である共役類上の値を χ_μ^λ と表すことにすると, Frobenius の公式より,

$$b_{s_\lambda(\mathbf{x})} = \sum_{\mu \vdash n, n \geq 0} \frac{1}{z_\mu} \langle p_\mu(\mathbf{x}), s_\lambda(\mathbf{x}) \rangle b_\mu = \sum_{\mu \vdash n, n \geq 0} \frac{1}{z_\mu} \langle p_\mu(\mathbf{x}), \sum_{\nu \vdash |\lambda|} \frac{\chi_\nu^\lambda}{z_\nu} p_\nu(\mathbf{x}) \rangle b_\mu = \sum_{\nu \vdash |\lambda|} \frac{\chi_\nu^\lambda}{z_\nu} b_\nu$$

となり, 定義より, $b_\lambda \cdot f = p_\lambda(\mathbf{x})f$ ($f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})}$) であることに注意すれば, 再び Frobenius の公式より,

$$b_{s_\lambda(\mathbf{x})} \cdot f = \sum_{\nu \vdash |\lambda|} \frac{\chi_\nu^\lambda}{z_\nu} p_\nu(\mathbf{x})f = s_\lambda(\mathbf{x})f \quad (f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})})$$

を得る。つまり, $b_{s_\lambda(\mathbf{x})}$ は与えられた対称関数に Schur 関数 $s_\lambda(\mathbf{x})$ を掛けるという作用素である。以上のことをまとめると, 以下の補題を得る。

補題 1.1. $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})} \cong \mathcal{B}$ 上の \mathfrak{h} の作用は, $\{b_{s_\lambda(\mathbf{x})}, D_{b_{s_\lambda(\mathbf{x})}} \mid \lambda \vdash n, n \geq 0\}$ によって生成される。さらに, $b_{s_\lambda(\mathbf{x})}$ の $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})}$ 上の作用は,

$$b_{s_\lambda(\mathbf{x})} \cdot f = s_\lambda(\mathbf{x})f \quad (f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})})$$

によって与えられる。

1.2. Fermionic Fock 空間と boson-fermion 対応.

V を $\{v_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ を基底とする \mathbb{C} 上の線形空間とし, その r 次外積空間 $\wedge^r V$ ($r \in \mathbb{Z}_{>0}$) を考える。 $s, r \in \mathbb{Z}_{>0}$ ($s \geq r$) に対し, 線形写像 $\varphi_{s,r} : \wedge^r V \rightarrow \wedge^s V$ を

$$\varphi_{s,r}(v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge v_{i_r}) = v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge v_{i_r} \wedge v_{i_r-1} \wedge v_{i_r-2} \wedge \dots \wedge v_{i_r-(s-r)}$$

によって定めると, 明らかに $(\wedge^r V, \varphi_{s,r} (s, r \in \mathbb{Z}_{>0}))$ は帰納系をなす。そこで, その帰納的極限を $\mathcal{F} = \varinjlim \wedge^r V$ とおく。 \mathcal{F} は

$$\{v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge v_{i_3} \wedge \dots \mid i_1 > i_2 > \dots \text{ and } i_{k+1} = i_k - 1 \text{ for } \forall k \gg 0\}$$

を基底とする線形空間である。この \mathcal{F} を **fermionic Fock 空間** という (通常 \mathcal{F} 上に Clifford 代数の作用が定義されるのだが, 今回は必要ないので省略する)。

\mathcal{F} 上に Heisenberg 代数 \mathfrak{h} の作用が,

$$\begin{aligned} a_k \cdot (v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots) &= \sum_{j \geq 1} v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge v_{i_{j-1}} \wedge v_{i_j+k} \wedge v_{i_{j+1}} \wedge v_{i_{j+2}} \dots, \\ a'_k \cdot (v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots) &= \sum_{j \geq 1} v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge v_{i_{j-1}} \wedge v_{i_j-k} \wedge v_{i_{j+1}} \wedge v_{i_{j+2}} \dots, \end{aligned}$$

によって定まり, この作用は \mathcal{F} 上の \mathfrak{h} のレベル 1 表現を与える。

整数 s に対し, \mathcal{F} の部分空間 $\mathcal{F}[s]$ を

$$\{v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge v_{i_3} \wedge \dots \mid i_1 > i_2 > \dots \text{ and } i_k = s - k + 1 \text{ for } \forall k \gg 0\}$$

によって張られるものとして定義する。 $\mathcal{F}[s]$ を **charge s の Fock 空間** という。定義より, $\mathcal{F} = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}[s]$ を得る。また, 明らかに $\mathcal{F}[s]$ は \mathfrak{h} の作用で閉じていて,

$\mathcal{F}[s]$ は \mathcal{H} -加群として, $v_s \wedge v_{s-1} \wedge v_{s-2} \wedge \dots$ で生成され, 任意の $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, $a'_k \cdot (v_s \wedge v_{s-1} \wedge v_{s-2} \wedge \dots) = 0$ を満たす既約 \mathfrak{h} -加群である。よって, \mathfrak{h} -加群としての同型写像

$$\Phi : \mathcal{F}[s] \rightarrow \mathcal{B} \quad \text{s.t.} \quad (v_s \wedge v_{s-1} \wedge v_{s-2} \wedge \dots) \mapsto 1$$

が存在する。さらに, 前節で考えた同型 $\mathcal{B} \cong \mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})}$ と合わせて, \mathfrak{h} -加群としての同型写像 $\Phi : \mathcal{F}[s] \rightarrow \mathcal{B} \cong \mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})}$ は, 対応

$$(v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge v_{i_3} \wedge \dots) \mapsto s_\lambda(\mathbf{x}) \quad \text{where } \lambda_k = i_k - s + k - 1 \text{ when } \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$$

を与えることが知られている。この対応を **boson-fermion** 対応という。

1.3. レベル 1 Fock 空間.

$A_{e-1}^{(1)}$ 型のアファイン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{sl}}_e = \mathfrak{sl}_e \otimes \mathbb{C}[\omega, \omega^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$ を考える。 \mathbb{C}^e を \mathfrak{sl}_e の自然表現とし, $V_e = \mathbb{C}^e \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ とすると,

$$\mathfrak{sl}_e \otimes \mathbb{C}[\omega, \omega^{-1}] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V_e) \quad \text{s.t.} \quad x \otimes \omega^i \mapsto x \otimes t^i$$

は V_e 上の $\widehat{\mathfrak{sl}}_e$ のレベル 0 表現を与える。 v_1, \dots, v_e を \mathbb{C}^e の標準的な基底とし, e_i, f_i, h_i ($0 \leq i \leq e-1$) を $\widehat{\mathfrak{sl}}_e$ の Chevalley 生成元とすると, V_e 上の $\widehat{\mathfrak{sl}}_e$ の作用は,

$$e_i \cdot (v_j \otimes t^k) = \begin{cases} v_{j-1} \otimes t^k & \text{if } j = i + 1 \text{ and } i \neq 0, \\ v_e \otimes t^{k+1} & \text{if } j = 1 \text{ and } i = 0, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$f_i \cdot (v_j \otimes t^k) = \begin{cases} v_{j+1} \otimes t^k & \text{if } j = i \text{ and } i \neq 0, \\ v_1 \otimes t^{k-1} & \text{if } j = e \text{ and } i = 0, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$h_i \cdot (v_j \otimes t^k) = \begin{cases} v_j \otimes t^k & \text{if } j \equiv i \pmod{e}, \\ -v_j \otimes t^k & \text{if } j = i + 1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

によって与えられる。

また, \mathfrak{h} の V_e 上のレベル 0 表現が,

$$\mathfrak{h} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V_e) \quad \text{s.t.} \quad a_k \mapsto \text{Id} \otimes t^{-k}, \quad a'_k \mapsto \text{Id} \otimes t^k$$

によって定まる。

\mathbb{C}^e の標準的な基底を v_1, \dots, v_e とし, V_e の基底 $\{v_i \otimes t^j \mid 1 \leq i \leq e, j \in \mathbb{Z}\}$ に対し,

$$u_{i-ek} := v_i \otimes t^k$$

とおくと, $\{u_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ が V_e の基底を与える。この基底に対し, $\widehat{\mathfrak{sl}}_e$ の作用を書くと

$$(1.4) \quad \begin{aligned} e_i \cdot u_j &= \begin{cases} u_{j-1} & \text{if } j \equiv i+1 \pmod{e}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \\ f_i \cdot u_j &= \begin{cases} u_{j+1} & \text{if } j \equiv i \pmod{e}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \\ h_i \cdot u_j &= \begin{cases} u_j & \text{if } j \equiv i \pmod{e}, \\ -u_j & \text{if } j \equiv i+1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。

また, V_e の基底 $\{u_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ に対し, \mathfrak{h} の作用を書くと,

$$a_k \cdot u_j = u_{j+ek}, \quad a'_k \cdot u_j = u_{j-ek}$$

となる。

これらの表現を r 次外積空間 $\wedge^r V_e$ 上に (r 次のテンソル積表現の制限として) 拡張する。

V_e の基底 $\{u_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ を用いて, 前節と同様に, 帰納系 $(\wedge^r V_e, \varphi_{s,r} (s, r \geq \mathbb{Z}_{>0}))$ を考え, 帰納的極限 $\mathcal{F}_e = \varinjlim_r \wedge^r V_e$ を取れば,

$$\mathcal{B}_e := \{u_{j_1} \wedge u_{j_2} \wedge u_{j_3} \wedge \dots \mid j_1 > j_2 > \dots \text{ and } j_{k+1} = j_k - 1 \text{ for } \forall k \gg 0\}$$

が \mathcal{F}_e の基底を与える。

$\widehat{\mathfrak{sl}}_e$ の Chevalley 生成元 $e_i, f_i (0 \leq i \leq e-1)$ の作用が,

$$(1.5) \quad \begin{aligned} e_i \cdot (u_{j_1} \wedge u_{j_2} \wedge u_{j_3} \wedge \dots) &= \sum_{p \geq 1} u_{j_1} \wedge u_{j_2} \wedge \dots \wedge u_{j_{p-1}} \wedge (e_i \cdot u_{i_p}) \wedge u_{j_{p+1}} \wedge u_{j_{p+2}} \wedge \dots \\ f_i \cdot (u_{j_1} \wedge u_{j_2} \wedge u_{j_3} \wedge \dots) &= \sum_{p \geq 1} u_{j_1} \wedge u_{j_2} \wedge \dots \wedge u_{j_{p-1}} \wedge (f_i \cdot u_{i_p}) \wedge u_{j_{p+1}} \wedge u_{j_{p+2}} \wedge \dots \end{aligned}$$

によって定まる ($j_{k+1} = j_k - 1$ for $\forall k \gg 0$ であることに注意すれば, (1.4) より, 右辺の和は有限和となる)。この定義は, (各 semi-infinite wedge に対し, 十分大きな

r を考えれば) e_i, f_i の $\wedge^r V_e$ 上の定義が, 帰納系と整合的であることから従う。さらに, h_i ($0 \leq i \leq e-1$) の \mathcal{F}_e 上の作用も適切に定めれば, これらの作用によって, \mathcal{F}_e は $\widehat{\mathfrak{sl}}_e$ のレベル 1 表現となる。

また, \mathfrak{h} の生成元 a_k, a'_k ($k \in \mathbb{Z}_{>0}$) の \mathcal{F}_e 上の作用が,

(1.6)

$$\begin{aligned} a_k \cdot (u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \dots) &:= \sum_{j \geq 1} u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \dots \wedge u_{i_{j-1}} \wedge (a_k \cdot u_{i_j}) \wedge u_{i_{j+1}} \wedge u_{i_{j+2}} \dots, \\ &= \sum_{j \geq 1} u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \dots \wedge u_{i_{j-1}} \wedge u_{i_j+ek} \wedge u_{i_{j+1}} \wedge u_{i_{j+2}} \dots, \\ a'_k \cdot (u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \dots) &= \sum_{j \geq 1} u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \dots \wedge u_{i_{j-1}} \wedge (a'_k \cdot u_{i_j}) \wedge u_{i_{j+1}} \wedge u_{i_{j+2}} \dots, \\ &= \sum_{j \geq 1} u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \dots \wedge u_{i_{j-1}} \wedge u_{i_j-ek} \wedge u_{i_{j+1}} \wedge u_{i_{j+2}} \dots, \end{aligned}$$

によって定まり, この作用によって, \mathcal{F}_e は \mathfrak{h} のレベル e 表現となる。

代数 A, B に対し, 代数としての準同型 $g: A \rightarrow B$ があつた時, B -加群 M を g を通じて A -加群と思つたものを M^g と表すことにすると, (1.6) より, \mathfrak{h} 上の代数としての自己準同型写像

$$\xi_e: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h} \quad \text{s.t. } a_k \mapsto a_{ek}, a'_k \mapsto a'_{ek}, c \mapsto ec$$

を考えれば,

$$(1.7) \quad \mathcal{F}_e \rightarrow \mathcal{F}^{\xi_e} \quad \text{s.t. } (u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \dots) \mapsto (v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots)$$

が \mathcal{H} -加群としての同型写像を与える。

注意 1.2. 定義より, \mathcal{F}_e 上の $\widehat{\mathfrak{sl}}_e$ と \mathfrak{h} の作用は互いに可換であることが分かる。もし, (1.7) での基底の対応によって, 線形空間としての同型 $\mathcal{F}_e \cong \mathcal{F}$ を考え, \mathcal{F} 上の \mathfrak{h} の作用を考えると, その作用は \mathcal{F}_e 上の $\widehat{\mathfrak{sl}}_e$ の作用とは可換にならないことに注意しよう。

整数 s に対し, \mathcal{F}_e の部分空間 $\mathcal{F}_e[s]$ を

$$\mathcal{B}_e[s] := \{u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge u_{i_3} \wedge \dots \mid i_1 > i_2 > \dots \text{ and } i_k = s - k + 1 \text{ for } \forall k \gg 0\}$$

によって張られるものとして定義する。 $\mathcal{F}_e[s]$ を charge s のレベル 1 Fock 空間という。定義より, $\mathcal{F}_e = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_e[s]$ を得る。 $\mathcal{F}_e[s]$ が $\widehat{\mathfrak{sl}}_e, \mathfrak{h}$ の作用で閉じていることは容易に分かる。

$u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \cdots \in \mathcal{B}_e[s]$ に対し,

$$|\lambda, s\rangle := u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \cdots, \quad \text{where } \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \text{ s.t. } \lambda_k = i_k - s + k - 1$$

とおくと, λ は分割となり, さらに $\mathcal{B}_e[s] = \{|\lambda, s\rangle \mid \lambda \vdash n, n \geq 0\}$ となる。

\mathfrak{h} -加群としての同型写像 (1.7) を $\mathcal{F}_e[s]$ に制限したものと boson-fermion 対応を用いると, \mathfrak{h} -加群としての同型 $\mathcal{F}_e[s] \cong \mathcal{F}[s]^{\xi_e} \cong \mathcal{B}^{\xi_e} \cong (\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{G}(\mathbf{x})})^{\xi_e}$ を得る。

$(\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{G}(\mathbf{x})})^{\xi_e}$ 上の $a_k, a'_k \in \mathfrak{h}$ の作用は, $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{G}(\mathbf{x})}$ 上の a_{ek}, a'_{ek} の作用と同一視されることに注意して, 補題 1.1 と合わせると, 以下の命題を得る。

命題 1.3. \mathfrak{h} -加群としての同型写像

$$\mathcal{F}_e[s] \cong (\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{G}(\mathbf{x})})^{\xi_e} \text{ s.t. } |\lambda, s\rangle \mapsto s_\lambda(\mathbf{x})$$

が存在する。さらに, $(\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{G}(\mathbf{x})})^{\xi_e} \cong \mathcal{F}_e[s]$ 上の \mathfrak{h} の作用は,

$$\{b_{s_\lambda(\mathbf{x}^e)}, D_{b_{s_\lambda(\mathbf{x}^e)}} \mid \lambda \vdash n, n \geq 0\}$$

によって生成される。ここで, $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{G}(\mathbf{x})}$ に対し, $f(\mathbf{x}^e) = f(x_1^e, x_2^e, \dots)$ である (ξ_e を通じた作用のズレがここに現れる)。また, $b_{s_\lambda(\mathbf{x}^e)}$ の $(\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{G}(\mathbf{x})})^{\xi_e}$ 上の作用は,

$$b_{s_\lambda(\mathbf{x}^e)} \cdot f = s_\lambda(\mathbf{x}^e) f \quad (f \in (\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{G}(\mathbf{x})})^{\xi_e})$$

によって与えられる。

1.4. レベル r Fock 空間.

\mathbb{C}^e を \mathfrak{sl}_e の自然表現, \mathbb{C}^r を \mathfrak{sl}_r の自然表現とし, $V_{e,r} = \mathbb{C}^e \otimes \mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ とすると,

$$\mathfrak{sl}_e \otimes \mathbb{C}[\omega, \omega^{-1}] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V_{e,r}) \text{ s.t. } x \otimes \omega^i \mapsto x \otimes \text{Id} \otimes t^i$$

は, $V_{e,r}$ 上の $\widehat{\mathfrak{sl}}_e$ のレベル 0 表現を与える。また, \mathfrak{h} の $V_{e,r}$ 上のレベル 0 表現が,

$$\mathfrak{h} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V_{e,r}) \text{ s.t. } a_k \mapsto \text{Id} \otimes \text{Id} \otimes t^{-k}, \quad a'_k \mapsto \text{Id} \otimes \text{Id} \otimes t^k$$

によって定まる。 \mathbb{C}^e の標準的な基底を v_1, \dots, v_e , \mathbb{C}^r の標準的な基底を $\dot{v}_1, \dots, \dot{v}_r$ とし, $V_{e,r}$ の基底 $\{v_i \otimes \dot{v}_j \otimes t^k \mid 1 \leq i \leq e, 1 \leq j \leq r, k \in \mathbb{Z}\}$ に対し,

$$(1.8) \quad u_{i+(j-1)e-ker} := v_i \otimes \dot{v}_j \otimes t^k$$

とおくと, $\{u_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ が $V_{e,r}$ の基底を与える。

これらの表現を k 次外積空間 $\wedge^k V_{e,r}$ 上に (k 次のテンソル積表現の制限として) 拡張する。

$V_{e,r}$ の基底 $\{u_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ を用いて, これまでと同様に, 帰納系 $(\wedge^k V_{e,r}, \varphi_{s,k} (s, k \in \mathbb{Z}_{>0}))$ を考え, 帰納的極限 $\mathcal{F}_{e,r} = \varinjlim_k \wedge^k V_{e,r}$ を考えれば,

$$\mathcal{B}_{e,r} := \{u_{j_1} \wedge u_{j_2} \wedge \dots \mid j_1 > j_2 > \dots \text{ and } j_{k+1} = j_k - 1 \text{ for } \forall k \gg 0\}$$

が $\mathcal{F}_{e,r}$ の基底を与える。

前節と同様にして, $\widehat{\mathfrak{sl}}_e$ の Chevalley 生成元 e_i, f_i ($0 \leq i \leq e-1$) の $\mathcal{F}_{e,r}$ 上の作用が ($\wedge^k V_{e,r}$ 上の作用の極限として) 定まり, h_i ($0 \leq i \leq e-1$) の $\mathcal{F}_{e,r}$ 上の作用も適切に定めることによって, $\mathcal{F}_{e,r}$ は $\widehat{\mathfrak{sl}}_e$ のレベル r 表現となる。

また, \mathfrak{h} の生成元 a_k, a'_k ($k \in \mathbb{Z}_{>0}$) の $\mathcal{F}_{e,r}$ 上の作用が,

$$\begin{aligned} a_k \cdot (u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \dots) &= \sum_{j \geq 1} u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \dots \wedge u_{i_{j-1}} \wedge u_{i_j+erk} \wedge u_{i_{j+1}} \wedge u_{i_{j+2}} \wedge \dots, \\ a'_k \cdot (u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \dots) &= \sum_{j \geq 1} u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \dots \wedge u_{i_{j-1}} \wedge u_{i_j-erk} \wedge u_{i_{j+1}} \wedge u_{i_{j+2}} \wedge \dots, \end{aligned}$$

によって定まり, この作用によって, $\mathcal{F}_{e,r}$ は \mathfrak{h} のレベル er 表現となる。

整数 s に対し, $\mathcal{F}_{e,r}$ の部分空間 $\mathcal{F}_{e,r}^{[s]}$ を,

$$\mathcal{B}_{e,r}^{[s]} := \{u_{j_1} \wedge u_{j_2} \wedge \dots \mid j_1 > j_2 > \dots \text{ and } j_k = s - k + 1 \text{ for } \forall k \gg 0\}$$

によって張られるものとする。明らかに $\mathcal{F}_{e,r} = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_{e,r}^{[s]}$ である。

$$\Lambda_{\geq 0,r}^+ := \left\{ \lambda = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(r)}) \mid \begin{array}{l} \lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \dots) \vdash n_k \ (1 \leq k \leq r) \\ (n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \end{array} \right\}$$

とおく。

$u_{j_1} \wedge u_{j_2} \wedge \dots \in \mathcal{B}_{e,r}^{[s]}$ に対し, 以下のステップで $\lambda \in \Lambda_{\geq 0,r}^+$ と $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{Z}^r$ を定める。

(step 1): (1.8) を思い出して,

$$u_{j_i} = v_{a_i} \otimes v_{b_i} \otimes t^{c_i} \quad (1 \leq a_i \leq e, 1 \leq b_i \leq r, c_i \in \mathbb{Z})$$

によって, 数列 $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}_{>0}}, (b_i)_{i \in \mathbb{Z}_{>0}}, (c_i)_{i \in \mathbb{Z}_{>0}}$ を定める。

(step 2): 各 $k = 1, \dots, r$ に対し, $b_i = k$ となる i を小さい方から順に並べ, それを $i_1^{(k)} < i_2^{(k)} < \dots$ とおく。このもとで, 数列 $(d_j^{(k)})_{j \in \mathbb{Z}_{>0}}$ を,

$$d_j^{(k)} = a_{i_j^{(k)}} - ec_{i_j^{(k)}}$$

によって定める。このとき, $(d_j^{(k)})_{j \in \mathbb{Z}_{>0}}$ は減少列であり, 十分大きな j に対し, $d_j^{(k)} = s_k - j + 1$ となる整数 $s_k \in \mathbb{Z}$ が存在する。さらに, $u_{j_1} \wedge u_{j_2} \wedge \cdots \in \mathcal{B}_{e,r}^{[s]}$ であることから, このような整数 s_k に対し, $s_1 + s_2 + \cdots + s_r = s$ となることが分かる。

(step 3): $\lambda \in \Lambda_{\geq 0, r}^+$ を,

$$\lambda_j^{(k)} = d_j^{(k)} - s_k + j - 1$$

によって定める。

この対応によって, $u_{j_1} \wedge u_{j_2} \wedge \cdots \in \mathcal{B}_{e,r}^{[s]}$ に対し,

$$|\lambda, \mathbf{s}\rangle := u_{j_1} \wedge u_{j_2} \wedge \cdots$$

とおくと,

$$\mathcal{B}_{e,r}^{[s]} = \{|\lambda, \mathbf{s}\rangle \mid \lambda \in \Lambda_{\geq 0, t}^+, \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{Z}^r \text{ s.t. } s_1 + s_2 + \cdots + s_r = s\}$$

となる。 $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{Z}^r$ s.t. $s_1 + s_2 + \cdots + s_r = s$ に対し,

$$\mathcal{B}_{e,r}[\mathbf{s}] = \{|\lambda, \mathbf{s}\rangle \mid \lambda \in \Lambda_{\geq 0, r}^+\}$$

によって張られる $\mathcal{F}_{e,r}^{[s]}$ の部分空間を $\mathcal{F}_{e,r}[\mathbf{s}]$ とおくと, 定義より, $\mathcal{F}_{e,r}[\mathbf{s}]$ は $\widehat{\mathfrak{sl}}_e \otimes \mathfrak{h}$ の作用で閉じている。この, $\mathcal{F}_{e,r}[\mathbf{s}]$ を **multi-charge \mathbf{s} のレベル r Fock 空間** と言う。次のことが成り立つ。

命題 1.4. 線型空間としての同型写像

$$\mathcal{F}_{e,r}[\mathbf{s}] \rightarrow \mathcal{F}_e[s_1] \otimes \mathcal{F}_e[s_2] \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_e[s_r] \quad (|\lambda, \mathbf{s}\rangle \mapsto |\lambda^{(1)}, s_1\rangle \otimes \cdots \otimes |\lambda^{(r)}, s_r\rangle)$$

は, $\widehat{\mathfrak{sl}}_e \otimes \mathfrak{h}$ -加群としての同型を与える。ここで, $\mathcal{F}_e[s_1] \otimes \mathcal{F}_e[s_2] \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_e[s_r]$ は, レベル 1 Fock 空間 $\mathcal{F}_e[s_1], \dots, \mathcal{F}_e[s_r]$ の $\widehat{\mathfrak{sl}}_e \otimes \mathfrak{h}$ の余積を用いたテンソル積表現である。よって, \mathfrak{h} -加群としての同型写像

$$(1.9) \quad \mathcal{F}_{e,r}[\mathbf{s}] \rightarrow \bigotimes_{k=1}^r (\mathbb{C}[\mathbf{x}^{(k)}])^{\mathfrak{G}(\mathbf{x}^{(k)})} \xi_e \quad (|\lambda, \mathbf{s}\rangle \mapsto \bigotimes_{k=1}^r s_{\lambda^{(k)}}(\mathbf{x}^{(k)}))$$

を得る。

§ 2. BOSONIC FOCK 空間の圏化

この章では, 一般線型 Lie 代数 \mathfrak{gl}_m に付随する量子群 $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ の多項式表現のなす圏を用いて, bosonic Fock 空間 $\mathcal{B} \cong \mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{G}(\mathbf{x})}$ を圏化する。

$P = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}\varepsilon_i$ を \mathfrak{gl}_m の weight lattice とし, $P^\vee = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}h_i$ をその dual weight lattice とする。また, $\langle, \rangle : P \times P^\vee \rightarrow \mathbb{Z}$ を natural pairing (i.e. $\langle \varepsilon_i, h_j \rangle = \delta_{ij}$) とする。 $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ とおけば, $\Pi = \{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq m-1\}$ が simple root の集合となる。 P 上の半順序集合 (支配的順序) を, $\lambda, \mu \in P$ に対し, $\lambda \geq \mu \Leftrightarrow \lambda - \mu \in \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$ によって定める。以下, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{Z}^m$ を, 対応 $\mu = \sum_{i=1}^m \mu_i \varepsilon_i$ によって P の元と思うことにする。

$\mathcal{A} = \mathbb{Z}[\hat{q}, \hat{q}^{-1}]$ を \hat{q} を不定元とする \mathbb{Z} 上のローラン多項式環とし, $\mathcal{K} = \mathbb{Q}(\hat{q})$ をその商体とする。量子群 $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ は以下の生成元と基本関係式によって定義される \mathcal{K} 上の結合代数である。

生成元: e_i, f_i ($1 \leq i \leq m-1$), K_j^\pm ($1 \leq j \leq m$).
基本関係式:

$$(Q1) \quad K_i^+ K_j^+ = K_j^+ K_i^+, \quad K_i^+ K_i^- = K_i^- K_i^+ = 1,$$

$$(Q2) \quad K_i^+ e_j K_i^- = \hat{q}^{\langle \alpha_j, h_i \rangle} e_j, \quad K_i^+ f_j K_i^- = \hat{q}^{-\langle \alpha_j, h_i \rangle} f_j$$

$$(Q3) \quad [e_i, f_j] = \delta_{ij} \frac{K_i^+ K_{i+1}^- - K_i^- K_{i+1}^+}{\hat{q} - \hat{q}^{-1}}$$

$$(Q4) \quad \begin{aligned} e_{i\pm 1} e_i^2 - (\hat{q} + \hat{q}^{-1}) e_i e_{i+1} e_i + e_i^2 e_{i+1} &= 0, & e_i e_j &= e_j e_i \quad (|i-j| \geq 2), \\ f_{i\pm 1} f_i^2 - (\hat{q} + \hat{q}^{-1}) f_i f_{i+1} f_i + f_i^2 f_{i+1} &= 0, & f_i f_j &= f_j f_i \quad (|i-j| \geq 2). \end{aligned}$$

$U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ 上には,

$$\Delta(e_i) = e_i \otimes K_i^+ K_{i+1}^- + 1 \otimes e_i,$$

$$\Delta(f_i) = f_i \otimes 1 + K_i^- K_{i+1}^+ \otimes f_i,$$

$$\Delta(K_j^\pm) = K_j^\pm \otimes K_j^\pm$$

によって定まる余積 $\Delta : U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m) \rightarrow U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m) \otimes_{\mathbb{Q}(\hat{q})} U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ を持った Hopf 代数の構造が定まる。

$U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -poly を, $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ の多項式表現のなす圏とする。つまり, $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -poly は, 有限次元 $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -加群 M で,

$$M = \bigoplus_{\mu=(\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m} M_\mu, \quad \text{where } M_\mu = \{v \in M \mid K_j^+ \cdot v = \hat{q}^{\mu_j} v\}$$

を満たす加群よりなる $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -mod の充満部分圏である。

分割 λ に対し, λ を最高ウェイトとする $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ の最高ウェイト加群 (Weyl 加群) を $\Delta(\lambda)$ とすると, $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -poly は $\{\Delta(\lambda) \mid \lambda \vdash n (n \geq 0) \text{ s.t. } \ell(\lambda) \leq m\}$ を既約加群の同型類の完全代表系とする半単純なアーベル圏であることが知られている。

$M \in U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -poly に対し, その指標 $\text{ch } M \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_m]$ を,

$$(2.1) \quad \text{ch } M = \sum_{\mu=(\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m} \dim M_{\mu} x^{\mu}, \quad \text{where } x^{\mu} = x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \dots x_m^{\mu_m}$$

によって定める。このとき, $\text{ch } M$ は対称多項式であり, 特に, Weyl 加群 $\Delta(\lambda)$ の指標に関しては,

$$\text{ch } \Delta(\lambda) = s_{\lambda}(x_1, \dots, x_m)$$

となることが知られている (Weyl の指標公式)。 $K_0(U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -poly) を $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -poly の Grothendieck 群とし, $M \in U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -poly に対し, その $K_0(U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -poly) での像を $[M]$ と表すことにする。すると, 指標を用いて以下のような線形空間としての同型写像を得る。

$$(2.2) \quad \text{ch} : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$$
-poly) $\rightarrow \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_m]^{\mathfrak{S}_m} \quad \text{s.t. } [M] \mapsto \text{ch } M.$

さて, 対称関数のなす環 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(x)}$ は, 対称多項式のなす環 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]^{\mathfrak{S}_m}$ ($m \in \mathbb{Z}_{>0}$) に対する射影

$$\text{pr}_{m',m} : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{m'}]^{\mathfrak{S}_{m'}} \rightarrow \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]^{\mathfrak{S}_m} \quad \text{s.t. } x_j \mapsto 0 \text{ for } j > m \quad (m' > m)$$

によって定まる射影系に関する次数ごとの射影的極限と一致することが知られている。この射影系に対応するものを $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -poly ($m \in \mathbb{Z}_{>0}$) の中で考えよう。 $m' > m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, 関手 $\Upsilon_{m',m} : U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_{m'})$ -poly $\rightarrow U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -poly を,

$$(2.3) \quad \Upsilon_{m',m}(M) = \bigoplus_{\mu=(\mu_1, \dots, \mu_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{m'}} M_{\mu}$$

によって定める。ここで, Chevalley 生成元をそのまま同じ添え字の Chevalley 生成元に移す代数としての単射準同型 $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m) \rightarrow U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_{m'})$ を通じて, $\Upsilon_{m',m}(M)$ を $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -加群と思う。

次数ごとの射影系に対応するものを考えるために, 以下のような $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -poly の充満部分圏を考える。 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ の n 次の多項式表現からなる $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -poly の充満部分圏を $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -poly ^{n} と書くことにする。つまり, $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -poly ^{n} は,

$$M = \bigoplus_{\substack{\mu=(\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m \\ \mu_1 + \dots + \mu_m = n}} M_{\mu}, \quad \text{where } M_{\mu} = \{v \in M \mid K_j \cdot v = \hat{q}^{\mu_j} v\}$$

を満たす有限次元 $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -加群からなる $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -poly の充満部分圏である。すると,

$$U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly} = \bigoplus_{n \geq 0} U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly}^n$$

が成り立つ。

関手 $\Upsilon_{m',m}$ を $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_{m'})\text{-poly}^n$ に制限すれば, 関手 $\Upsilon_{m',m} : U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_{m'})\text{-poly}^n \rightarrow U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly}^n$ を得る。この関手は完全関手となるので, それぞれの Grothendieck 群の間の線形写像 $[\Upsilon_{m',m}] : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_{m'})\text{-poly}^n) \rightarrow \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly}^n)$ を誘導する。ちなみに, $m' > m \geq n$ であるとき, 関手 $\Upsilon_{m',m}$ を $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_{m'})\text{-poly}^n$ に制限したものは, $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_{m'})\text{-poly}^n$ と $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly}^n$ の間の圏同値を与える。

$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]^{\mathfrak{S}_m}$ の n 次斉次対称多項式からなる部分空間を $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]_n^{\mathfrak{S}_m}$ と表すことにすると, 以下の可換図式を得る;

$$(2.4) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_{m'})\text{-poly}^n) & \xrightarrow{[\Upsilon_{m',m}]} & \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly}^n) \\ \text{ch} \downarrow & & \downarrow \text{ch} \\ \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{m'}]_n^{\mathfrak{S}_{m'}} & \xrightarrow{\text{pr}_{m',m}} & \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]_n^{\mathfrak{S}_m} \end{array}$$

この可換図式より, $M \in K_0(U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly}^n)$ に対し, その指標の射影的極限 $\widehat{\text{ch}}M \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})}$ を取ることができ, 以下の線形同型写像を得る;

$$(2.5) \quad \widehat{\text{ch}} : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigoplus_{n \geq 0} K_0(U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_n)\text{-poly}^n) \rightarrow \mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})} \text{ s.t. } [M] \mapsto \widehat{\text{ch}}M.$$

また, この同型のもとで,

$$(2.6) \quad \widehat{\text{ch}}(\Delta(\lambda)) = s_{\lambda}(\mathbf{x}) \text{ for } \lambda \vdash n, n \geq 0$$

となる。

注意 2.1. $m < n$ のとき, $\ell(\lambda) > m$ となる $\lambda \vdash n$ に対し, それを最高ウェイトとする既約加群は $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly}$ の中には現れないので, (2.5) のように, 多項式表現の次数ごとに, 量子群のランクを適切に取ってやる必要がある。

線形同型写像 $\widehat{\text{ch}}$ によって, 線形空間として, $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigoplus_{n \geq 0} K_0(U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_n)\text{-poly}^n)$ と $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})} \cong \mathcal{B}$ とが同一視された。そこで, この同一視のもとで, \mathcal{B} 上の \mathfrak{h} の作用を与えるような $\bigoplus_{n \geq 0} U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_n)\text{-poly}^n$ 上の自己関手を考えよう。

補題 1.1 によれば, $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})}$ 上の \mathfrak{h} の作用は, $\{b_{s_{\lambda}(\mathbf{x})}, D_{b_{s_{\lambda}(\mathbf{x})}} \mid \lambda \vdash n, n \geq 0\}$ によって生成され, $b_{s_{\lambda}(\mathbf{x})}$ は, $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})}$ の元に $s_{\lambda}(\mathbf{x})$ を掛けるという作用素であり,

$D_{b_{s_\lambda(x)}}$ は, $b_{s_\lambda(x)}$ の双線形形式 \langle, \rangle に関する随伴であった。これらに対応するものを $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -poly の中で考えよう (注意 2.1 より, 関手 $\Upsilon_{m',m}$ を用いることによって, 考える $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ の多項式表現の次数に対し, 十分大きい m に対する, $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -poly の中で考えればよい)。

$U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ の Hopf 代数としての構造を用いて, $M, N \in U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -mod に対し, テンソル積表現 $M \otimes_{\mathbb{Q}(\hat{q})} N$ や双対表現 $M^* = \text{Hom}_{\mathbb{Q}(\hat{q})}(M, \mathbb{Q}(\hat{q}))$ を考えることが出来る。

$\lambda \vdash k$ に対し, 関手 $? \otimes_{\mathbb{Q}(\hat{q})} \Delta(\lambda) : U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -mod $\rightarrow U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -mod を $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -poly に制限することによって, 関手

$$? \otimes_{\mathbb{Q}(\hat{q})} \Delta(\lambda) : U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly} \rightarrow U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly}$$

を得る。定義より, $W \in U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -poly に対し,

$$(2.7) \quad \text{ch}(M \otimes_{\mathbb{Q}(\hat{q})} \Delta(\lambda)) = \text{ch} \Delta(\lambda) \text{ch} M = s_\lambda(x_1, \dots, x_m) \text{ch} M$$

が成り立つ。一方で, 関手 $? \otimes_{\mathbb{Q}(\hat{q})} \Delta(\lambda)^* : U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -mod $\rightarrow U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -mod を考えると, これは, 一般に $W \in U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -poly に対しても, $W \otimes_{\mathbb{Q}(\hat{q})} \Delta(\lambda)^*$ が多項式表現になるとは限らない。そこで, truncation 関手

$$T_{ru} : U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)\text{-mod} \rightarrow U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly}$$

を, $M \in U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ -mod に対し, 多項式表現であるような M の極大部分加群を $T_{ru}(M)$ とするものとして定め, 関手の合成

$$T_{ru} \circ (? \otimes_{\mathbb{Q}(\hat{q})} \Delta(\lambda)^*) : U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly} \rightarrow U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly}$$

を考える。すると, $T_{ru} \circ (? \otimes_{\mathbb{Q}(\hat{q})} \Delta(\lambda)^*)$ は $? \otimes_{\mathbb{Q}(\hat{q})} \Delta(\lambda)^*$ の右随伴関手となる。つまり, 自然同型

$$(2.8) \quad \text{Hom}_{U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)}(M \otimes_{\mathbb{Q}(\hat{q})} \Delta(\lambda), N) \cong \text{Hom}_{U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)}(M, T_{ru}(N \otimes_{\mathbb{Q}(\hat{q})} \Delta(\lambda)^*))$$

が成り立つ。定義より,

$$\begin{aligned} ? \otimes_{\mathbb{Q}(\hat{q})} \Delta(\lambda) &: U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly}^n \rightarrow U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly}^{n+k}, \\ T_{ru} \circ (? \otimes_{\mathbb{Q}(\hat{q})} \Delta(\lambda)^*) &: U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly}^n \rightarrow U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly}^{n-k} \end{aligned}$$

となる。そこで, $m' > m \geq n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, $\Upsilon_{m',m}$ は, $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_{m'})\text{-poly}^n$ と $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly}^n$ の圏同値をあたえることに注意して, $m \geq n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\lambda \vdash k$ に対し, 関手 $\mathfrak{B}_{m,n;\lambda}$,

$\mathfrak{B}'_{m,n;\lambda}$ を,

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{m,n;\lambda} &: U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly}^n \xrightarrow{\Upsilon_{m+k,m}^{-1}} U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_{m+k})\text{-poly}^n \xrightarrow{? \otimes_{\mathbb{Q}(q)} \Delta(\lambda)} U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_{m+k})\text{-poly}^{n+k} \\ \mathfrak{B}'_{m,n;\lambda} &: U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_{m+k})\text{-poly}^{n+k} \xrightarrow{Tru \circ (? \otimes_{\mathbb{Q}(\hat{q})} \Delta(\lambda)^*)} U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_{m+k})\text{-poly}^n \xrightarrow{\Upsilon_{m+k,m}} U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly}^n \end{aligned}$$

によって定義すれば, $\mathfrak{B}'_{m,n;\lambda}$ は $\mathfrak{B}_{m,n;\lambda}$ の右随伴関手であり, さらに, 以下の可換図式が成り立つ;

$$\begin{array}{ccc} U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_{m'})\text{-poly}^n \xrightarrow{\mathfrak{B}'_{m',n;\lambda}} U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_{m'+k})\text{-poly}^{n+k} & & U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_{m'+k})\text{-poly}^{n+k} \xrightarrow{\mathfrak{B}'_{m',n;\lambda}} U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_{m'})\text{-poly}^n \\ \Upsilon_{m',m} \downarrow & & \Upsilon_{m'+k,m+k} \downarrow \\ U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly}^n \xrightarrow{\mathfrak{B}_{m,n;\lambda}} U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_{m+k})\text{-poly}^{n+k} & & U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_{m+k})\text{-poly}^{n+k} \xrightarrow{\mathfrak{B}'_{m,n;\lambda}} U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly}^n \\ & & \Upsilon_{m',m} \downarrow \end{array}$$

$\mathfrak{B}_{m,n;\lambda}, \mathfrak{B}'_{m,n;\lambda}$ は共に完全関手なので, 対応する圏の Grothendieck 上の well-defined な線形写像 $[\mathfrak{B}_{m,n;\lambda}], [\mathfrak{B}'_{m,n;\lambda}]$ を定め, 上の可換図式は, (2.4) のもとで, $[\mathfrak{B}_{m,n;\lambda}], [\mathfrak{B}'_{m,n;\lambda}]$ が射影系 $(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]^{\mathfrak{S}_m}, \text{pr}_{m',m}(m', m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}))$ と整合的であることを意味する。このことに注意して, $\lambda \vdash k$ に対し, $\bigoplus_{n \geq 0} U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_n)\text{-poly}^n$ 上の自己関手 $\mathfrak{B}_\lambda, \mathfrak{B}'_\lambda$ をそれぞれ,

$$\mathfrak{B}_\lambda := \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{B}_{n,n;\lambda}, \quad \mathfrak{B}'_\lambda := \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{B}'_{n,n;\lambda}$$

によって定めると, \mathfrak{B}'_λ は \mathfrak{B}_λ の右随伴関手となる。

(2.7) より, $M \in U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly}^n, \lambda \vdash k$ に対し,

$$\widehat{\text{ch}}(\mathfrak{B}_\lambda(M)) = \widehat{\text{ch}}(M \otimes \Delta(\lambda)) = s_\lambda(\mathbf{x}) \widehat{\text{ch}}M$$

となるので, 線形同型 (2.5) のもとで, $[\mathfrak{B}_\lambda]$ は $s_\lambda(\mathbf{x})$ を掛けるという作用素に対応する。つまり, $[\mathfrak{B}_\lambda] = b_{s_\lambda(\mathbf{x})}$ である。

次に, $[\mathfrak{B}'_\lambda] = D_{b_{s_\lambda(\mathbf{x})}}$ であることを見よう。 $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigoplus_{n \geq 0} K_0(U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_n)\text{-poly}^n)$ 上の双線形形式 \langle, \rangle を, $\bigoplus_{n \geq 0} U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_n)\text{-poly}^n$ が半単純であることに注意して,

$$\langle [M], [N] \rangle := \dim \text{Hom}_{U_{\hat{q}}}(M, N) \quad (M, N \in \bigoplus_{n \geq 0} U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_n)\text{-poly}^n)$$

によって定める (ここで, $U_{\hat{q}} = \bigoplus_{n \geq 0} U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_n)\text{-poly}^n$)。すると, $\{\Delta(\lambda) \mid \lambda \vdash n, n \geq 0\}$ が $\bigoplus_{n \geq 0} U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_n)\text{-poly}^n$ の既約表現の同型類の完全代表系を与えることから, 分割 λ, μ に対し, $\langle [\Delta(\lambda)], [\Delta(\mu)] \rangle = \delta_{\lambda\mu}$ が成り立つ。一方で, $\widehat{\text{ch}}(\Delta(\lambda)) = s_\lambda(\mathbf{x})$ だったので, この双線形形式は, 同型 (2.5) のもとで, $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})}$ 上の双線形形式 \langle, \rangle と一

致する。一方で, \mathfrak{B}_λ と \mathfrak{B}'_λ の随伴性より,

$$\langle [\mathfrak{B}_\lambda(M)], [N] \rangle = \dim \operatorname{Hom}_{U_{\hat{q}}}(\mathfrak{B}_\lambda(M), N) = \dim \operatorname{Hom}_{U_{\hat{q}}}(M, \mathfrak{B}'_\lambda(N)) = \langle [M], [\mathfrak{B}'_\lambda(N)] \rangle$$

を得るので, $[\mathfrak{B}'_\lambda]$ は $[\mathfrak{B}_\lambda]$ の \langle, \rangle に関する随伴である。よって, $[\mathfrak{B}'_\lambda] = D_{b_{s_\lambda(\mathbf{x})}}$ を得る。以上のことをまとめると, 以下の定理を得る。

定理 2.2. $\{[\mathfrak{B}_\lambda], [\mathfrak{B}'_\lambda] \mid \lambda \vdash k, k \geq 0\}$ は, $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigoplus_{n \geq 0} K_0(U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_n)\text{-poly}^n)$ 上の \mathfrak{H} の作用を生成する。さらに, \mathfrak{H} -加群としての同型写像

$$\widehat{\text{ch}} : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigoplus_{n \geq 0} K_0(U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_n)\text{-poly}^n) \rightarrow \mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})} \quad \text{s.t.} \quad [M] \mapsto \widehat{\text{ch}}M.$$

が存在し, $\widehat{\text{ch}}([\Delta(\lambda)]) = s_\lambda(\mathbf{x})$ ($\lambda \vdash n, n \geq 0$) となる。この同型の下で, 作用素として $[\mathfrak{B}_\lambda] = b_{s_\lambda(\mathbf{x})}$, $[\mathfrak{B}'_\lambda] = D_{b_{s_\lambda(\mathbf{x})}}$ となる。

§ 3. CYCLOTOMIC q -SCHUR 代数

3.1. Cyclotomic q -Schur 代数.

R を可換環とし, パラメータとして, 可逆元 $q \in R$ と $s_1, \dots, s_r \in \mathbb{Z}$ を取る。このとき, $G(r, 1, n)$ 型の複素鏡映群 $\mathfrak{S}_n \times (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$ に付随する Ariki-Koike 代数 ${}_R\mathcal{H}_{n,r}$ は, 以下の生成元と基本関係式で定義される R 上の結合代数である;

生成元: T_0, T_1, \dots, T_{n-1} .

基本関係式:

$$(T_0 - q^{2s_1})(T_0 - q^{2s_2}) \dots (T_0 - q^{2s_r}) = 0, \quad (T_i - q)(T_i + q^{-1}) = 0 \quad (1 \leq i \leq n-1),$$

$$T_0 T_1 T_0 T_1 = T_1 T_0 T_1 T_0, \quad T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-2),$$

$$T_i T_j = T_j T_i \quad (|i - j| \geq 2).$$

以下, 必要がない限り添え字の R は省略する。

$\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}_{>0}^r$ に対し,

$$\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}) = \left\{ \mu = (\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(r)}) \left| \begin{array}{l} \mu^{(k)} = (\mu_1^{(k)}, \dots, \mu_{m_k}^{(k)}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{m_k} \\ \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)} = n \end{array} \right. \right\}$$

とし, Ariki-Koike 代数 $\mathcal{H}_{n,r}$ に付随する cyclotomic q -Schur 代数 $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ を,

$$\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m}) = \operatorname{End}_{\mathcal{H}_{n,r}^{\text{op}}} \left(\bigoplus_{\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})} m_\mu \cdot \mathcal{H}_{n,r} \right)$$

によって定義する。ここで m_μ は $\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$ によって定まる $\mathcal{H}_{n,r}$ の元である (定義は [DJM] 等を参照)。考えている環 R を明示する必要があるときは ${}_R\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ のように書く。 $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ が良い性質を持つために, $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r)$ に対し, 以下の

条件を課すことが多い;

$$(A-m) \quad m_k \geq n \text{ for all } k = 1, \dots, r.$$

R が体であり条件 (A-m) を満たすとき, $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ は quasi-hereditary 代数となる。以下, 何も断らなければ, 条件 (A-m) を仮定しているとする。

$$\Lambda_{n,r}^+(\mathbf{m}) = \left\{ \mu = (\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(r)}) \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m}) \mid \mu_1^{(k)} \geq \mu_2^{(k)} \geq \dots \geq \mu_{m_k}^{(k)} \text{ for all } k = 1, \dots, r \right\}$$

とおく。条件 (A-m) を満たすような \mathbf{m} に対しては, (0 を無視することにすれば) $\Lambda_{n,r}^+(\mathbf{m})$ は \mathbf{m} の取り方に依らずに定まるので, それを単に $\Lambda_{n,r}^+$ と表す。

$\lambda \in \Lambda_{n,r}^+$ に対し, $\Delta(\lambda)$ を $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ の Weyl 加群とする (定義については, [DJM] を参照)。quasi-hereditary 代数の言葉で言えば, $\{\Delta(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda_{n,r}^+\}$ が $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ の standard 加群の集合となる。また, $\{L(\lambda) := \Delta(\lambda) / \text{rad } \Delta(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda_{n,r}^+\}$ が, $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ の既約加群の同型類の完全代表系を与える。quasi-hereditary 代数に関する一般論より, $\{[\Delta(\lambda)] \mid \lambda \in \Lambda_{n,r}^+\}$, $\{[L(\lambda)] \mid \lambda \in \Lambda_{n,r}^+\}$ は共に, $K_0(\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod})$ の \mathbb{Z} -自由基底を与える。

3.2. $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod}$ のブロックの分類。

後の議論のために, R が体である時の, [LM] で与えられた, $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod}$ のブロックの分類を復習しよう。後の議論では, パラメータ $q \in R \setminus \{0\}$ に対し, 条件

(C-P): ある $e \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して,

$$\begin{cases} 1 + (q^2)^1 + (q^2)^2 + \dots + (q^2)^{e-1} = 0 \\ 1 + (q^2)^1 + (q^2)^2 + \dots + (q^2)^t \neq 0 \quad (0 < t < e-1) \end{cases}$$

を満たす。

が成り立つ場合を考えるので, 簡単のために, ここでも (C-P) を仮定する。

$\lambda \in \Lambda_{n,r}^+$ に対し, その diagram $[\lambda]$ を,

$$[\lambda] = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 \mid 1 \leq a \leq m_c, 1 \leq b \leq \mu_{a(c)}, 1 \leq c \leq r\}$$

として定める。 $x = (a, b, c) \in [\lambda]$ に対し, その residue を $\text{res}(x) = (q^2)^{b-a+sc}$ によって定める。仮定 (C-P) より, $\text{res}(x) \in \{(q^2)^0, (q^2)^1, (q^2)^2, \dots, (q^2)^{e-1}\}$ となる。 $\lambda \in \Lambda_{n,r}^+$ に対し,

$$r(\lambda) := (r_0(\lambda), r_1(\lambda), \dots, r_{e-1}(\lambda)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^e, \text{ where } r_i(\lambda) := \#\{x \in [\lambda] \mid \text{res}(x) = (q^2)^i\}$$

とし, $R_{n,e} := \{r(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda_{n,r}^+\} \subset \mathbb{Z}^e$ とおくと, 1対1対応

$$(3.1) \quad \begin{aligned} & \{\mathcal{S}_{n,r}\text{-mod のブロック}\} \xleftrightarrow{1:1} R_{n,e} \\ & (L(\lambda) \text{ と } L(\mu) \text{ が同じブロックに属する} \Leftrightarrow r(\lambda) = r(\mu)) \end{aligned}$$

を得る ([LM]).

3.3. $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ -加群の指標.

$\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ -加群の1つの特徴付けとして, 指標の概念を導入しよう. $\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$ に対し, $1_\mu \in \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ を $1_\mu(m_\tau) = \delta_{\mu\tau} m_\mu$ によって定める. つまり, 1_μ は $m_\mu \cdot \mathcal{H}_{n,r}$ 上は恒等写像で $m_\tau \cdot \mathcal{H}_{n,r}$ ($\tau \neq \mu$) 上では0を与える $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ の元である. 明らかに, $\{1_\mu \mid \mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})\}$ は互いに直交するべき等元であり, $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ の単位元 $1_{\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})}$ に対し, $1_{\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})} = \sum_{\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})} 1_\mu$ が成り立つ. よって, $M \in \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod}$ は,

$$M = \bigoplus_{\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})} 1_\mu \cdot M$$

の形に分解する. この分解を利用して, M の指標 $\text{ch } M \in \bigotimes_{k=1}^r \mathbb{Z}[x_{(1,k)}, \dots, x_{(m_k,k)}]$ を,

$$\text{ch } M = \sum_{\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})} \dim(1_\mu \cdot M) \cdot x^\mu, \quad \text{where } x^\mu = \otimes_{k=1}^r x_{(1,k)}^{\mu_1^{(k)}} x_{(2,k)}^{\mu_2^{(k)}} \cdots x_{(m_k,k)}^{\mu_{m_k}^{(k)}}$$

と定める. すると, $\text{ch } M \in \bigotimes_{k=1}^r \mathbb{Z}[x_{(1,k)}, \dots, x_{(m_k,k)}]^{\mathfrak{S}_{m_k}}$ となることが分かる.

後の議論のために, 指標の帰納的極限を取って, 対称関数として表しておこう. $\mathbf{x}_{(k)} = \{x_{(1,k)}, x_{(2,k)}, \dots, \}$ を加算無限個の変数の集合とし, 対称関数のなす環 r 個のテンソル積 $\bigotimes_{k=1}^r \mathbb{Z}[\mathbf{x}_{(k)}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x}_{(k)})}$ を考える.

$\mathbf{m}' = (m'_1, \dots, m'_r) \in \mathbb{Z}_{>0}^r$ s.t. $m'_k \geq m_k$ に対し, 射影

$$\text{pr}_{\mathbf{m}', \mathbf{m}} := \bigotimes_{k=1}^r \text{pr}_{m'_k, m_k} : \bigotimes_{k=1}^r \mathbb{Z}[x_{(1,k)}, \dots, x_{(m'_k,k)}]^{\mathfrak{S}_{m'_k}} \rightarrow \bigotimes_{k=1}^r \mathbb{Z}[x_{(1,k)}, \dots, x_{(m_k,k)}]^{\mathfrak{S}_{m_k}}$$

を考えれば, $(\bigotimes_{k=1}^r \mathbb{Z}[x_{(1,k)}, \dots, x_{(m_k,k)}]^{\mathfrak{S}_{m_k}}, \text{pr}_{\mathbf{m}', \mathbf{m}}(\mathbf{m}', \mathbf{m} \in \mathbb{Z}_{>0}^r))$ は射影系となる.

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し,

$$\left(\bigotimes_{k=1}^r \mathbb{Z}[x_{(1,k)}, \dots, x_{(m_k,k)}]^{\mathfrak{S}_{m_k}} \right)_n = \bigoplus_{\substack{(n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \\ n_1 + \dots + n_r = n}} \bigotimes_{k=1}^r \mathbb{Z}[x_{(1,k)}, \dots, x_{(m_k,k)}]_{n_k}^{\mathfrak{S}_{m_k}}$$

とすると、上記の射影系を用いて、

$$\bigotimes_{k=1}^r \mathbb{Z}[\mathbf{x}^{(k)}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x}^{(k)})} = \bigoplus_{n \geq 0} \lim_{\leftarrow \mathbf{m}} \left(\bigotimes_{k=1}^r \mathbb{Z}[x_{(1,k)}, \dots, x_{(m_k,k)}]^{\mathfrak{S}_{m_k}} \right)_n$$

となる。この射影系に対応するものを $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod}$ に対しても考えよう。 $\mathbf{m}' = (m'_1, \dots, m'_r) \in \mathbb{Z}_{>0}^r$ s.t. $m'_k \geq m_k$ を考えると、 $\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$ は、 $\mu_j^{(k)} = 0$ ($m_k < j \leq m'_k$) と思うことによって、 $\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}')$ の部分集合とみなせる。そこで、

$$1_{\mathbf{m}',\mathbf{m}} = \sum_{\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m}) \subset \Lambda_{n,r}(\mathbf{m}')} 1_{\mu} \in \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m}')$$

とおくと、 $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ の定義より、 $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m}) \cong 1_{\mathbf{m}',\mathbf{m}} \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m}') 1_{\mathbf{m}',\mathbf{m}}$ となる。このことより、完全関手

$$\Upsilon_{\mathbf{m}',\mathbf{m}} := 1_{\mathbf{m}',\mathbf{m}} \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m}') \otimes_{\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m}')}? : \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m}')\text{-mod} \rightarrow \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod}$$

が定まる。指標の定義より、以下の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m}')\text{-mod} & \xrightarrow{\Upsilon_{\mathbf{m}',\mathbf{m}}} & \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod} \\ \text{ch} \downarrow & & \downarrow \text{ch} \\ \left(\bigotimes_{k=1}^r \mathbb{Z}[x_{(1,k)}, \dots, x_{(m'_k,k)}]^{\mathfrak{S}_{m'_k}} \right)_n & \xrightarrow{\text{pr}_{\mathbf{m}',\mathbf{m}}} & \left(\bigotimes_{k=1}^r \mathbb{Z}[x_{(1,k)}, \dots, x_{(m_k,k)}]^{\mathfrak{S}_{m_k}} \right)_n \end{array}$$

この可換図式より、 $M \in \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod}$ に対し、その指標の帰納的極限 $\widehat{\text{ch}}M \in \bigotimes_{k=1}^r \mathbb{Z}[\mathbf{x}^{(k)}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x}^{(k)})}$ が定まる。

なお、 \mathbf{m} が条件 (A- \mathbf{m}) を満たす (よって \mathbf{m}' も満たす) とき、 $\Upsilon_{\mathbf{m}',\mathbf{m}}$ は、 $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m}')$ と $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ の間の圏同値を与える関手である。よって、加群圏を調べる上では、 $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{n})\text{-mod}$ (ここで $\mathbf{n} = (n, n, \dots, n) \in \mathbb{Z}_{>0}^r$) を考えれば十分である。

以下のことが分かっている。

定理 3.1 ([W2]).

- (i) $\lambda \in \Lambda_{n,r}^+$ に対し、 $\widehat{\text{ch}}\Delta(\lambda) = \sum_{\mu \in \Lambda_{n,r}^+} \beta_{\lambda\mu} \left(\bigotimes_{k=1}^r s_{\mu^{(k)}}(\mathbf{x}^{(k)}) \right)$ ($\beta_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$).
- (ii) (i) の $\beta_{\lambda\mu}$ に関して、 $\beta_{\lambda\lambda} = 1$ であり、 $\beta_{\lambda\mu} \neq 0$ ならば $\lambda \geq \mu$ が成り立つ。また、 $\beta_{\lambda\mu}$ は組み合わせ論 (*Littlewood-Richardson rule* の一般化) を用いて計算することができる。

$$(iii) \quad \widehat{\text{ch}} : K_0 \left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{n})\text{-mod} \right) \rightarrow \bigotimes_{k=1}^r \mathbb{Z}[\mathbf{x}_{(k)}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x}_{(k)})} \quad ([M] \mapsto \widehat{\text{ch}}M)$$

は *well-defined* である \mathbb{Z} -加群としての同型写像を与える。

特に, $\{\widehat{\text{ch}}\Delta(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda_{n,r}^+, n \geq 0\}$ は, $\bigotimes_{k=1}^r \mathbb{Z}[\mathbf{x}_{(k)}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x}_{(k)})}$ の \mathbb{Z} -自由基底を与える。

$$(iv)^* \quad \Lambda_{\geq 0,r}^+ = \bigcup_{n \geq 0} \Lambda_{n,r}^+ \quad \text{とおくとき, } \lambda, \mu \in \Lambda_{\geq 0,r}^+ \text{ に対し,}$$

$$\widehat{\text{ch}}\Delta(\lambda) \widehat{\text{ch}}\Delta(\mu) = \sum_{\nu \in \Lambda_{\geq 0,r}^+} \left(\prod_{k=1}^r \text{LR}_{\lambda^{(k)}\mu^{(k)}}^{\nu^{(k)}} \right) \widehat{\text{ch}}\Delta(\nu).$$

3.4. 誘導, 制限関手.

この節では, R は体であるとし, 以下の設定で考える:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}_{>0}^r \text{ s.t. } m_k \geq n+1 \text{ for } k=1, \dots, r, \\ \mathbf{m}' &= (m_1, \dots, m_{r-1}, m_r - 1). \end{aligned}$$

このとき, 単射

$$\begin{aligned} \gamma : \Lambda_{n,r}(\mathbf{m}') &\rightarrow \Lambda_{n+1,r}(\mathbf{m}) \text{ s.t. } (\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(r-1)}, \mu^{(r)}) \mapsto (\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(r-1)}, \widehat{\mu}^{(r)}), \\ \text{where } \widehat{\mu}^{(r)} &= (\mu_1^{(r)}, \mu_2^{(r)}, \dots, \mu_{m_r-1}^{(r)}, 1) \end{aligned}$$

によって, $\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}')$ は $\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$ の部分集合とみなせる。このとき, (単位元は共有しない) 代数としての単射準同型 $\iota : \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m}') \rightarrow \mathcal{S}_{n+1,r}(\mathbf{m})$ で, $1_\mu \mapsto 1_{\gamma(\mu)}$ ($\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m}')$) を満たすものが存在する (ι の具体的な定義は [W3] を参照)。定義より, $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m}')$ の単位元は, ι によって $\mathcal{S}_{n+1,r}(\mathbf{m})$ のベキ等元 $\xi = \sum_{\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m}')} 1_{\gamma(\mu)} \in \mathcal{S}_{n+1,r}(\mathbf{m})$ に移される。よって, $\mathcal{S}_{n+1,r}(\mathbf{m})\xi$ は, ι を通じて $(\mathcal{S}_{n+1,r}(\mathbf{m}), \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m}'))$ -両側加群となる。この, $(\mathcal{S}_{n+1,r}(\mathbf{m}), \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m}'))$ -両側加群 $\mathcal{S}_{n+1,r}(\mathbf{m})\xi$ を用いて, 関手

$$\text{Res}_n^{n+1}(\mathbf{m}) := \text{Hom}_{\mathcal{S}_{n+1,r}(\mathbf{m})}(\mathcal{S}_{n+1,r}(\mathbf{m})\xi, ?) : \mathcal{S}_{n+1,r}(\mathbf{m})\text{-mod} \rightarrow \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m}')\text{-mod}$$

$$\text{Ind}_n^{n+1}(\mathbf{m}) := \mathcal{S}_{n+1,r}(\mathbf{m})\xi \otimes_{\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m}')} ? : \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m}')\text{-mod} \rightarrow \mathcal{S}_{n+1,r}(\mathbf{m})\text{-mod}$$

を定めると, $\text{Ind}_n^{n+1}(\mathbf{m})$ は $\text{Res}_n^{n+1}(\mathbf{m})$ の左かつ右随伴関手であり, 特に, $\text{Ind}_n^{n+1}(\mathbf{m})$, $\text{Res}_n^{n+1}(\mathbf{m})$ は完全関手となる ([W3])。

ブロックへの射影を用いて, 関手 $\text{Res}_n^{n+1}(\mathbf{m})$, $\text{Ind}_n^{n+1}(\mathbf{m})$ を細分化するために, パラメータ $q \in R \setminus \{0\}$ に対し, 条件 (C-P) (in 3.2 節) を仮定しよう。

*[W2] では予想としていたが, 組み合わせ論的な議論で示せる。

$\mathbf{d} = (d_0, d_1, \dots, d_{e-1}) \in \mathbb{Z}^e$ に対し, 関手 $1_{\mathbf{d}} : \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m}')\text{-mod} \rightarrow \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m}')\text{-mod}$ を,

$$1_{\mathbf{d}} = \begin{cases} ((3.1) \text{ の対応で } \mathbf{d} \text{ に対応するブロックへの射影} & \text{if } \mathbf{d} \in R_{n,e}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

によって定める。関手 $1_{\mathbf{d}} : \mathcal{S}_{n+1,r}(\mathbf{m})\text{-mod} \rightarrow \mathcal{S}_{n+1,r}(\mathbf{m})\text{-mod}$ も同様に定める。また, $\mathbf{d} = (d_0, d_1, \dots, d_{e-1}) \in \mathbb{Z}^e$ と $0 \leq i \leq e-1$ に対し,

$$\mathbf{d} \pm i = (d_0, \dots, d_{i-1}, d_i \pm 1, d_{i+1}, \dots, d_{e-1})$$

とする。このとき, $i = 0, 1, \dots, e-1$ に対し,

$$\begin{aligned} i\text{-Res}_n^{n+1}(\mathbf{m}) &:= \bigoplus_{\mathbf{d} \in R_{n+1,e}} 1_{\mathbf{d}-i} \circ \text{Res}_n^{n+1}(\mathbf{m}) \circ 1_{\mathbf{d}}, \\ i\text{-Ind}_n^{n+1}(\mathbf{m}) &:= \bigoplus_{\mathbf{d} \in R_{n,e}} 1_{\mathbf{d}+i} \circ \text{Ind}_n^{n+1}(\mathbf{m}) \circ 1_{\mathbf{d}} \end{aligned}$$

と定めると, $i\text{-Ind}_n^{n+1}(\mathbf{m})$ は $i\text{-Res}_n^{n+1}(\mathbf{m})$ の左かつ右随伴関手であり,

$$\text{Res}_n^{n+1}(\mathbf{m}) = \bigoplus_{i=0}^{e-1} i\text{-Res}_n^{n+1}(\mathbf{m}), \quad \text{Ind}_n^{n+1}(\mathbf{m}) = \bigoplus_{i=0}^{e-1} i\text{-Ind}_n^{n+1}(\mathbf{m})$$

となる。これらを用いて, 関手

$$\begin{aligned} i\text{-Res}_n^{n+1} &: \mathcal{S}_{n+1,r}(\mathbf{n}+1)\text{-mod} \xrightarrow{i\text{-Res}_n^{n+1}(\mathbf{n}+1)} \mathcal{S}_{n,r}((\mathbf{n}+1)')\text{-mod} \xrightarrow{\Upsilon_{(\mathbf{n}+1)',\mathbf{n}}} \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{n})\text{-mod}, \\ i\text{-Ind}_n^{n+1} &: \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{n})\text{-mod} \xrightarrow{\Upsilon_{(\mathbf{n}+1)',\mathbf{n}}^{-1}} \mathcal{S}_{n,r}((\mathbf{n}+1)')\text{-mod} \xrightarrow{i\text{-Ind}_n^{n+1}(\mathbf{n}+1)} \mathcal{S}_{n+1,r}(\mathbf{n}+1)\text{-mod} \end{aligned}$$

を定め, $\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{n})\text{-mod}$ 上の自己関手 $i\text{-Res}$, $i\text{-Ind}$ を,

$$i\text{-Res} := \bigoplus_{n \geq 0} i\text{-Res}_n^{n+1}, \quad i\text{-Ind} := \bigoplus_{n \geq 0} i\text{-Ind}_n^{n+1}$$

と定めると, $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{n})$ ($n \geq 0$) の Weyl 加群に, これらの関手を施したものを調べることによって, 以下の定理を得る。

定理 3.2 ([W3]). R は体であるとし, 条件 (C-P) を仮定する。また, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{Z}^r$ とおく (Ariki-Koike 代数の定義 (よって $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ の定義) に用いたもの)。このとき, $e_i = [i\text{-Res}]$, $f_i = [i\text{-Ind}]$ ($0 \leq i \leq e-1$) とおくと, e_i, f_i は, $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0\left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{n})\text{-mod}\right)$ 上の, $\widehat{\mathfrak{sl}}_e$ の作用を定める (対応する Chevalley 生成元 e_i, f_i の作用を定める)。

さらに、線形空間としての同型

$$(3.2) \quad \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0 \left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{n})\text{-mod} \right) \xrightarrow{[\Delta(\lambda)] \mapsto |\lambda, \mathbf{s}|} \mathcal{F}_{e,r}[\mathbf{s}]$$

は、 $\widehat{\mathfrak{sl}}_e$ -加群としての同型を与える。

注意 3.3. 同型 (3.2) のもとで、 $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{n})$ の既約加群、tilting 加群がそれぞれ、 $\mathcal{F}_{e,r}[\mathbf{s}]$ の Uglov による標準基底 ([U]) と一致することが、[RSVV], [Lo], [SW] において独立に示されている。

§ 4. レベル 1 Fock 空間の圏化

この章では、 q -Schur 代数 ($r = 1$ の場合の cyclotomic q -Schur 代数) の加群圏 $\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{S}_{n,1}(n)\text{-mod}$ を用いて、レベル 1 Fock 空間 $\mathcal{F}_e[s]$ を圏化することを考える。既に、定理 3.2 (の $r = 1$ の場合) によって、 $\widehat{\mathfrak{sl}}_e$ -加群としての Fock 空間 $\mathcal{F}_e[s]$ の圏化は得られているので、 $\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{S}_{n,1}(n)\text{-mod}$ 上に \mathfrak{h} の作用を与える関手を定めることを考える。そのためには、 $\mathcal{S}_{n,1}(m)$ が、量子群 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の商代数であることを利用して、 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の表現論を利用する。

この章を通して、以下の事を仮定する；

- R は体である。
- $q \in R \setminus \{0\}$ は条件 (C-P) (in 3.2 節) を満たす。

4.1. q が 1 のベキ根の場合の量子群 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ とその表現.

$k \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し、 $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[\hat{q}, \hat{q}^{-1}]$ の元

$$[k] = \frac{\hat{q}^k - \hat{q}^{-k}}{\hat{q} - \hat{q}^{-1}}, \quad [t]! = [t][t-1] \dots [1], \quad [0]! = 1, \quad \begin{bmatrix} k \\ t \end{bmatrix} = \prod_{a=1}^t \frac{\hat{q}^{k-a+1} - \hat{q}^{-k+a-1}}{\hat{q}^a - \hat{q}^{-a}}$$

を考える。環準同型 $\mathcal{A} \rightarrow R$ ($\hat{q} \mapsto q$) における上の \mathcal{A} の元の像を、再び同じ記号で表す。

${}_{\mathcal{A}}U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ を

$$e_i^{(k)} := \frac{e_i^k}{[k]!}, \quad f_i^{(k)} := \frac{f_i^k}{[k]!}, \quad K_j^{\pm}, \quad \begin{bmatrix} K_j; 0 \\ t \end{bmatrix} := \prod_{a=1}^t \frac{K_j^+ \hat{q}^{-a+1} - K_j^- \hat{q}^{a-1}}{\hat{q}^a - \hat{q}^{-a}}$$

$(k, t \geq 1, 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq m)$

によって生成される $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ の \mathcal{A} -部分代数とし、 $U_q(\mathfrak{gl}_m) := R \otimes_{\mathcal{A}} {}_{\mathcal{A}}U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ とする。 $x \in {}_{\mathcal{A}}U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ に対し、 $1 \otimes x \in U_q(\mathfrak{gl}_m)$ も再び x で表すことにする。

$U_q(\mathfrak{gl}_m)$ -poly を $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の多項式表現のなす圏, つまり, 有限次元 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ -加群 M で,

$$M = \bigoplus_{\mu=(\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m} M_\mu, \text{ where } M_\mu = \left\{ v \in M \mid K_j^+ \cdot v = q^{\mu_j} v, \begin{bmatrix} K_j^+ & 0 \\ e \end{bmatrix} \cdot v = \begin{bmatrix} \mu_j \\ e \end{bmatrix} v \right\}$$

を満たすものからなる $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ -mod の充満部分圏とする。また, $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の n 次の多項式表現のなす圏, つまり, $M = \bigoplus_{\substack{\mu=(\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m \\ \mu_1 + \dots + \mu_m = n}} M_\mu$ を満たす $M \in U_q(\mathfrak{gl}_m)$ -mod からなる充満部分圏を $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ -poly ^{n} で表す。このとき,

$$U_q(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly} = \bigoplus_{n \geq 0} U_q(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly}^n$$

が成り立つ。

$U_q(\mathfrak{gl}_m)$ と $\mathcal{H}_{n,1}$ の間の Schur-Weyl 双対より導かれる, 代数としての全射準同型 $U_q(\mathfrak{gl}_m) \rightarrow \mathcal{S}_{n,1}(m)$ ([W1], [W5], [W7] 等を参照) を通じて, $\mathcal{S}_{n,1}(m)$ -加群を $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ -加群と思うことによって, 圏同値

$$(4.1) \quad U_q(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly}^n \cong \mathcal{S}_{n,1}(m)\text{-mod}$$

が得られる。この同値を通じて, 3.3 節で定義した $\mathcal{S}_{n,r}$ -加群の指標と, (§2 におけるものと同様に定義される) $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ -加群に対する指標とは一致する。このことに注意すれば, 定理 3.1 (iii) (あるいは同様な議論) より, 線型同型写像

$$\widehat{\text{ch}} : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0 \left(\bigoplus_{n \geq 0} U_q(\mathfrak{gl}_n)\text{-poly}^n \right) \rightarrow \mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})}$$

を得る。

truncation 関手

$$T_{ru} : U_q(\mathfrak{gl}_m)\text{-mod} \rightarrow U_q(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly}$$

を, $M \in U_q(\mathfrak{gl}_m)$ -mod に対し, 多項式表現であるような M の極大部分加群を $T_{ru}(M)$ とするものとして定める。

4.2. 量子 Frobenius 準同型とテンソル積定理. 簡単のために, 条件 (C-P) における $e \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し,

(C-P2): e は奇数, かつ $q^e = 1$ である.

と仮定する。この仮定は, R の中で $[k]$ や $\begin{bmatrix} k \\ t \end{bmatrix}$ を考える際に, “符号のズレ” が生じないための仮定であり, 実際には, その符号のズレを上手く調節すれば, e が偶数のときでも以下の主張と全く同じ主張が成り立つ。ここで言う “符号のズレ” とは,

$k = k_0 + ek_1, t = t_0 + et_1$ ($0 \leq k_0, t_0 \leq e-1, k_1, t_1 \geq 0$) に対し, R 中での関係式

$$[k] = \begin{cases} [k_0] & \text{if } q^e = 1, \\ (-1)^{k_1} [k_0] & \text{if } e : q^e = -1, \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} k \\ t \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \binom{k_1}{d_1} [k_0] \\ t_0 \end{bmatrix} & \text{if } e : \text{odd and } q^e = 1 \\ (-1)^{k_0 t_1 + k_1 t_0 + k_1 t_1 - t_1} \begin{bmatrix} \binom{k_1}{d_1} [k_0] \\ t_0 \end{bmatrix} & \text{if } e : \text{odd and } q^e = -1 \\ (-1)^{k_0 t_1 + k_1 t_0} \begin{bmatrix} \binom{k_1}{d_1} [k_0] \\ t_0 \end{bmatrix} & \text{if } e : \text{even and } q^e = -1 \end{cases}$$

の中に現れる符号のことである。

$U(\mathfrak{gl}_m)$ を一般線型 Lie 代数 \mathfrak{gl}_m の普遍包絡代数とし, その Chevalley 生成元を E_i, F_i, H_j ($1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq m$) で表す。また, $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, $E_i^{(k)} = E_i^k/k!$, $F_i^{(k)} = F_i^k/k!$ とし, $t \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, $\begin{pmatrix} H_j; 0 \\ t \end{pmatrix} = \prod_{a=1}^t \frac{H_j + 1 - a}{a}$ とおく。このとき, 以下の定理が成り立つ。

定理 4.1 ([Lu1], [Lu2]). $(C-P), (C-P2)$ を仮定する。このとき, 代数としての準同型写像

$$\text{Fr} : U_q(\mathfrak{gl}_m) \rightarrow U(\mathfrak{gl}_m)$$

$$\text{s.t. } e_i^{(k)} \mapsto \begin{cases} E_i^{(k/e)} & \text{if } e|k, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad f_i^{(k)} \mapsto \begin{cases} F_i^{(k/e)} & \text{if } e|k, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$K_j^\pm \mapsto 1, \quad \begin{bmatrix} K_j; 0 \\ t \end{bmatrix} \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} H_j; 0 \\ t/e \end{pmatrix} & \text{if } t = e|t, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

が存在する。

この定理の準同型写像 $\text{Fr} : U_q(\mathfrak{gl}_m) \rightarrow U(\mathfrak{gl}_m)$ のことを, **量子 Frobenius 準同型** という。

良く知られているように, $U(\mathfrak{gl}_m)$ の有限次元既約多項式表現は, Weyl 加群 $W(\lambda)$ ($\lambda \vdash n$ ($n \geq 0$) s.t. $\ell(\lambda) \leq m$) (i.e. $W(\lambda)$ は λ を最高ウェイトとする最高ウェイト既約加群) によって与えられ, その指標はやはり Schur 多項式 $s_\lambda(x_1, \dots, x_m)$ で与えられる (Weyl の指標公式)。 $M \in U(\mathfrak{gl}_m)\text{-mod}$ を, 量子 Frobenius 準同型 $\text{Fr} : U_q(\mathfrak{gl}_m) \rightarrow U(\mathfrak{gl}_m)$ を通じて $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ -加群と思ったものを M^{Fr} と表すことにす

ると, $\text{ch } W(\lambda) = s_\lambda(x_1, \dots, x_m)$ であることと, Fr の定義より,

$$(4.2) \quad \text{ch } W(\lambda)^{\text{Fr}} = s_\lambda(x_1^e, x_2^e, \dots, x_m^e)$$

となることが分かる。

分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)})$ が e -restricted であるとは, 全ての $i = 1, \dots, \ell(\lambda)$ に対し, $\lambda_i - \lambda_{i+1} < e$ が成り立つことである。すると, 勝手な分割 λ は, $\lambda = \lambda' + e\lambda''$ (λ' は e -restricted) の形に一意的に表すことが出来る。

定理 4.2 ([Lu1]). $(C-P)$, $(C-P2)$ を仮定する。このとき, 以下のことが成り立つ。

(i) $\ell(\lambda) \leq m$ である分割 λ に対し, $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ -加群としての同型

$$L(e\lambda) \cong W(\lambda)^{\text{Fr}}$$

が成り立つ。よって, $\text{ch } L(e\lambda) = s_\lambda(x_1^e, x_2^e, \dots, x_m^e)$ を得る。

(ii) 分割 λ を $\lambda = \lambda' + e\lambda''$ ($\lambda' : e$ -restricted) と表すとき, $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ -加群としての同型

$$L(\lambda) \cong L(\lambda') \otimes_R L(e\lambda'') \cong L(\lambda') \otimes_F W(\lambda'')^{\text{Fr}}$$

が成り立つ。よって, $\text{ch } L(\lambda) = s_{\lambda''}(x_1^e, \dots, x_m^e) \text{ch } L(\lambda')$ を得る。

注意 4.3. 定理 4.1, 定理 4.2 は, 符号の調整を行えば, $(CP-2)$ の仮定なしに成り立つ ([Lu2] 参照)。以下では, $(CP-2)$ の仮定なしに, (符号の調整を行った) 定理 4.1, 定理 4.2 を認める。

4.3. レベル 1 Fock 空間の圏化。

$U_q(\mathfrak{gl}_m)$ には, $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ から誘導される Hopf 代数の構造がある。よって, それを用いて $U_q(\mathfrak{g})$ -加群に対しても, テンソル積表現や双対表現を考えることが出来る。

$m \geq n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\lambda \vdash k$ に対し, 関手 $\mathfrak{B}_{m,n;\lambda}$, $\mathfrak{B}'_{m,n;\lambda}$ を,

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{m,n;\lambda} &: U_q(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly}^n \xrightarrow{\Upsilon_{m+ek,m}^{-1}} U_q(\mathfrak{gl}_{m+ek})\text{-poly}^n \xrightarrow{? \otimes_R L(e\lambda)} U_q(\mathfrak{gl}_{m+ek})\text{-poly}^{n+ek} \\ \mathfrak{B}'_{m,n;\lambda} &: U_q(\mathfrak{gl}_{m+ek})\text{-poly}^{n+ek} \xrightarrow{\text{Tru} \circ (? \otimes_R L(e\lambda)^*)} U_q(\mathfrak{gl}_{m+ek})\text{-poly}^n \xrightarrow{\Upsilon_{m+ek,m}} U_q(\mathfrak{gl}_m)\text{-poly}^n \end{aligned}$$

と定義すれば, これらは完全関手であり, $\mathfrak{B}'_{m,n;\lambda}$ は $\mathfrak{B}_{m,n;\lambda}$ の右随伴関手である。また, (§2 での議論と同様に) これらの関手は射影系と整合的である。そこで, $\lambda \vdash k$ に対し, $\bigoplus_{n \geq 0} U_q(\mathfrak{gl}_n)\text{-poly}^n$ 上の自己関手 \mathfrak{B}_λ , \mathfrak{B}'_λ をそれぞれ,

$$\mathfrak{B}_\lambda := \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{B}_{n,n;\lambda}, \quad \mathfrak{B}'_\lambda := \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{B}'_{n,n;\lambda}$$

によって定めると, それぞれ完全関手であり, \mathfrak{B}'_λ は \mathfrak{B}_λ の右随伴関手となる。

定理 4.2 (i) と射影系と整合的であることに注意すれば, $M \in U_q(\mathfrak{gl}_n)\text{-poly}^n$, $\lambda \vdash k$ に対し,

$$\widehat{\text{ch}}([\mathfrak{B}_\lambda(M)]) = \widehat{\text{ch}}([\Upsilon_{n+ek,n}^{-1}(M) \otimes_F L(e\lambda)]) = s_\lambda(\mathbf{x}^e) \widehat{\text{ch}}([M])$$

となるので, 線型同型 $\widehat{\text{ch}}: \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(\bigoplus_{n \geq 0} U_q(\mathfrak{gl}_n)\text{-poly}^n) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})}$ の下で, $[\mathfrak{B}_\lambda]$ は $s_\lambda(\mathbf{x}^e)$ を掛けるという作用素に対応する。つまり, $[\mathfrak{B}_\lambda] = b_{s_\lambda(\mathbf{x}^e)}$ である。

また, $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(\bigoplus_{n \geq 0} U_q(\mathfrak{gl}_n)\text{-poly}^n)$ 上の双線形形式 \langle, \rangle を,

$$(4.3) \quad \langle [M], [N] \rangle := \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim \text{Ext}^i(M, N)$$

と定める。ここで, $U_q(\mathfrak{gl}_n)\text{-poly}^n$ は最高ウェイト圏 ($\mathcal{S}_{n,r}(n)$ は quasi-hereditary 代数) であることが知られているので, その大域次元は有限であることから, (4.3) の右辺は有限和となることに注意しよう。また, $\{\Delta(\lambda) \mid \lambda \vdash n\}$ が $U_q(\mathfrak{gl}_n)\text{-poly}^n$ の standard 加群の集合を与えることに注意し, $\lambda \vdash n$ に対し $\nabla(\lambda)$ を対応する costandard 加群とすれば, $\text{ch } \Delta(\lambda) = \text{ch } \nabla(\lambda) = s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ であり, さらに, 最高ウェイト圏の性質より, $\langle \Delta(\lambda), \nabla(\mu) \rangle = \delta_{\lambda\mu}$ となることに注意すれば, 線型同型 $\widehat{\text{ch}}: \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(\bigoplus_{n \geq 0} U_q(\mathfrak{gl}_n)\text{-poly}^n) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})}$ の下で, (4.3) で定義した双線形形式と, $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})}$ 上の双線形形式 \langle, \rangle とは一致することが分かる。さらに, \mathfrak{B}'_λ は \mathfrak{B}_λ の右随伴関手であることから,

$$\begin{aligned} \langle [\mathfrak{B}_\lambda(M)], [N] \rangle &= \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim \text{Ext}^i(\mathfrak{B}_\lambda(M), N) \\ &= \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim \text{Ext}^i(M, \mathfrak{B}'_\lambda(N)) \\ &= \langle [M], [\mathfrak{B}'_\lambda(N)] \rangle \end{aligned}$$

を得るので, $[\mathfrak{B}'_\lambda]$ は $[\mathfrak{B}_\lambda]$ の \langle, \rangle に関する随伴である。よって, $[\mathfrak{B}'_\lambda] = D_{b_{s_\lambda(\mathbf{x}^e)}}$ を得る。

圏の同値 (4.1) に注意して, 以上のことと定理 3.2 を合わせると, 以下の定理を得る。

定理 4.4. ($C-P$) を仮定する。

- (i) $[i\text{-Res}], [i\text{-Ind}]$ ($0 \leq i \leq e-1$) は, $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{S}_{n,1}(n)\text{-mod})$ 上に $\widehat{\mathfrak{sl}}_e$ の作用を定める。
- (ii) $[\mathfrak{B}_\lambda], [\mathfrak{B}'_\lambda]$ ($\lambda \vdash k, k > 0$) は, $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{S}_{n,1}(n)\text{-mod})$ 上に \mathfrak{h} の作用を定める。

(iii) 線型同型写像

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0 \left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{S}_{n,1}(n)\text{-mod} \right) \xrightarrow{\widehat{\text{ch}}} (\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x})})^{\xi_e} \xrightarrow{s_\lambda(\mathbf{x}) \mapsto |\lambda, s|} \mathcal{F}_e[s]$$

は $\widehat{\mathfrak{sl}}_e \otimes \mathfrak{h}$ -加群としての同型写像を与える。ここで、 $\lambda \vdash n$ ($n \geq 0$) に対し、

$$\widehat{\text{ch}}[\Delta(\lambda)] = s_\lambda(\mathbf{x})$$

である。また、この同型の下で、作用素として $e_i = [i\text{-Res}]$, $f_i = [i\text{-Ind}]$, $b_{s_\lambda(\mathbf{x}^e)} = [\mathfrak{B}_\lambda]$, $D_{b_{s_\lambda(\mathbf{x}^e)}} = [\mathfrak{B}'_\lambda]$ となる。

§ 5. レベル r Fock 空間の圏化に向けて

定理 3.2 によって、cyclotomic q -Schur 代数の加群圏 $\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{n})\text{-mod}$ を用いて、 $\widehat{\mathfrak{sl}}_e$ -加群としてのレベル r Fock 空間 $\mathcal{F}_{e,r}[s]$ の圏化は得られているので、 $\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{n})\text{-mod}$ 上に \mathfrak{h} の作用を与える関手を定めたい。レベル 1 のときは、前章でみたように、 q -Schur 代数が量子群 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の商代数であることを利用して、 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の Hopf 代数の構造と、量子 Frobenius 準同型を用いて、そのような関手を与えた。一般の cyclotomic q -Schur 代数についてもそのようなことを考えたい。

$r \geq 2$ の場合の cyclotomic q -Schur 代数は、量子群の商代数になっているわけではないので、その表現を調べる際に、($r = 1$ の場合のように) 量子群の構造を用いることはできない。しかし、[DR] によって、 $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ は、(弱い意味での) 三角分解を持つことと、上下の Borel 部分代数は、 q -Schur 代数の Borel 部分代数 (量子群 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の Borel 部分代数の商) と同型であることが示されていることを利用して、[W1] - [W4] で、“量子群っぽい代数” の商代数として $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ を実現し、 $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ の表現を調べてきた。ここでは最近調べている [W4] で導入した代数 \mathcal{U}_q を用いて議論する。なお、[W4] はプレプリントすらまだ世に出てないが、[W8] に簡単な解説がある。

5.1. 代数 $\mathcal{U}_{q,s}(\mathbf{m})$.

まず、記号を準備する。 $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}_{>0}^r$ を取り、 $m = \sum_{k=1}^r m_k$ とおく。また、 $\Gamma(\mathbf{m}) = \{(i, k) \mid 1 \leq i \leq m_k, 1 \leq k \leq r\}$ とし、 $\Gamma'(\mathbf{m}) = \Gamma(\mathbf{m}) \setminus \{(m_r, r)\}$ とおく。 $\Gamma(\mathbf{m})$ は以下の全単射によって、集合 $\{1, 2, \dots, m\}$ と同一視できる；

$$\Gamma(\mathbf{m}) \rightarrow \{1, 2, \dots, m\} \text{ s.t. } (i, k) \mapsto \sum_{j=1}^{k-1} m_j + i.$$

つまり、 $\Gamma(\mathbf{m})$ は、 $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r)$ に沿って、集合 $\{1, 2, \dots, m\}$ を順に r 個に分割したものである。この対応により、 $\Gamma'(\mathbf{m})$ は集合 $\{1, 2, \dots, m-1\}$ と同一視される。この同一視の下で、例えば $(m_k + 1, k) = (1, k+1)$ 等と考える。

この対応によって, \mathfrak{gl}_m の weight lattice, dual weight lattice, root lattice は,

$$P = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}\varepsilon_i = \bigoplus_{(i,k) \in \Gamma(\mathbf{m})} \mathbb{Z}\varepsilon_{(i,k)}, \quad P^\vee = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}h_i = \bigoplus_{(i,k) \in \Gamma(\mathbf{m})} \mathbb{Z}h_{(i,k)},$$

$$Q = \bigoplus_{i=1}^{m-1} \mathbb{Z}\alpha_i = \bigoplus_{(i,k) \in \Gamma'(\mathbf{m})} \mathbb{Z}\alpha_{(i,k)}$$

と表せる。このとき, $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ を定義する際に用いた集合 $\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$ は, 単射

$$\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}) \rightarrow P \text{ s.t. } \mu \mapsto \sum_{(i,k) \in \Gamma(\mathbf{m})} \mu_i^{(k)} \varepsilon_{(i,k)}$$

によって, P の部分集合とみなせる。また, $\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$ を P の部分集合とみなした時に, P 上の支配的順序が, $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ の quasi-hereditary 代数の構造を定める半順序を与えていることに注意しよう。

定義 5.1. $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{Z}^r$ に対し, $\mathcal{U}_{\hat{q},\mathbf{s}}(\mathbf{m})$ は, 以下の生成元と基本関係式で定義される $\mathbb{Q}(\hat{q})$ 上の単位元を持った結合代数である;

生成元: $\mathcal{X}_{(i,k),t}^\pm ((i,k) \in \Gamma'(\mathbf{m}), t \geq 0)$, $\mathcal{K}_{(j,l)}^\pm$, $\mathcal{H}_{(j,l),t}^\pm$, $\mathcal{I}_{(j,l),t}^\pm ((j,l) \in \Gamma(\mathbf{m}), t \geq 0)$.

基本関係式:

$$(5.1) \quad \mathcal{K}_{(j,l)}^+ \mathcal{K}_{(j,l)}^- = \mathcal{K}_{(j,l)}^- \mathcal{K}_{(j,l)}^+ = 1, \quad \mathcal{H}_{(j,l),0}^\pm = 1,$$

$$(5.2) \quad [\mathcal{K}_{(i,k)}^\varepsilon, \mathcal{K}_{(j,l)}^{\varepsilon'}] = [\mathcal{K}_{(i,k)}^\varepsilon, \mathcal{H}_{(j,l),t}^{\varepsilon'}] = [\mathcal{K}_{(i,k)}^\varepsilon, \mathcal{I}_{(j,l),t}^{\varepsilon'}] = [\mathcal{H}_{(i,k),s}^\varepsilon, \mathcal{H}_{(j,l),t}^{\varepsilon'}]$$

$$= [\mathcal{H}_{(i,k),s}^\varepsilon, \mathcal{I}_{(j,l),t}^{\varepsilon'}] = [\mathcal{H}_{(i,k),s}^\varepsilon, \mathcal{I}_{(j,l),t}^{\varepsilon'}] = 0 \quad (\varepsilon, \varepsilon' \in \{+, -\})$$

$$(5.3) \quad [t+1] \hat{q}^{-t} \mathcal{I}_{(j,l),t+1}^\pm = \sum_{z=0}^t (-1)^z \hat{q}^{-z} (\hat{q} - \hat{q}^{-1})^z \mathcal{I}_{(j,l),t-z}^\pm \mathcal{H}_{(j,l),z+1}^\pm,$$

$$(5.4) \quad \mathcal{K}_{(j,l)}^+ \mathcal{X}_{(i,k),t}^\pm \mathcal{K}_{(j,l)}^- = \hat{q}^{\pm(\alpha_{(i,k)}, h_{(j,l)})} \mathcal{X}_{(i,k),t}^\pm,$$

$$(5.5) \quad [\mathcal{H}_{(j,l),s+1}^+, \mathcal{X}_{(i,k),t}^\pm] = \hat{q}^{\pm(\alpha_{(i,k)}, h_{(j,l)})} \mathcal{H}_{(j,l),s}^+ \mathcal{X}_{(i,k),t+1}^\pm - \hat{q}^{\mp(\alpha_{(i,k)}, h_{(j,l)})} \mathcal{X}_{(i,k),t+1}^\pm \mathcal{H}_{(j,l),s}^+,$$

$$(5.6) \quad [\mathcal{H}_{(j,l),s+1}^-, \mathcal{X}_{(i,k),t}^\pm] = \hat{q}^{\mp(\alpha_{(i,k)}, h_{(j,l)})} \mathcal{H}_{(j,l),s}^- \mathcal{X}_{(i,k),t+1}^\pm - \hat{q}^{\pm(\alpha_{(i,k)}, h_{(j,l)})} \mathcal{X}_{(i,k),t+1}^\pm \mathcal{H}_{(j,l),s}^-,$$

$$(5.7) \quad [\mathcal{X}_{(i,k),t}^+, \mathcal{X}_{(j,l),s}^-] = \delta_{(i,k),(j,l)} \begin{cases} \frac{\tilde{\mathcal{K}}_{(i,k)}^+ \tilde{\mathcal{H}}_{(i,k),s+t} - \delta_{s+t,0} \tilde{\mathcal{K}}_{(i,k)}^-}{\hat{q} - \hat{q}^{-1}} & \text{if } i \neq m_k, \\ -(\hat{q}^2)^{s_{k+1}} \frac{\tilde{\mathcal{K}}_{(m_k,k)}^+ \tilde{\mathcal{H}}_{(m_k,k),s+t} - \delta_{s+t,0} \tilde{\mathcal{K}}_{(m_k,k)}^-}{\hat{q} - \hat{q}^{-1}} & \text{if } i = m_k, \\ +\tilde{\mathcal{K}}_{(m_k,k)} \tilde{\mathcal{H}}_{(m_k,k),s+t+1} & \end{cases}$$

$$(5.8) \quad [\mathcal{X}_{(i,k),t}^{\pm}, \mathcal{X}_{(j,l),s}^{\pm}] = 0 \quad \text{if } (j,l) \neq (i,k), (i \pm 1, k),$$

$$(5.9) \quad \mathcal{X}_{(i \pm 1, k), 0}^+ (\mathcal{X}_{(i,k), 0}^+)^2 - (\hat{q} + \hat{q}^{-1}) \mathcal{X}_{(i,k), 0}^+ \mathcal{X}_{(i \pm 1, k), 0}^+ \mathcal{X}_{(i,k), 0}^+ + (\mathcal{X}_{(i,k), 0}^+)^2 \mathcal{X}_{(i \pm 1, k), 0}^+ = 0,$$

$$(5.10) \quad \mathcal{X}_{(i \pm 1, k), 0}^- (\mathcal{X}_{(i,k), 0}^-)^2 - (\hat{q} + \hat{q}^{-1}) \mathcal{X}_{(i,k), 0}^- \mathcal{X}_{(i \pm 1, k), 0}^- \mathcal{X}_{(i,k), 0}^- + (\mathcal{X}_{(i,k), 0}^-)^2 \mathcal{X}_{(i \pm 1, k), 0}^- = 0,$$

$$(5.11) \quad \mathcal{X}_{(i,k), t+1}^{\pm} \mathcal{X}_{(i,k), s}^{\pm} - \hat{q}^{\pm 2} \mathcal{X}_{(i,k), s}^{\pm} \mathcal{X}_{(i,k), t+1}^{\pm} = \hat{q}^{\pm 2} \mathcal{X}_{(i,k), t}^{\pm} \mathcal{X}_{(i,k), s+1}^{\pm} - \mathcal{X}_{(i,k), s+1}^{\pm} \mathcal{X}_{(i,k), t}^{\pm},$$

ここで,

$$\tilde{\mathcal{K}}_{(i,k)}^+ = \mathcal{K}_{(i,k)}^+ \mathcal{K}_{(i+1,k)}^-, \quad \tilde{\mathcal{K}}_{(i,k)}^- = \mathcal{K}_{(i,k)}^- \mathcal{K}_{(i+1,k)}^+, \quad \tilde{\mathcal{H}}_{(i,k), t} = \sum_{h=0}^t \hat{q}^{-t+2h} \mathcal{H}_{(i,k), t-h}^+ \mathcal{H}_{(i+1,k), h}^-$$

である。

$\mathcal{A} = \mathbb{Z}[\hat{q}, \hat{q}^{-1}][(\hat{q} - \hat{q}^{-1})^{-1}] \subset \mathbb{Q}(\hat{q})$ とおき, $\mathcal{A}\mathcal{U}_{\hat{q}, s}(\mathbf{m})$ を,

$$\mathcal{X}_{(i,k), t}^{\pm(d)} := \frac{(\mathcal{X}_{(i,k), t}^{\pm})^d}{[d]!}, \quad \mathcal{K}_{(j,l)}^{\pm}, \quad \mathcal{H}_{(j,l), t}^{\pm}, \quad \mathcal{I}_{(j,l), t}^{\pm},$$

$$\left[\mathcal{K}_{(j,l); 0} \right] := \prod_{a=1}^d \frac{\mathcal{K}_{(j,l)}^+ \hat{q}^{-a+1} - \mathcal{K}_{(j,l)}^- \hat{q}^{a-1}}{\hat{q}^a - \hat{q}^{-a}}, \quad \left[\tilde{\mathcal{K}}_{(j,l); 0} \right] := \prod_{a=1}^d \frac{\tilde{\mathcal{K}}_{(j,l)}^+ \hat{q}^{-a+1} - \tilde{\mathcal{K}}_{(j,l)}^- \hat{q}^{a-1}}{\hat{q}^a - \hat{q}^{-a}},$$

$$((i,k) \in \Gamma'(\mathbf{m}), (j,l) \in \Gamma(\mathbf{m}), d, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

によって生成される $\mathcal{U}_{\hat{q}, s}(\mathbf{m})$ の \mathcal{A} -部分代数とする。

体 R と $q \in R$ ($q \neq 0, q^2 \neq 1$) に対し, 環準同型 $\mathcal{A} \rightarrow R$ ($\hat{q} \mapsto q$) を通じた $\mathcal{A}\mathcal{U}_{\hat{q}, s}(\mathbf{m})$ の特殊化を, $\mathcal{U}_{q, s}(\mathbf{m}) := R \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}\mathcal{U}_{\hat{q}, s}(\mathbf{m})$ とおく。 $x \in \mathcal{A}\mathcal{U}_{\hat{q}, s}(\mathbf{m})$ に対し, $1 \otimes x \in \mathcal{U}_{q, s}(\mathbf{m})$ も単に x で表すことにする。以下, 必要のない限り, $\mathcal{U}_{q, s}(\mathbf{m})$ を単に \mathcal{U}_q と表す。このとき, 以下のことが成り立つ。

定理 5.2 ([W4]). 代数としての全射準同型写像

$$\rho : \mathcal{U}_{q, s}(\mathbf{m}) \rightarrow \mathcal{S}_{n, r}(\mathbf{m})$$

が存在する。

注意 5.3. $\mathcal{A}\mathcal{U}_{\hat{q}, s}(\mathbf{m})$ の中で, $\mathcal{H}_{(i,k), s}^{\pm}$ は $\mathcal{I}_{(j,l), t}^{\pm}$ ($(j,l) \in \Gamma(\mathbf{m}), t \geq 0$) 達の積の線形和で表されることが示せるので, $\mathcal{A}\mathcal{U}_{\hat{q}, s}(\mathbf{m})$ (よって $\mathcal{U}_{q, s}(\mathbf{m})$) の生成元としては, (実際には) $\mathcal{H}_{(i,k), s}^{\pm}$ は必要ない。ただし, $\mathcal{U}_{q, s}(\mathbf{m})$ を定義する際に $\mathcal{H}_{(i,k), s}^{\pm}$ を使った方が関係式を簡単にかけるので, これらも生成元に加えている。

逆に, $\mathcal{U}_{\hat{q},s}(\mathbf{m})$ の中では, $\mathcal{I}_{(j,l),t}^{\pm}$ を $\mathcal{H}_{(i,k),s}^{\pm}$ 達を用いて表すことが出来るが, $\mathcal{U}_{\hat{q},s}(\mathbf{m})$ の中では不可能である (\hat{q} -整数 $[d]$ ($d \in \mathbb{Z}_{>0}$) が分母に出てきてしまう)。

5.2. \mathcal{U}_q の表現論.

\mathcal{U}_q^+ (resp. \mathcal{U}_q^-) を, $\mathcal{X}_{(i,k),t}^{+(d)}$ (resp. $\mathcal{X}_{(i,k),t}^{-(d)}$) ($(i,k) \in \Gamma'(\mathbf{m})$, $d, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) によって生成される \mathcal{U}_q の部分代数とする。また, \mathcal{U}_q^0 を, $\mathcal{K}_{(j,l)}^{\pm}$, $\left[\mathcal{K}_{(j,l)}^{(d)}; 0 \right]$, $\left[\tilde{\mathcal{K}}_{(j,l)}^{(d)}; 0 \right]$, $\mathcal{I}_{(j,l),t}^{\pm}$ ($(j,l) \in \Gamma(\mathbf{m})$, $d, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) で生成される \mathcal{U}_q の部分代数とする。

予想 1. (弱い意味での) 三角分解

$$\mathcal{U}_q = \mathcal{U}_q^- \cdot \mathcal{U}_q^0 \cdot \mathcal{U}_q^+$$

が成り立つ。

注意 5.4. q が 1 のべき根でないときは, \mathcal{U}_q の中で, $\mathcal{X}_{(i,k),t}^{\pm(d)} = [d]!(\mathcal{X}_{(i,k),t}^{\pm})^d$ となるので, 関係式 (5.1)-(5.11) を用いて, 予想 1 を示すことが出来る。 q が 1 のべき根の場合 (今回興味がある場合) q -整数 $[d]$ が 0 になってしまうものがあるため, divided power $\mathcal{X}_{(i,k),t}^{\pm(d)}$ と他の生成元達との交換関係を計算する必要があるが, そこがまだ出来ていないために, 予想となっている。仮に, 予想が正しくなくても, 全射 $\rho: \mathcal{U}_q \rightarrow \mathcal{S}_{n,r}$ の像の中では三角分解が成り立つことが分かっているので, 適切な関係式で割ることによって, 以下の議論は成立するので, それほど深刻な問題ではない。

(♣) 以下, 予想 1 を仮定する。

三角分解を利用して, 量子群の場合と同様に, 最高ウェイト加群の概念を導入しよう。

定義 5.5. \mathcal{U}_q -加群 M が最高ウェイト加群であるとは, ある元 $v_0 \in M$ が存在して, 以下の (i)-(iii) を満たすものとして定義する;

- (i) M は \mathcal{U}_q -加群として v_0 によって生成される。
 - (ii) 任意の $(i,k) \in \Gamma'(\mathbf{m})$, $d, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, $\mathcal{X}_{(i,k),t}^{+(d)} \cdot v_0 = 0$ である。
 - (iii) v_0 は \mathcal{U}^0 の作用に関する同時固有ベクトルである。
- さらに, ある $\lambda = \sum_{(j,l) \in \Gamma(\mathbf{m})} \lambda_j^{(l)} \varepsilon_{(j,l)} \in P$ が取れて,

$$\mathcal{K}_{(j,l)}^+ \cdot v_0 = q^{\lambda_j^{(l)}} v_0, \quad \left[\mathcal{K}_{(j,l)}^{(d)}; 0 \right] \cdot v_0 = \left[\lambda_j^{(l)} \right] v_0, \quad \left[\tilde{\mathcal{K}}_{(j,l)}^{(d)}; 0 \right] \cdot v_0 = \left[\lambda_j^{(l)} - \lambda_{j+1}^{(l)} \right] v_0,$$

となる。

このとき, $\varphi = (\varphi_{(j,l),t}^{\pm})_{(j,l) \in \Gamma(\mathbf{m}), t \geq 1}$ を $\mathcal{I}_{(j,l),t}^{\pm} \cdot v_0 = \varphi_{(j,l),t}^{\pm} v_0$ によって定め, M (resp. v_0) を最高ウェイト (λ, φ) の最高ウェイト加群 (resp. 最高ウェイトベクトル)

と呼ぶ。

Lie 環や量子群の場合と同様に, (λ, φ) に対し, (λ, φ) を最高ウェイトとする, 普遍的な最高ウェイト加群 (Verma 加群) $M(\lambda, \varphi)$ を構成することができ, 任意の最高ウェイト加群は Verma 加群の商加群と同型になる。また, $M(\lambda, \varphi)$ は, 一意的な極大部分加群 $\text{rad } M(\lambda, \varphi)$ を持ち, 最高ウェイトが (λ, φ) である既約最高ウェイト加群は $L(\lambda, \varphi) := M(\lambda, \varphi) / \text{rad } M(\lambda, \varphi)$ と同型となる。有限次元既約最高ウェイト加群に対し, 以下のことが成り立つ。

補題 5.6. $\lambda \in P$ に対し, 既約最高ウェイト加群 $L(\lambda, \varphi)$ が有限次元ならば, 各 $k = 1, 2, \dots, r$ に対し, $\lambda_1^{(k)} \geq \lambda_2^{(k)} \geq \dots \geq \lambda_{m_k}^{(k)}$ が成り立つ。

注意 5.7. $L(\lambda, \varphi)$ が有限次元となるための φ の条件については (q が 1 のべき根でない場合でさえ) よく分かっていない。

問題: $L(\lambda, \varphi)$ が有限次元であるための必要十分条件を与えよ。

さて, $r = 1$ の場合は, $\mathcal{S}_{n,1}(m)$ -mod は $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の n 次多項式表現のなす圏 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ -polyⁿ と同値であった。 $r \geq 2$ の場合, このように $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ -mod と一致するような U_q -mod の充満部分圏の特徴付けは分かっていないが, “多項式表現” に対応する U_q -mod の充満部分圏を考えることはできる。

定義 5.8. U_q -mod の充満部分圏 U_q -poly を, 以下の (i) - (iii) を満たすものとして定義する;

(i) $M \in U_q$ -poly は有限次元。

(ii) $P_{\geq 0} := \bigoplus_{(j,l) \in \Gamma(\mathbf{m})} \mathbb{Z}_{\geq 0} \varepsilon_{(j,l)} \subset P$ とするとき, $M \in U_q$ -poly はウェイト空間分解

$$M = \bigoplus_{\mu \in P_{\geq 0}} M_\mu, \quad \text{where } M_\mu = \left\{ v \in M \mid \begin{array}{l} \mathcal{K}_{(j,l)}^+ \cdot v = q^{\mu_j^{(l)}} v, \quad \left[\begin{array}{c} \mathcal{K}_{(j,l)} \\ d \end{array}; 0 \right] \cdot v = \left[\begin{array}{c} \lambda_j^{(l)} \\ d \end{array} \right] v, \\ \left[\begin{array}{c} \tilde{\mathcal{K}}_{(j,l)} \\ d \end{array}; 0 \right] \cdot v = \left[\begin{array}{c} \lambda_j^{(l)} - \lambda_{j+1}^{(l)} \\ d \end{array} \right] v \end{array} \right\}$$

を持つ。

(iii) $M \in U_q$ -poly に対し, U^0 の M 上の作用に関する固有値は全て R に含まれる。

このとき, 量子群の場合と同様にして, 以下のことが示せる。

補題 5.9. U_q -poly に属する既約加群はある最高ウェイト既約加群 $L(\lambda, \varphi)$ と同型である。

問題: $L(\lambda, \varphi)$ が U_q -poly に属するための必要十分条件を与えよ。

量子群の場合と同様に, truncation 関手

$$T_{ru} : \mathcal{U}_q\text{-mod} \rightarrow \mathcal{U}_q\text{-poly}$$

を $M \in \mathcal{U}_q\text{-mod}$ に対し, $\mathcal{U}_q\text{-poly}$ に属するような M の極大部分加群を $T_{ru}(M)$ とするものとして定める。

全射準同型 $\rho : \mathcal{U}_q \rightarrow \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ を通じて, 以下のことが分かる。

定理 5.10 ([W4]).

- (i) $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod}$ は $\mathcal{U}_q\text{-poly}$ の充満部分圏である。
- (ii) $\lambda \in \Lambda_{n,r}^+$ に対し, $\Delta(\lambda) \in \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod}$ (resp. $L(\lambda) \in \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod}$) は, $\rho : \mathcal{U}_q \rightarrow \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ を通じて, (λ, φ) を最高ウェイトとする最高ウェイト加群である。ここで, $\varphi = (\varphi_{(j,l),t}^\pm)_{(j,l) \in \Gamma(\mathbf{m}), t \geq 1}$ は,

$$\begin{aligned} \varphi_{(j,l),t}^+ &= (q^2)^{t(1-j+sl)} q^{(\lambda_j^{(l)}-1)t} \begin{bmatrix} \lambda_j^{(l)} \\ t \end{bmatrix}, \\ \varphi_{(j,l),t}^- &= (-1)^t (q^2)^{t(1-j+sl)} q^{(\lambda_j^{(l)}-1)t} \begin{bmatrix} \lambda_j^{(l)} + t - 1 \\ t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である。

5.3. 量子 Frobenius 準同型とテンソル積定理.

この節では, パラメータ q に対し条件 (C-P) (in 3.2 節) と (C-P2) (in 4.2 節) を仮定する。条件 (C-P2) は, 量子群の場合と同様に “符号のズレ” が生じないためのものであり, 本質的ではない。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{gl}_{m_r}$ を \mathfrak{gl}_m の Levi 部分代数とし, $U(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{gl}_{m_1}) \otimes \cdots \otimes U(\mathfrak{gl}_{m_r})$ を \mathfrak{g} の普遍包絡代数とする。また, 各 $k = 1, \dots, r$ に対し, $E_{(i,k)}, F_{(i,k)}, H_{(j,k)}$ ($1 \leq i \leq m_k - 1, 1 \leq j \leq m_k$) を $U(\mathfrak{gl}_{m_k})$ に対応する Chevalley 生成元とする。また,

$$\begin{aligned} E_{(i,k)}^{(d)} &= \frac{E_{(i,k)}^d}{d!}, & F_{(i,k)}^{(d)} &= \frac{F_{(i,k)}^d}{d!}, \\ \binom{H_j; b}{d} &= \prod_{a=1}^d \frac{H_j + b + 1 - d}{d}, & \binom{\tilde{H}_j; 0}{d} &= \prod_{a=1}^d \frac{H_j - H_{j+1,l} + 1 - d}{d} \end{aligned}$$

とおく (ここで $H_{m_l+1,l} = H_{1,l+1}$ とする)。このとき, 次のことを予想している。

予想 2 (量子 Frobenius 準同型). $(C-P)$, $(C-P2)$ を仮定する。このとき, 代数としての全射準同型写像 $\text{Fr} : \mathcal{U}_q \rightarrow U(\mathfrak{g})$ *s.t.*

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{(i,k),t}^{+(d)} &\mapsto \begin{cases} (q - q^{-1})^{-dt} E_{(i,k)}^{(d/e)} & \text{if } e|d \text{ and } i \neq m_k, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \\ \mathcal{X}_{(i,k),t}^{-(d)} &\mapsto \begin{cases} (q - q^{-1})^{-dt} F_{(i,k)}^{(d/e)} & \text{if } e|d \text{ and } i \neq m_k, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \\ \mathcal{K}_{(j,l)}^{\pm} &\mapsto 1, \\ \left[\mathcal{K}_{(j,l)}^{(d)}; 0 \right] &\mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} H_{(j,l)}; 0 \\ d/e \end{pmatrix} & \text{if } e|d, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} & \left[\tilde{\mathcal{K}}_{(j,l)}^{(d)}; 0 \right] &\mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} \tilde{H}_{(j,l)}; 0 \\ d/e \end{pmatrix} & \text{if } e|d, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \\ \mathcal{I}_{(j,l),t}^{+} &\mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} H_{(j,l)}; 0 \\ t/e \end{pmatrix} & \text{if } e|t, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} & \mathcal{I}_{(j,l),t}^{-} &\mapsto \begin{cases} (-1)^{t/e} \begin{pmatrix} H_{(j,l)}; t/e - 1 \\ t/e \end{pmatrix} & \text{if } e|t, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \end{aligned}$$

が存在する。

この予想が正しいとすると, 最高ウェイトを調べることによって, 以下のことが分かる。

系 5.11. 予想 2 が正しいと仮定する。 $\lambda \in \Lambda_{n,r}^{+}$ に対し,

$$L(e\lambda) \cong (\otimes_{k=1}^r W(\lambda^{(k)}))^{\text{Fr}} \text{ as } \mathcal{U}_q\text{-modules.}$$

よって, $\text{ch } L(e\lambda) = \otimes_{k=1}^r s_{\lambda}(x_{(1,k)}^e, \dots, x_{(m_k,l)}^e)$ を得る。

予想 3. 代数としての準同型 $\Theta : \mathcal{U}_q \rightarrow \mathcal{U}_q \otimes U(\mathfrak{g})$ で以下の (i), (ii) を満たすものが存在する。

- (i) $M \in \mathcal{U}_q\text{-poly}$, $N \in U(\mathfrak{g})\text{-poly}$ に対し, $M \otimes_R N$ を, 準同型 $\Theta : \mathcal{U}_q \rightarrow \mathcal{U}_q \otimes U(\mathfrak{g})$ を通じて \mathcal{U}_q -加群と思うとき,

$$\text{ch}(M \otimes_R N) = \text{ch } M \cdot \text{ch } N^{\text{Fr}}.$$

- (ii) $\lambda \in \Lambda_{n,r}^{+}$ に対し, $\lambda = \lambda' + e\lambda''$ ($\lambda^{(k)} : e\text{-restricted for } k = 1, \dots, r$) と表すとき,

$$(5.12) \quad L(\lambda) \cong L(\lambda') \otimes_R L(e\lambda'') \cong L(\lambda') \otimes_R (\otimes_{k=1}^r W(\lambda''^{(k)})) \text{ as } \mathcal{U}_q\text{-modules.}$$

ここで, テンソル積は, 準同型 $\Theta : \mathcal{U}_q \rightarrow \mathcal{U}_q \otimes U(\mathfrak{g})$ を通じて \mathcal{U}_q -加群と思う。

注意 5.12. 代数 \mathcal{U}_q に関しては、まだ分かってないことが多い。その中でも、重要だと思われる問題は次である。

問題: \mathcal{U}_q は Hopf 代数の構造を持つか?

もし \mathcal{U}_q が Hopf 代数の構造を持つならば、予想 3 で考えた準同型 $\Theta : \mathcal{U}_q \rightarrow \mathcal{U}_q \otimes U(\mathfrak{g})$ は、 \mathcal{U}_q の余積 $\Delta : \mathcal{U}_q \rightarrow \mathcal{U}_q \otimes \mathcal{U}_q$ を用いて、 $\Theta = \text{Id} \otimes \text{Fr} \circ \Delta$ として与えられるべきものである。

5.4. レベル r Fock 空間の圏化に向けて.

この節でも、パラメータ q に対し条件 (C-P) (in 3.2 節) を仮定する。

(3.2) より、 $\widehat{\mathfrak{sl}}_e$ -加群としての同型写像

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0 \left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{n})\text{-mod} \right) \xrightarrow{[\Delta(\lambda)] \mapsto |\lambda, \mathbf{s}\rangle} \mathcal{F}_{e,r}[\mathbf{s}]$$

は得ている。一方で、定理 3.1 (iii) より、線形空間としての同型写像

$$\widehat{\text{ch}} : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0 \left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{n})\text{-mod} \right) \rightarrow \bigotimes_{k=1}^r \mathbb{C}[\mathbf{x}_{(k)}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x}_{(k)})} \quad ([M] \mapsto \widehat{\text{ch}}M)$$

も分かっている。しかし、これらの 2 つの同型写像の合成によって得られる $\mathcal{F}_{e,r}[\mathbf{s}]$ と $\bigotimes_{k=1}^r \mathbb{C}[\mathbf{x}_{(k)}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x}_{(k)})}$ の間の線型同型写像は、

$$\mathcal{F}_{e,r}[\mathbf{s}] \rightarrow \bigotimes_{k=1}^r \mathbb{C}[\mathbf{x}_{(k)}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x}_{(k)})} \quad (|\lambda, \mathbf{s}\rangle \mapsto \widehat{\text{ch}}\Delta(\lambda))$$

であり、(1.9) の同型写像とは異なる。しかし、定理 3.1 (iv) のおかげで、線型同型写像

$$\Phi_e : \bigotimes_{k=1}^r \mathbb{C}[\mathbf{x}_{(k)}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x}_{(k)})} \rightarrow \bigotimes_{k=1}^r (\mathbb{C}[\mathbf{x}_{(k)}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x}_{(k)})})^{\xi_e} \quad (\widehat{\text{ch}}\Delta(\lambda) \mapsto \bigotimes_{k=1}^r s_{\lambda^{(k)}}(\mathbf{x}_{(k)}))$$

は、環としての同型写像を与える。 $(\mathbb{C}[\mathbf{x}_{(k)}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x}_{(k)})})^{\xi_e}$ 上の全ての構造を、環同型 Φ_e を通じて読み換えたものを $(\bigotimes_{k=1}^r \mathbb{C}[\mathbf{x}_{(k)}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x}_{(k)})})^{\Phi_e}$ と表すことにする。

よって、 $(\mathbb{C}[\mathbf{x}_{(k)}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x}_{(k)})})^{\xi_e}$ 上の作用素 $1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes b_{s_{\lambda^{(k)}}(\mathbf{x}_{(k)})} \otimes 1 \cdots \otimes 1$ に対応する $(\bigotimes_{k=1}^r \mathbb{C}[\mathbf{x}_{(k)}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x}_{(k)})})^{\Phi_e}$ 上の作用素は、 $\Phi_e^{-1}(1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes s_{\lambda^{(k)}}(\mathbf{x}_{(k)}) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1)$ を掛けるという作用素に対応する。

また、 $(\bigotimes_{k=1}^r \mathbb{C}[\mathbf{x}_{(k)}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x}_{(k)})})^{\Phi_e}$ 上の双線型形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は、

$$\langle \widehat{\text{ch}}\Delta(\lambda), \widehat{\text{ch}}\Delta(\mu) \rangle = \delta_{\lambda\mu} \quad \text{for } \lambda, \mu \in \Lambda_{\geq 0, r}^+$$

によって与えられる。よって, $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ が quasi-hereditary 代数であることに注意すれば,

$$\langle [M], [N] \rangle := \sum_{i \geq 0} (-1)^i \text{Ext}^i \dim \text{Ext}^i(M, N) \quad (M, N \in \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{n})\text{-mod})$$

によって定まる $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0 \left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{n})\text{-mod} \right)$ 上の双線形形式は, 同型 $\widehat{\text{ch}} : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0 \left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{n})\text{-mod} \right) \rightarrow \left(\bigotimes_{k=1}^r \mathbb{C}[\mathbf{x}_{(k)}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x}_{(k)})} \right)^{\Phi_e}$ のもとで, $\left(\bigotimes_{k=1}^r \mathbb{C}[\mathbf{x}_{(k)}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x}_{(k)})} \right)^{\Phi_e}$ 上の双線形形式 \langle, \rangle と同一視される。

予想 2, 3 が正しいことを仮定して, $\lambda \in \Lambda_{k,r}^+$ ($k \in \mathbb{Z}_{>0}$) に対し, 関手 $\widetilde{\mathfrak{B}}_\lambda, \widetilde{\mathfrak{B}}'_\lambda$ を,

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{B}}_\lambda &: \mathcal{U}_q\text{-poly} \xrightarrow{? \otimes_{RL}(e\lambda)} \mathcal{U}_q\text{-poly}, \\ \widetilde{\mathfrak{B}}'_\lambda &: \mathcal{U}_q\text{-poly} \xrightarrow{Tr_u \circ (? \otimes_{RL}(e\lambda)^*)} \mathcal{U}_q\text{-poly} \end{aligned}$$

によって定める。ここで, $L(e\lambda)^*$ は $L(e\lambda)$ を $U(\mathfrak{g})$ -加群と思った時の双対表現である。

予想 4. $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r)$ が $m_k \geq n + ek$ を満たしているとき, $\widetilde{\mathfrak{B}}_\lambda, \widetilde{\mathfrak{B}}'_\lambda$ をそれぞれ $\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod}, \mathcal{S}_{n+ek,r}(\mathbf{m})\text{-mod}$ に制限したものは, 関手

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{B}}_\lambda|_{\mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod}} &: \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod} \rightarrow \mathcal{S}_{n+ek,r}(\mathbf{m})\text{-mod} \\ \widetilde{\mathfrak{B}}'_\lambda|_{\mathcal{S}_{n+ek,r}(\mathbf{m})\text{-mod}} &: \mathcal{S}_{n+ek,r}(\mathbf{m})\text{-mod} \rightarrow \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod} \end{aligned}$$

を与え, $\widetilde{\mathfrak{B}}'_\lambda$ は $\widetilde{\mathfrak{B}}_\lambda$ の右随伴関手となる。

予想 4 が正しいと仮定して, $\lambda \in \Lambda_{k,r}^+$ ($k \in \mathbb{Z}_{>0}$) に対し, 関手 $\mathfrak{B}_{n;\lambda}, \mathfrak{B}'_{n;\lambda}$ を

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{n;\lambda} &: \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{n})\text{-mod} \xrightarrow{\Upsilon_{\mathbf{n}+e\mathbf{k},\mathbf{n}}^{-1}} \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{n} + e\mathbf{k})\text{-mod} \xrightarrow{\widetilde{\mathfrak{B}}_\lambda} \mathcal{S}_{n+ek,r}(\mathbf{n} + e\mathbf{k})\text{-mod}, \\ \mathfrak{B}'_{n;\lambda} &: \mathcal{S}_{n+ek,r}(\mathbf{n} + e\mathbf{k})\text{-mod} \xrightarrow{\widetilde{\mathfrak{B}}'_\lambda} \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{n} + e\mathbf{k})\text{-mod} \xrightarrow{\Upsilon_{\mathbf{n}+e\mathbf{k},\mathbf{n}}} \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{n})\text{-mod} \end{aligned}$$

と定め, $\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{n})\text{-mod}$ 上の自己関手 $\mathfrak{B}_\lambda, \mathfrak{B}'_\lambda$ をそれぞれ,

$$\mathfrak{B}_\lambda := \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{B}_{n;\lambda}, \quad \mathfrak{B}'_\lambda := \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{B}'_{n;\lambda}$$

と定める。 \mathfrak{B}_λ と \mathfrak{B}'_λ の随伴性から, $[\mathfrak{B}'_\lambda]$ は $[\mathfrak{B}_\lambda]$ の \langle, \rangle に関する随伴となる。

予想 5. (C-P) を仮定する。

(i) $[i\text{-Res}], [i\text{-Ind}]$ ($0 \leq i \leq e-1$) は, $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0 \left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{S}_{n,r}(\mathbf{n})\text{-mod} \right)$ 上に $\widehat{\mathfrak{sl}}_e$ の作用を定める。

- (ii) $[\mathfrak{B}_\lambda], [\mathfrak{B}'_\lambda]$ ($\lambda \in A_{\geq 0, r}^+$) は, $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0 \left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{S}_{n, r}(\mathbf{n})\text{-mod} \right)$ 上に \mathfrak{h} の作用を定める。
- (iii) 線形同型写像

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0 \left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{S}_{n, r}(\mathbf{n})\text{-mod} \right) \xrightarrow{\widehat{\text{ch}}} \left(\bigotimes_{k=1}^r \mathbb{C}[\mathbf{x}_{(k)}]^{\mathfrak{S}(\mathbf{x}_{(k)})} \right)^{\Phi_e} \xrightarrow{\widehat{\text{ch}} \Delta(\lambda) \mapsto |\lambda, \mathbf{s}\rangle} \mathcal{F}_{e, r}[\mathbf{s}]$$

は $\mathfrak{sl}_e \otimes \mathfrak{h}$ -加群としての同型写像を与える。

注意 5.13. v -deformed Fock 空間 (in [U]) において, (5.12) に対応するものが, [I] で示されている。

REFERENCES

- [DJM] R. Dipper, G. James, and A. Mathas, Cyclotomic q -Schur algebras, *Math. Z.* **229** (1998), 385-416.
- [DR] J. Du and H. Rui, Borel type subalgebras of the q -Schur ^{m} algebra, *J. Algebra* **213** (1999), 567-595.
- [GL] J. J. Graham and G. I. Lehrer; Cellular algebras, *Invent. Math.* **123** (1996), 1-34.
- [I] K. Iijima, On a higher level extension of Leclerc-Thibon product theorem in q -deformed Fock spaces, *J. algebra* **371** (2012), 105-131.
- [J] M. Jimbo, *A q -analogue of $U(\mathfrak{gl}(N+1))$, Hecke algebra and the Yang-Baxter equation*, *Lett. Math. Phys.* **11** (1986), 247-252.
- [Lo] I. Losev, *Proof of Varagnolo-Vasserot conjecture on cyclotomic categories O* , preprint arXiv:1305.4894 .
- [Lu1] G. Lusztig, *Modular representation and quantum groups*, *Contemp. Math.* **82** (1989), 59-77.
- [Lu2] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, *Progress in Math.* **110**, Birkhauser, (1993).
- [LM] S. Lyle and A. Mathas, *Blocks of cyclotomic Hecke algebras*, *Adv. Math.* **216** (2007), 854-878.
- [RSVV] R. Rouquier, P. Shan, M. Varagnolo and E. Vasserot, *Categorifications and cyclotomic rational double affine Hecke algebras*, preprint arXiv:1305.4456.
- [SW] C. Stroppel and B. Webster, *Quiver Schur algebras and q -Fock space*, preprint arXiv : 1110.1115.
- [U] D. Uglov, *Canonical bases of higher level q -deformed Fock spaces and Kazhdan-Lusztig polynomials*, *Progress in Math.* **191**, Birkhauser (2000).
- [W1] K. Wada, *Presenting cyclotomic q -Schur algebras*, *Nagoya Math. J.* **201** (2011), 45-116.
- [W2] K. Wada, *On Weyl modules of cyclotomic q -Schur algebras*, *Contemp. Math.* **565** (2012), 261-286.
- [W3] K. Wada, *Induction and restriction functors for cyclotomic q -Schur algebras*, to appear in *Osaka Journal of Math.*
- [W4] K. Wada, in preparation.
- [W5] 和田 堅太郎, *Presenting cyclotomic q -Schur algebras*, 第 1 2 回代数群と量子群の表現論研究集会 報告集, 59-72.
- [W6] 和田 堅太郎, *On Weyl modules of cyclotomic q -Schur algebras*, 第 1 3 回代数群と量子群の表現論研究集会 報告集, 59-72.
- [W7] 和田堅太郎, *Cyclotomic q -Schur 代数の表現論*, 第 5 8 回代数学シンポジウム 報告集.
- [W8] 和田堅太郎, *Cyclotomic q -Schur 代数の Drinfeld 型の表示について*, 数理解析研究所講究録に掲載予定。