

2019年12月12日

---

# 定曲率擬 Riemann 多様体の部分多様体について

---

組合せ論とその周辺ワークショップ in 信州 -2019 冬-

首都大学東京大学院 理学研究科 数理科学専攻 D2

佐藤 雄一郎

# 導入

---

概要 前半：曲面論（特に極小曲面），後半：部分多様体論

## 講演の流れ

- (復習) 古典曲面論.
- (小論) 極小曲面の性質.
- (本論1) Minkowski空間内の平均曲率零曲面.
- (応用1) 4次元Minkowski空間内の平坦平均曲率零曲面
- (定義) 定曲率擬Riemann多様体 (擬Riemann空間形).
- (本論2) 定曲率空間内の全臍的部分多様体
- (応用2) (時間あれば) 等長はめ込みのモデュライ空間

図を出来るだけ見せながら，話を進める予定である.

## (復習) 古典曲面論

---

ここで扱う曲面は、3次元Euclid空間  $\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{st}})$  内の2次元的な部分集合とする。

### 厳密な定義

$M$  : 連結2次元多様体,

$f : M \rightarrow \mathbb{E}^3$  : 滑らかな埋め込み.

このとき、 $f$  の像  $f(M) \subset \mathbb{E}^3$  を (滑らかな) 曲面 という。

### 注意

- ・ 写像  $f$  のことを滑らかな曲面と呼ぶこともある。
- ・  $f$  の条件を緩めて「はめ込み」とする場合もある。
- ・ 更に緩めて、特異点も許す曲面論も近年活発。

# 曲面の例.

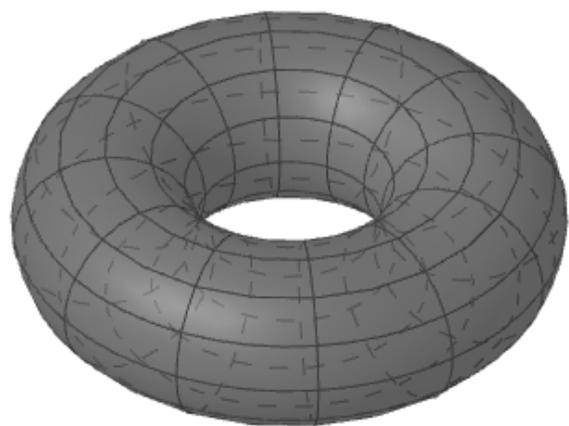


図1: 円環面.

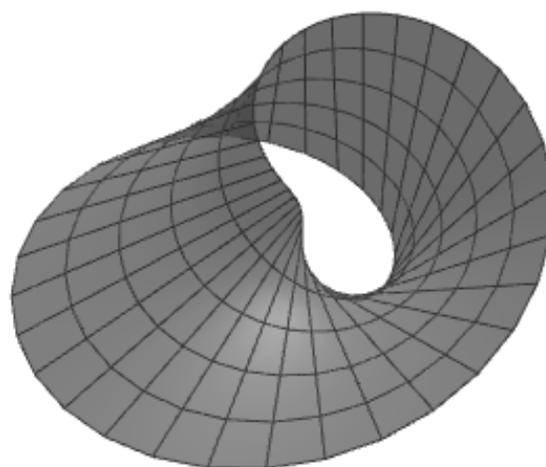


図2: メビウスの  
帯.

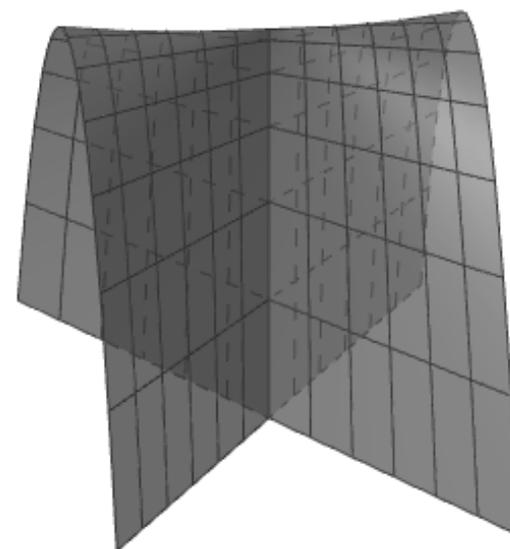


図3: 交叉帽子.

$\mathbb{E}^3$  内の曲面  $S$  に対し，局所的には，  
次のようにパラメータ表示を持つ (陰関数定理).

$$p : D \ni (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in S \subset \mathbb{E}^3.$$

ここで， $D \subset \mathbb{R}^2$  は領域である.

上の表示を用いて，曲面上の点  $p = p(u, v)$  に対し，

$$n(p) := p_u(u, v) \times p_v(u, v) / |p_u(u, v) \times p_v(u, v)|,$$

$$T_p S := \{ \lambda p_u(u, v) + \mu p_v(u, v) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \},$$

$$N_p S := \{ \alpha n(p) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R} \}.$$

それぞれ点  $p$  の **単位法ベクトル**，**接平面**，**法空間** と呼ぶ.

$S \subset \mathbb{E}^3$  : 曲面,  $p = p(u, v) \in S$ ,

$\{p_u, p_v, n\}$  : Gauss 標構.

このとき,  $p$  における  $S$  の **第一基本量**, **第二基本量** をそれぞれ

$$E(p) := \langle p_u, p_u \rangle, \quad F(p) := \langle p_u, p_v \rangle, \quad G(p) := \langle p_v, p_v \rangle.$$

$$L(p) := \langle p_{uu}, n \rangle, \quad M(p) := \langle p_{uv}, n \rangle, \quad N(p) := \langle p_{vv}, n \rangle.$$

で定め,  $S$  上の関数  $E, F, G, L, M, N$  が定まる. また,

$$g := Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

$$h := Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

をそれぞれ  $S$  の **第一基本形式**, **第二基本形式** という.

第一基本量  $(E, F, G)$ , 第二基本量  $(L, M, N)$  を用いて,

$$K := \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H := \frac{EN - 2FG + GL}{2(EG - F^2)}$$

を定め, それぞれ  $S$  の Gauss 曲率, 平均曲率 という.

事実 (Theorema Egregium)

Gauss 曲率  $K$  は, 第一基本量とその偏微分のみで有理式として表せる.

↪ Riemann 幾何学の出発点.

Riemann 幾何学の哲学は, 外側の入れ物が無くても, 空間の曲がり方が測れるというもの.

- 第一基本形式  $g \dots$  曲面  $S$  の**内在的性質!**  
つまり,  $\mathbb{E}^3$  という入れ物に関係無い量が得られる.  
 $\rightsquigarrow$  曲面積, Gauss 曲率, Euler 標数 (位相不変量) etc.

- 第二基本形式  $h \dots$  曲面  $S$  の**外在的性質!**  
つまり, 入れ物  $\mathbb{E}^3$  が曲面の形に影響する.  
 $\rightsquigarrow$  主曲率, 平均曲率, Gauss 写像 etc.

$\mathbb{E}^3$  内の美しい or 面白い曲面を研究したい!

$\iff h$  に (幾何学的な) 条件 を付加する!

- $h = 0$  : **全測地的**曲面  $\iff$  平面.
- $h = \lambda g$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ) : **全臍的**曲面  $\iff$  ( $\lambda \neq 0$  なら) 球面.
- $\text{trace}_g h = 2H = 0$  : **極小**曲面. ( $\leftarrow$ 前半の**主役**)
- $\text{trace}_g h = 2H = \text{const.}$  : **平均曲率一定 (CMC)** 曲面.

## (小論) 極小曲面の性質

---

平均曲率が恒等的に0である曲面を極小曲面といたった。  
その幾何学的意味はなんだろうか。

$p : D \rightarrow S \subset \mathbb{E}^3$  : 曲面  $S$  のパラメータ表示,

$dA := |p_u \times p_v| dudv = \sqrt{EG - F^2} dudv$  : 面積要素.

⇨

$$A(p(D)) := \int_D dA = \int_D \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

この積分値を  $p(D)$  の面積という。

曲面(の一部)に対して、面積が定義できた。(← 汎関数)

これを用いて面積が最小になる曲面を探そう。(← 変分法)

⇨ 最適化問題へ。つまり、微分して極値を探す問題。

$p : D \rightarrow S \subset \mathbb{E}^3$  : 曲面  $S$  のパラメータ表示,

$\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$  :  $D$  上の滑らかな関数,

$\varepsilon \in \mathbb{R}$  : 大きさは十分小.

このとき,

$$p_\varepsilon^\varphi : D \ni (u, v) \mapsto p(u, v) + \varepsilon \varphi(u, v) n(u, v) \in \mathbb{E}^3$$

は曲面  $p(D) \subset S$  の滑らかな変形を与える.

$\rightsquigarrow$

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} A(p_\varepsilon^\varphi(D)) \right|_{\varepsilon=0} = - \int_D \varphi H dA$$

が成立する.

$S$  : 極小  $\implies$  任意の  $\varphi$  に対し, 上式左辺は 0.

逆に, 任意の  $\varphi$  に対し, 上式左辺は 0 になるのならばどうか.

$D$ 上の関数として、 $\varphi = H$ を選べば、

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} A(p_\varepsilon^\varphi(D)) \right|_{\varepsilon=0} = - \int_D \varphi H dA = - \int_D H^2 dA = 0$$

より、 $H = 0$ が従う。すなわち、 $S$ は極小曲面である。

極小曲面は、面積を与える関数の臨界値を与える。

### 注意

極値とは限らないことに注意。

もし極値になるとすれば、それは極小値に限る。

( $\because$  適当な変形で、面積はいくらでも大きくできる)

$\rightsquigarrow$  局所的には面積最小という性質を持つ。(極小曲面論)

極小曲面について、幾何学的な解釈ができた!

## Weierstrass–Enneper の表現公式

$U \subset \mathbb{C}$  : 単連結領域,

$F, G$  : それぞれ  $U$  上の正則関数, 有理型関数 ( $+a$ ).

$\implies$

$$p(z) := \operatorname{Re} \int_z (F(1 - G^2), iF(1 + G^2), 2FG) dz \quad (z \in U)$$

は  $\mathbb{E}^3$  内の極小曲面を与える.

逆に, 任意の極小曲面は局所的には, 上のような表示を持つ.

すなわち, 局所的には極小曲面は完全に理解できたことを意味する.

この表現公式より, 大域的な性質も盛んに研究されている.

極小曲面の例 (キャプションは  $(F, G)$  の組を与えている).

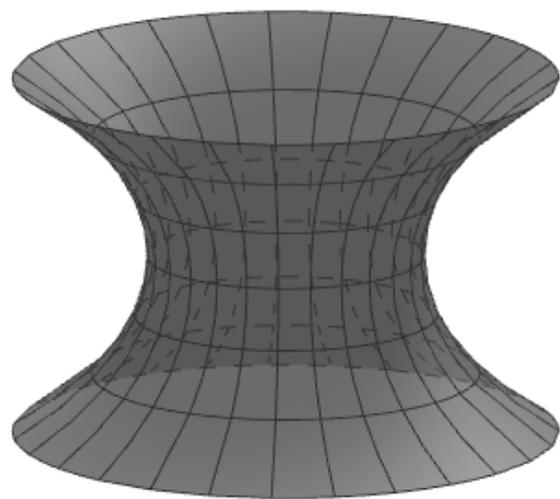


図4:  $(e^w, e^{-w})$ .

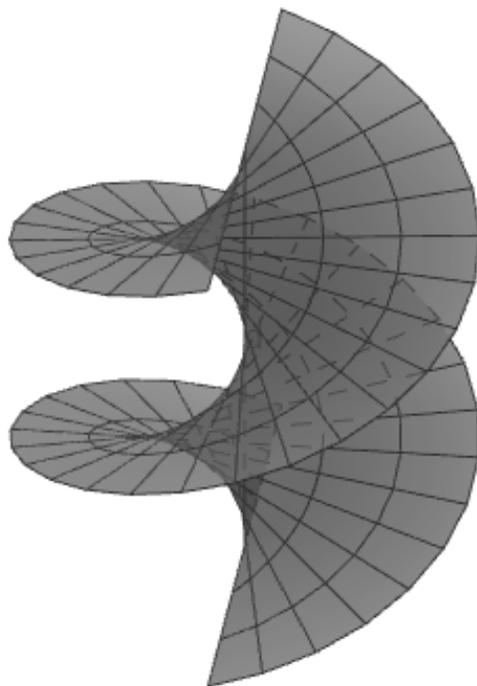


図5:  $(ie^w, ie^{-w})$ .

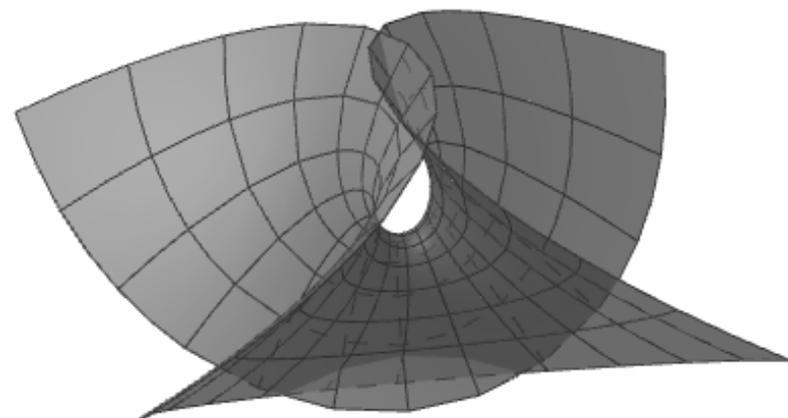


図6:  $(w, 1)$ .

# (本論 1) Minkowski 空間内の平均曲率零曲面

---

3次元 Minkowski 空間を

$$\mathbb{L}^3 := (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_L = dx^2 + dy^2 - dt^2)$$

で定める。但し、 $(x, y, t)$  は  $\mathbb{R}^3$  の標準座標。

$\mathbb{L}^3$  内の曲面は 4 種類に分かれる。

空間的, 時間的, 光的, 及びこれらの混合型。

$\mathbb{E}^3$  の場合と同様に, 平均曲率や Gauss 曲率が定義可能。

↪ 極小曲面の類似物が考えられる!

定義

空間的曲面  $S \subset \mathbb{L}^3$  の平均曲率を  $H_L$  とする。

$S$  が極大曲面であるとは,  $H_L = 0$  を満たすことである。

## Weierstrass 型の表現公式 (空間的極大曲面 ver.)

---

$U \subset \mathbb{C}$  : 単連結領域,

$F, G$  : それぞれ  $U$  上の正則関数, 有理型関数 ( $+\alpha$ ).

$\implies$

$$p(z) := \operatorname{Re} \int_z (F(1+G^2), iF(1-G^2), 2FG) dz \quad (z \in U)$$

は  $\mathbb{L}^3$  内の空間的極大曲面を与える.

逆に, 任意の空間的極大曲面は局所的には, 上のような表示を持つ.

・ 空間的極大曲面には, 特異点が存在する.

$\rightsquigarrow$  主に, カスプ辺, ツバメの尾, カスプ状交叉帽子.

・ 空間的極小曲面の表現公式も有る.

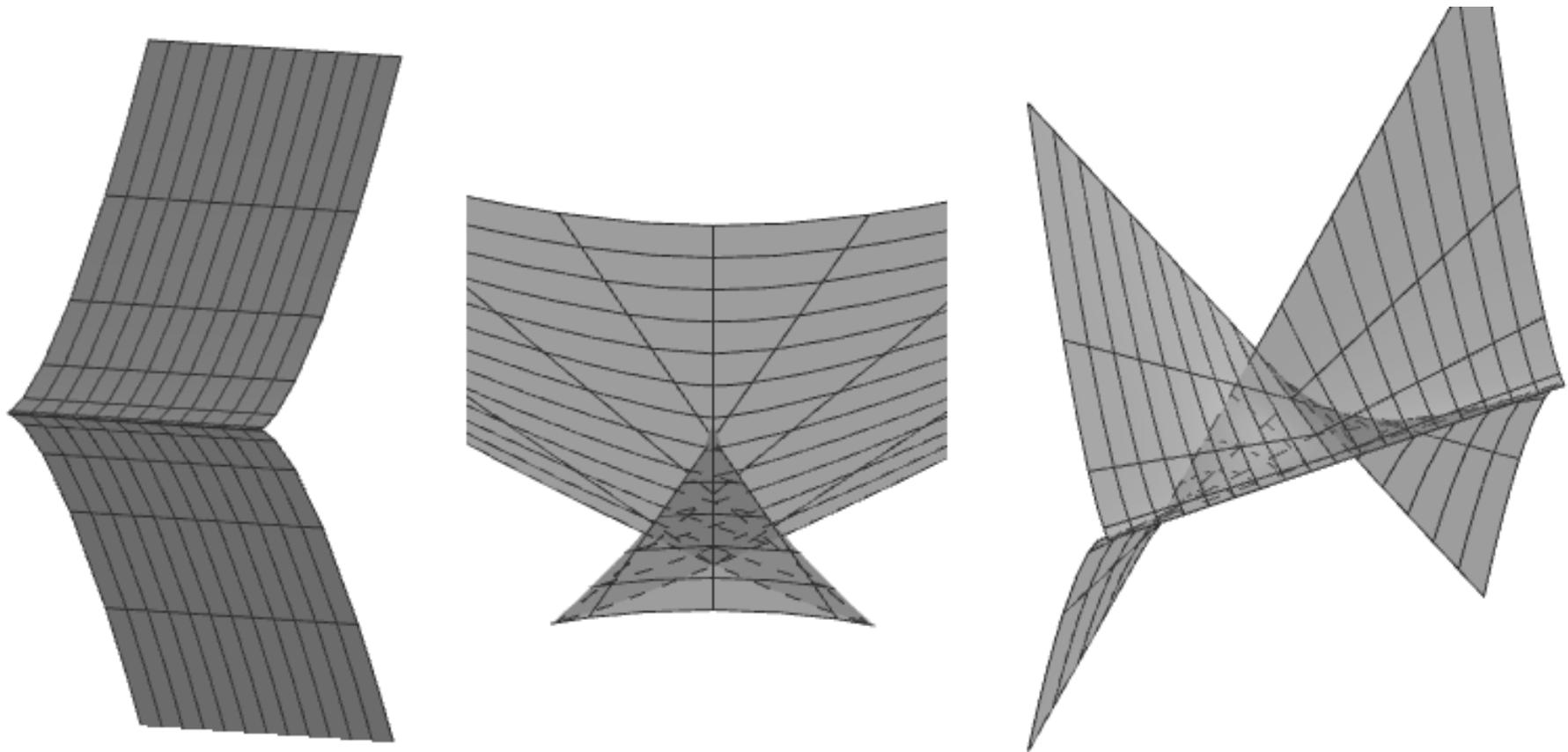


図7: 左からカस्प辺, ツバメの尾, カस्प状交叉帽子.

空間的極大曲面の例 (キャプションは  $(F, G)$  の組を与えている).

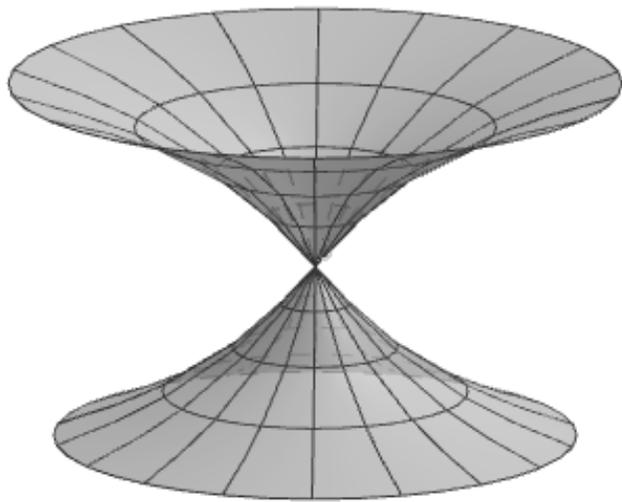


図 8:  $(e^w, e^{-w})$ .

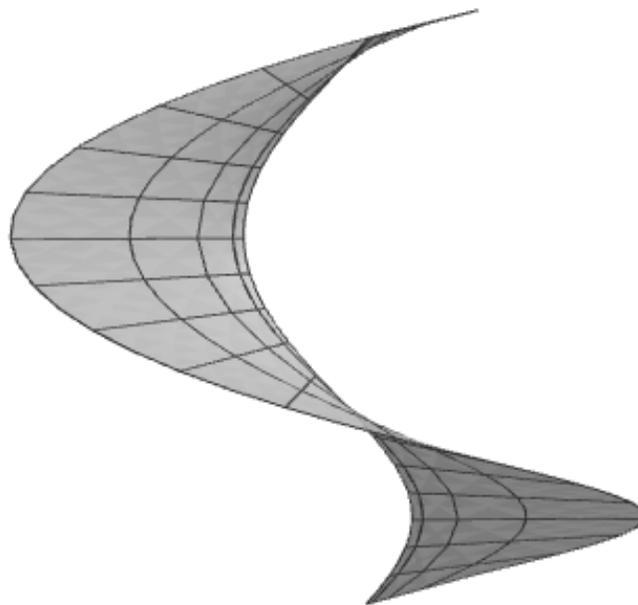


図 9:  $(ie^w, ie^{-w})$ .

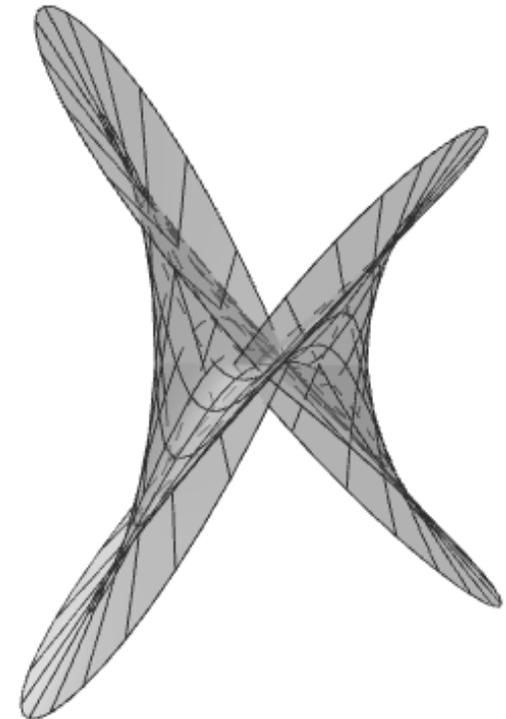


図 10:  $(w, 1)$ .

講演者は,

$$\mathbb{R}^{0,2,1} = (\mathbb{R}^3, dx^2 + dy^2 + 0dz^2)$$

の空間で,  $d$ -極小曲面を定義し, 類似の表現公式を得た.

**Theorem 1 (S.).**  $U \subset \mathbb{C}$  : 単連結領域,

$F, G$  : それぞれ  $U$  上の正則関数, 有理型関数 ( $+\alpha$ ).

$\implies$

$$p(z) := \operatorname{Re} \int_z (F, iF, 2FG) dz \quad (z \in U)$$

は  $\mathbb{R}^{0,2,1}$  内の  $d$ -極小曲面を与える. 特異点も有る!

逆に, 任意の  $d$ -極小曲面は局所的には, 上のような表示を持つ.

$d$ -極小曲面の例 (キャプションは  $(F, G)$  の組を与えている).

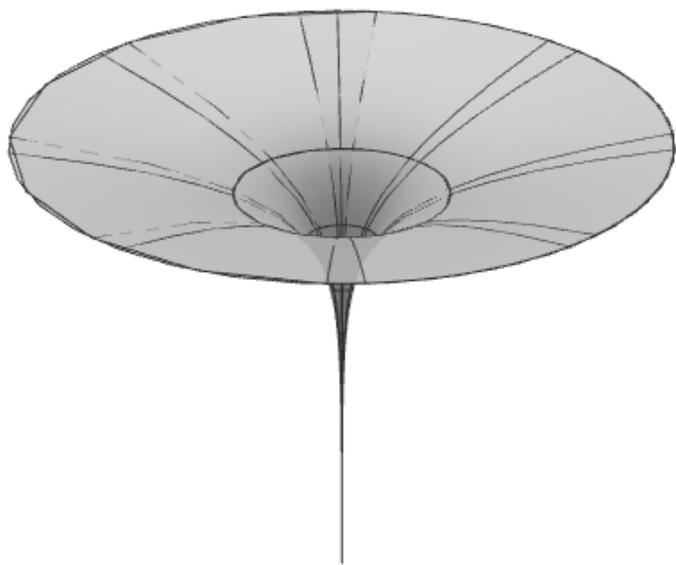


図11:  $(e^w, e^{-w})$ .

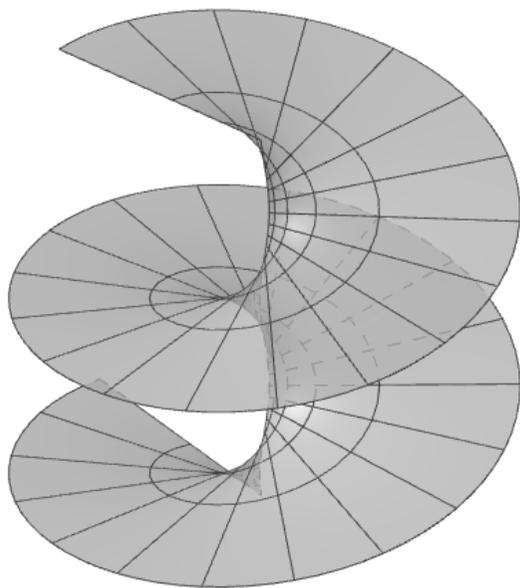


図12:  $(ie^w, ie^{-w})$ .

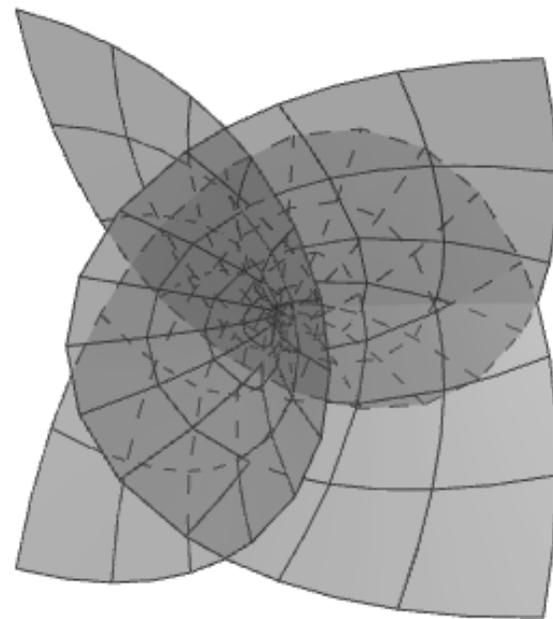


図13:  $(w, 1)$ .

Weierstrass 型表現公式のリストアップ.

$\mathbb{E}^3$  の場合

$$p_{\mathbb{E}^3} = \operatorname{Re} \int_z (F(1 - G^2), iF(1 + G^2), 2FG) dz.$$

$\mathbb{L}^3$  の場合

$$p_{\mathbb{L}^3} = \operatorname{Re} \int_z (F(1 + G^2), iF(1 - G^2), 2FG) dz.$$

$\rightsquigarrow$  極小曲面  $p_{\mathbb{E}^3}$ , 極大曲面  $p_{\mathbb{L}^3}$ ,  $d$ -極小曲面  $p_{\mathbb{R}^{0,2,1}}$  の間に,

$$p_{\mathbb{R}^{0,2,1}} = \frac{1}{2} (p_{\mathbb{E}^3} + p_{\mathbb{L}^3})$$

という関係がある.

# (応用1) $\mathbb{L}^4$ 内の平坦平均曲率零曲面

---

## 4次元 Minkowski 空間

$$\mathbb{L}^4 = (\mathbb{R}^4, dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2)$$

内の曲面  $f : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$  を考える.

曲面が**空間的**  $:\iff f$  の誘導計量  $g$  が Riemann 計量.

曲面が**時間的**  $:\iff f$  の誘導計量  $g$  が Lorentz 計量.

曲面が**平坦**  $:\iff f$  の誘導計量  $g$  に関して Gauss 曲率 0.

と定義する.

応用として,  $\mathbb{L}^4$  内の**平均曲率零曲面の変形の視覚化**や**空間的平坦平均曲率零曲面の分類**を与える.

$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  とする. このとき,

$$\mathbb{R}^3(\theta) := (\mathbb{R}^3, dx^2 + dy^2 + \cos 2\theta dz^2)$$

を定める. 特に,

$$\mathbb{R}^3(0) = (\mathbb{R}^3, dx^2 + dy^2 + dz^2) = \mathbb{E}^3,$$

$$\mathbb{R}^3\left(\frac{\pi}{2}\right) = (\mathbb{R}^3, dx^2 + dy^2 - dz^2) = \mathbb{L}^3,$$

$$\mathbb{R}^3\left(\frac{\pi}{4}\right) = (\mathbb{R}^3, dx^2 + dy^2 + 0dz^2) = \mathbb{R}^{0,2,1}$$

である. また,  $\mathbb{L}^4$  内の3次元部分空間を

$$V(\theta) := \langle (0, 0, \sin \theta, \cos \theta) \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} \subset \mathbb{L}^4$$

で定める.

**Claim 1.** 線形空間として，次は等長同型である．

$$V(\theta) \cong \mathbb{R}^3(\theta).$$

**Claim 2.**  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\Sigma \subset \mathbb{C}$  を単連結領域,  $w = u + iv \in \Sigma$  とする．このとき，

$$f_\theta(u, v) = \operatorname{Re} \int_w (F(1 - \cos 2\theta G^2), iF(1 + \cos 2\theta G^2), 2FG) dw$$

は， $\mathbb{R}^3(\theta)$  内の共形的な平均曲率零曲面を与える．

Claim 1 より，次のような  $\mathbb{L}^4$  内の平均曲率零曲面の変形を視覚化する．

$$\begin{aligned} \tilde{f}_\theta(u, v) = \operatorname{Re} \int_w (F(1 - \cos 2\theta G^2), iF(1 + \cos 2\theta G^2), \\ 2 \cos \theta FG, 2 \sin \theta FG) dw. \end{aligned}$$

実際に,  $\{f_\theta\}_{\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]}$  の変形をアニメーションで.

空間的-平坦-平均曲率零曲面を考える動機：  
等長変換の差を除いて，次の結果が知られている。

- 標準的 Euclid 空間  $\mathbb{E}^m$  ( $m \geq 3$ ) 内の平坦平均曲率零部分多様体は，部分空間に限る。
- 3次元 Minkowski 空間  $\mathbb{L}^3$  内の空間的平坦平均曲率零曲面は，平面に限る。
- 3次元 Minkowski 空間  $\mathbb{L}^3$  内の**時間的**平坦平均曲率零曲面は，平面か flat  $B$ -scrollに限る。  
     $\rightsquigarrow$  従って，**空間的**曲面の場合に興味がある。
- **4次元 Minkowski 空間  $\mathbb{L}^4$  内の空間的平坦平均曲率零曲面は，数多く存在する。**
- neutral 計量を持つ 4次元擬 Euclid 空間  $\mathbb{E}_2^4$  内の空間的平坦平均曲率零曲面は，再び平面に限る。

**Theorem 2 (S.).**  $f : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$  : 次の3条件を満たす連結な平面でない曲面.

(i) : 空間的, (ii) : 平坦, (iii) : 平均曲率零.

$\implies$

$M$  は,  $\mathbb{L}^4$  の等長変換により  $\mathbb{R}^{0,2,1} \subset \mathbb{L}^4$  にはめ込まれ,  $d$ -極小曲面.

ここで,  $\mathbb{R}^{0,2,1}$  は  $\mathbb{L}^4$  に次のようにして標準的に埋め込める.

$$\mathbb{R}^{0,2,1} \ni (x, y, z) \mapsto (z, x, y, z) \in \mathbb{L}^4.$$

この埋め込みにより, 逆に, 任意の  $d$ -極小曲面は,  $\mathbb{L}^4$  内の空間的平坦平均曲率零曲面となる.

**Corollary 3 (S.).** 4次元 *Minkowski*空間  $\mathbb{L}^4$  内の空間的平坦平均曲率零曲面は，次のいずれかである．

(i) 平面 (の一部)，

(ii) 光的方向を垂直軸としたグラフ曲面．

$$\{(\varphi(u, v), u, v, \varphi(u, v)) \in \mathbb{L}^4 \mid (u, v) \in U\}$$

ここで， $\varphi$  はある領域  $U$  上で定義された調和関数．

$\rightsquigarrow$  Bernstein 型の定理はもはや成立しない．

(cf.) Bernstein の定理

全平面上で定義されたグラフ曲面が極小であれば，平面に限られる．

# (定義) 定曲率擬 Riemann 多様体

---

符号  $(p, q)$  の  $m$  次元擬 Euclid 空間を

$$\mathbb{E}_p^m := \left( \mathbb{R}^m, \langle \cdot, \cdot \rangle_p = - \sum_{i=1}^p dx_i^2 + \sum_{j=p+1}^q dx_j^2 \right)$$

で定める. 但し,  $(x_1, \dots, x_m)$  は  $\mathbb{R}^m$  の標準座標で,  
 $m = p + q$ ,  $p \leq q$  を満たす.

定数  $c \in \mathbb{R}$  に対し,  $\mathbb{E}_p^{m+1}$  内の超曲面

$$Q_{p,c}^m := \{x \in \mathbb{E}_p^{m+1} \mid \langle x, x \rangle_p = c\}$$

を定め,  $\mathbb{E}_p^{m+1}$  への包含写像による誘導計量を導入する.

$Q_{p,c}^m$  は,  $c$  の値によって状況が変化する.

$$S_p^m(r^2) := Q_{p,r^2}^m, \quad \mathbb{H}_p^m(-r^2) := Q_{p+1,-r^2}^m.$$

$\rightsquigarrow$  それぞれ一定断面曲率  $\frac{1}{r^2}$ ,  $-\frac{1}{r^2}$  であり, 測地的完備.

$S_p^m(r^2)$  : 指数  $p$  の  $m$  次元 **擬球面**.

$\mathbb{H}_p^m(-r^2)$  : 指数  $p$  の  $m$  次元 **擬双曲空間**.

擬 Euclid 空間  $\mathbb{E}_p^m$  を含めたものを総称して,  
**擬 Riemann 空間形** と呼ぶこともある.

$c = 0$  のとき,  $Q_{p,0}^m$  は, 原点  $(0, \dots, 0)$  に唯一の孤立特異点を持つ超曲面になるが, 誘導計量は常に退化している.

$Q_{p,0}^m$  は, **光錐** と呼ばれ, 全臍的光的超曲面.

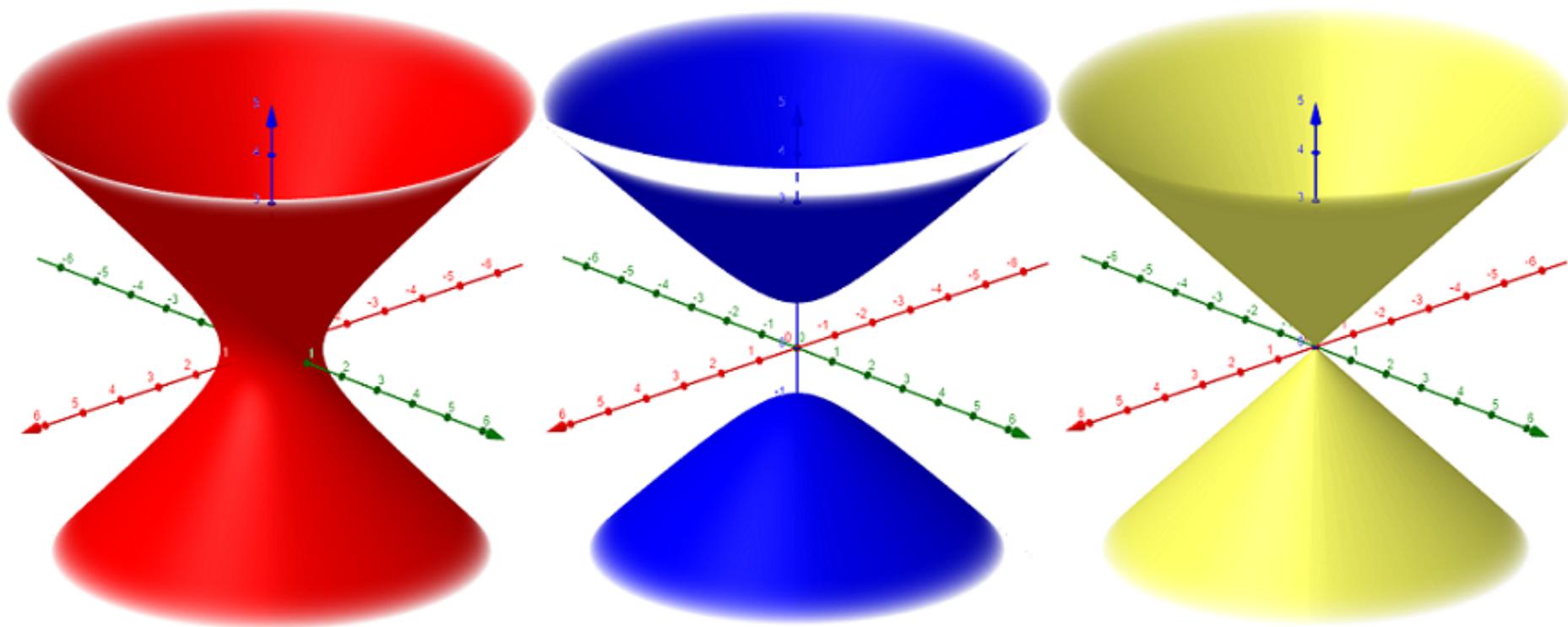


図14: 左から擬球面, 双曲空間, 光錐.

以下，外空間は擬 Riemann 空間形を考える．

## 記号・用語の準備

$\bar{M}_p^{m+n}$  :  $(m+n)$ 次元擬 Riemann 空間形，

$M^m \subset \bar{M}$  :  $m$ 次元部分多様体．

$g$  :  $M$  上の誘導計量 (第一基本形式)．

$h$  :  $M$  上の第二基本形式．

$H$  :  $M$  の平均曲率ベクトル場

$$\text{i.e. } H = \frac{1}{m} \text{trace}_g h.$$

$M \subset \bar{M}$  : (非退化) 部分多様体.

$M$  : 全測地的部分多様体  $:\iff h = 0$ .

$M$  : 全臍的部分多様体 (←後半の主役)

$:\iff \forall X, Y \in \Gamma(TM), h(X, Y) = g(X, Y)H$ .

$M$  : 極小 (or 平均曲率零) 部分多様体  $:\iff H = 0$ .

$\rightsquigarrow M$  : 全測地的  $\iff M$  : 極小かつ全臍的.



## (本論2) 定曲率空間内の全臍的部分多様体

---

### Euclid空間

$\phi : M^m \rightarrow \mathbb{E}^n$  を全臍的等長はめ込みとする。このとき、次のいずれかの一つの開部分に合同である：

- 全測地的  $\mathbb{E}^m \subset \mathbb{E}^n$  : 部分空間,
- $S^m(r^2) \hookrightarrow \mathbb{E}^{m+1}$  : 包含写像.

### 球面

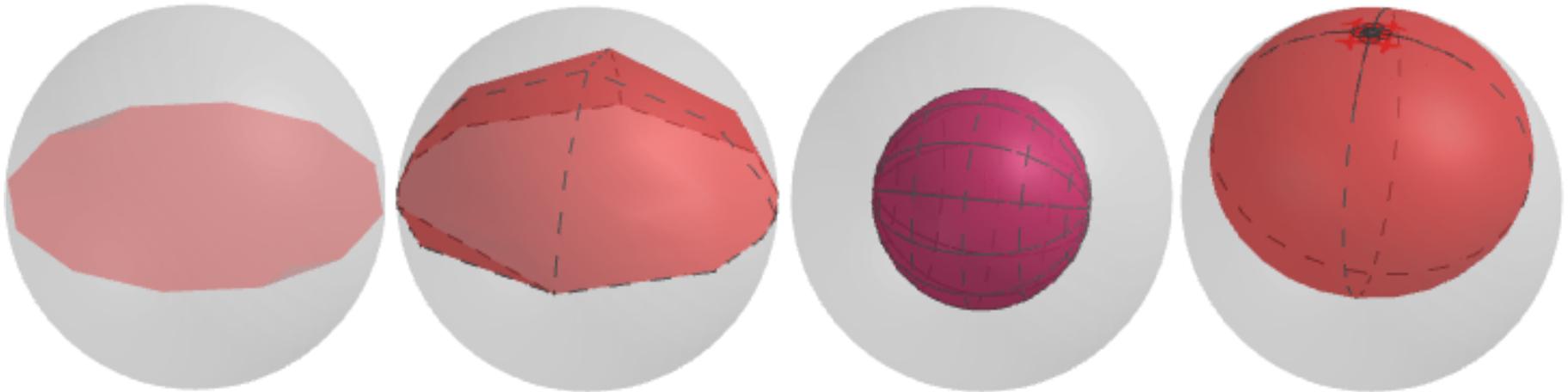
$\phi : M^m \rightarrow S^n(1)$  を全臍的等長はめ込みとする。このとき、次のいずれかの一つの開部分に合同である：

- 全測地的  $S^m(1) \subset S^n(1)$  : 大円,
- $S^m(r^2) \subset S^{m+1}(1)$  : 小円 ( $r > 1$ ).

## 双曲空間

$\phi : M^m \rightarrow \mathbb{H}^n(-1)$  を全臍的等長はめ込みとする。このとき、次のいずれかの一つの開部分に合同である：

- 全測地的  $\mathbb{H}^m(-1) \subset \mathbb{H}^n(-1)$  : 部分空間,
- $\mathbb{H}^m(-r^2) \rightarrow \mathbb{H}^{m+1}(-1)$  : 双曲型 ( $r > 1$ ),
- $S^m(r^2) \rightarrow \mathbb{H}^{m+1}(-1)$  : 楕円型 ( $r > 0$ ),
- $\mathbb{E}^m \rightarrow \mathbb{H}^{m+1}(-1)$  : ホ口球面.



## 擬 Riemann の場合の先行研究

**Theorem 4** (Magid(1982), Ahn–Kim–Kim(1996)).

$\phi : M_s^m \rightarrow \mathbb{E}_p^n$  を全臍的等長はめ込みとする。このとき、次のいずれかの一つの開部分に合同である：

- 全測地的  $\mathbb{E}_s^m \subset \mathbb{E}_p^n$ ,
- $S_s^m(r^2) \hookrightarrow \mathbb{E}_s^{m+1}$  : 包含写像,
- $\mathbb{H}_s^m(-r^2) \hookrightarrow \mathbb{E}_{s+1}^{m+1}$  : 包含写像,
- $\mathbb{E}_s^m \rightarrow \mathbb{E}_{s+1}^{m+2}; x \mapsto (\langle x, x \rangle_s, x, \langle x, x \rangle_s)$  : 平坦全臍的.

最後の例は、余次元2であり、Riemann幾何では起き得ない現象である。

擬 Euclid 空間内のホ口球面と呼ぶべきもの。

**Fact** (B. Y. Chen(2011)).  $\phi : M_s^m \rightarrow \mathbb{S}_p^n(1)$  を全臍的等長はめ込みとする. このとき, 次のいずれかの一つの開部分に合同である :

- $\mathbb{S}_s^m\left(\frac{1}{r^2}\right) \rightarrow \mathbb{S}_s^{m+1}(1) ; x \mapsto (x, \sqrt{1-r^2}) \quad (0 < r \leq 1),$
- $\mathbb{S}_s^m\left(\frac{1}{r^2}\right) \rightarrow \mathbb{S}_{s+1}^{m+1}(1) ; x \mapsto (\sqrt{r^2-1}, x) \quad (r \geq 1),$
- $\mathbb{H}_s^m\left(-\frac{1}{r^2}\right) \rightarrow \mathbb{S}_{s+1}^{m+1}(1) ; x \mapsto (x, \sqrt{1+r^2}) \quad (r > 0),$
- $\mathbb{E}_s^m \rightarrow \mathbb{S}_{s+1}^{m+2}(1) ; x \mapsto$   
 $\left(r\langle x, x \rangle_s + rb - \frac{r}{4}, rx, \sqrt{1+br^2}, r\langle x, x \rangle_s - rb + \frac{r}{4}\right)$   
 $(r > 0, br^2 \geq -1),$
- $\mathbb{E}_s^m \rightarrow \mathbb{S}_{s+2}^{m+2}(1) ; x \mapsto$   
 $\left(r\langle x, x \rangle_s + rb - \frac{r}{4}, \sqrt{br^2-1}, rx, r\langle x, x \rangle_s + rb + \frac{r}{4}\right)$   
 $(r > 0, br^2 \geq 1).$

**Theorem 5 (S.).**  $\phi : M_s^m \rightarrow \mathbb{S}_p^n(1)$  を充満な全臍的等長はめ込みとする. このとき, 次のいずれかの一つの開部分に合同である:

(1)  $\mathbb{S}_s^m(1) \rightarrow \mathbb{S}_s^{m+1}(1) ; x \mapsto (x, 0)$  (全測地的),

(2)  $\mathbb{S}_s^m(1) \rightarrow \mathbb{S}_{s+1}^{m+1}(1) ; x \mapsto (0, x)$  (全測地的),

(3)  $\mathbb{S}_s^m\left(\frac{1}{r^2}\right) \rightarrow \mathbb{S}_s^{m+1}(1) ; x \mapsto (x, \sqrt{1-r^2})$  ( $0 < r < 1$ ),

(4)  $\mathbb{S}_s^m\left(\frac{1}{r^2}\right) \rightarrow \mathbb{S}_{s+1}^{m+1}(1) ; x \mapsto (\sqrt{r^2-1}, x)$  ( $r > 1$ ),

(5)  $\mathbb{S}_s^m(1) \rightarrow \mathbb{S}_{s+1}^{m+2}(1) ; x \mapsto (1, x, 1)$ ,

(6)  $\mathbb{H}_s^m\left(-\frac{1}{r^2}\right) \rightarrow \mathbb{S}_{s+1}^{m+1}(1) ; x \mapsto (x, \sqrt{1+r^2})$  ( $r > 0$ ),

(7)  $\mathbb{E}_s^m \rightarrow \mathbb{S}_{s+1}^{m+1}(1) ; x \mapsto \left( \langle x, x \rangle_s - \frac{3}{4}, x, \langle x, x \rangle_s - \frac{5}{4} \right)$ .

更に,  $M_s^m$  : 完備  $\implies$  上記のいずれかに大域的に合同.

(5) : 余次元2の例.      (7) : ホロ球面の合同類は唯一つ.

## (応用2) 等長はめ込みのモジュライ空間

---

$M_s^m, \bar{M}_p^n$  を擬 Riemann 多様体, 次の写像空間を定義する.

$$\{\phi : M \rightarrow \bar{M} \mid \phi : \text{等長はめ込み}\} (\subset C^\infty(M, \bar{M})).$$

$\mathcal{M}(M, \bar{M}) : \bar{M}_p^n$  の等長変換群で割った商空間,  
すなわち, 合同類全体のなす空間とする.

$\mathcal{M}(M, \bar{M})$  を等長はめ込み  $\phi : M \rightarrow \bar{M}$  の **モジュライ空間** と呼ぶ.

また,  $\phi$  が全臍的の場合のモジュライ空間を  $\tilde{\mathcal{M}}(M, \bar{M}) (\subset \mathcal{M}(M, \bar{M}))$  で表すことにする.

**Theorem 6 (S.).** 上記の準備の下, 次が成立する.

$$\tilde{\mathcal{M}}(\mathbb{S}_s^m(1), \mathbb{S}_p^n(1)) \stackrel{\text{homeo.}}{\cong} \begin{cases} \{pt.\} & (n = m + 1, s \leq p \leq s + 1, \text{ or } n = m + 2, p \geq s), \\ (X, \mathcal{O}_X) & (n \geq m + 2, p \geq s + 1) \end{cases}$$

ここで,  $(X, \mathcal{O}_X)$  は 2点集合  $X = \{g, u\}$  に位相構造

$\mathcal{O}_X = \{\emptyset, \{u\}, \{g, u\}\}$  を定めた位相空間.

連結な非 *Hausdorff* 空間であることを注意する.

**Corollary 7 (S.).**  $n \geq m + 2, p \geq s + 1$  とする. 等長はめ込み  $\phi : \mathbb{S}_s^m(1) \rightarrow \mathbb{S}_p^n(1)$  のモジュライ空間  $\mathcal{M}(\mathbb{S}_s^m(1), \mathbb{S}_p^n(1))$  は非 *Hausdorff* 空間である.

Thank you for your attention!!

**Theorem 8 (S.).**  $\phi : M_s^m \rightarrow \mathbb{H}_p^n(-1)$  を充満な全臍的等長はめ込みとする. このとき, 次のいずれかの一つの開部分に合同である :

$$(1) \mathbb{H}_s^m(-1) \rightarrow \mathbb{S}_s^{m+1}(-1) ; x \mapsto (x, 0) \text{ (全測地的)},$$

$$(2) \mathbb{H}_s^m(-1) \rightarrow \mathbb{H}_{s+1}^{m+1}(-1) ; x \mapsto (0, x) \text{ (全測地的)},$$

$$(3) \mathbb{H}_s^m(-r^{-2}) \rightarrow \mathbb{H}_{s+1}^{m+1}(-1) ;$$

$$x \mapsto (\sqrt{1-r^2}, x) \text{ (} 0 < r < 1 \text{)},$$

$$(4) \mathbb{H}_s^m(-r^{-2}) \rightarrow \mathbb{H}_s^{m+1}(-1) ; x \mapsto (x, \sqrt{r^2-1}) \text{ (} r > 1 \text{)},$$

$$(5) \mathbb{H}_s^m(-1) \rightarrow \mathbb{H}_{s+1}^{m+2}(-1) ; x \mapsto (1, x, 1),$$

$$(6) \mathbb{S}_s^m(r^{-2}) \rightarrow \mathbb{H}_s^{m+1}(-1) ; x \mapsto (\sqrt{1+r^2}, x) \text{ (} r > 0 \text{)},$$

$$(7) \mathbb{E}_s^m \rightarrow \mathbb{H}_s^{m+1}(-1) ;$$

$$x \mapsto \left( \langle x, x \rangle_s + \frac{5}{4}, x, \langle x, x \rangle_s + \frac{3}{4} \right).$$