マトロイドのメモ

矢澤明喜子 (信州大学 D2)

2020/06/06

概要

これは自分のためのメモである．今後, 内容を追加更新する可能性がある．

マトロイドの様々な定義およびその同値性が書かれている．また, 3 点集合までのマトロイドがすべて記載されている．最後の方に 8 または 9 点集合上までのマトロイドの個数がまとまっている．

1　マトロイドの様々な定義

[3, Chapter 1] を参考にまとめた．ここまとめたものは証明は省いたが, 定義から頑張れば証明できる．

1.1　マトロイドと独立集合公理

定義 1.1 (独立集合による定義)**.** E を有限集合, $\mathcal{I} \subset 2^E$ とする．以下の (I1) から (I3) を満たすとき, $(E,\mathcal{I})$ はマトロイドであるという:

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$.
(I2) $I \in \mathcal{I}$, $I' \subset I \Longrightarrow I' \in \mathcal{I}$.
(I3) $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$, $|I_1| < |I_2| \Longrightarrow \exists e \in I_2 \setminus I_1$ s.t. $I_1 \cup \{ e \} \in \mathcal{I}$.

$M = (E,\mathcal{I})$ をマトロイドとする．$\mathcal{I}$ の元を M の独立集合といい, $X \in 2^E \setminus \mathcal{I}$ を M の従属集合という．M の極小な従属集合を M のサーキットという．M の極大な独立集合を M の基底という．

次は, マトロイドの基底集合に関する命題である．マトロイド上のランク関数が well-defined であることをいうのに有用である．

補題 1.2. マトロイド M の基底集合を $\mathcal{B}$ とする． このとき, $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ならば,

$|B_1| = |B_2|$ がなりたつ.

$X \subset E$ に対し,

$$\mathcal{I}|X = \{ I \subset E \mid I \in \mathcal{I} \text{ かつ } I \subset X \}$$

と定め, $M|X = (X, \mathcal{I}|X)$ とおくと, $M|X$ はマトロイドである. $r : 2^E \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を次で定める: $X \subset E$ とし $B \subset X$ を $M|X$ の基底とする. このとき $r(X) = |B|$ と定義する. 補題 1.2 より, r は well-defined である. r を M のランク関数という. $r(E)$ を M のランクという.

1.2 他の公理系

定義 1.3 (サーキットによる定義)**.** E を有限集合, $\mathcal{C} \subset 2^E$ とする. 以下の (C1) から (C3) を満たすとき, $(E, \mathcal{C})$ はマトロイドであるという:

(C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$.
(C2) $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, $C_1 \subset C_2 \Longrightarrow C_1 = C_2$.
(C3) $C_1, C_2 \in \mathcal{I}$, $C_1 \neq C_2$, $e \in C_1 \cap C_2 \Longrightarrow \exists C_3 \in \mathcal{C}$ s.t. $C_3 \subset (C_1 \cup C_2) \setminus \{ e \}$.

$M = (E, \mathcal{C})$ をマトロイドとする. $\mathcal{C}$ の元を M のサーキットという.

注意 1.4. 独立集合で定義されたマトロイドのサーキット集合は (C1) から (C3) を満たす.

定義 1.5 (基底による定義)**.** E を有限集合, $\mathcal{B} \subset 2^E$ とする. 以下の (B1), (B2) を満たすとき, $(E, \mathcal{B})$ はマトロイドであるという:

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$.
(B2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $x \in B_1 \setminus B_2 \Longrightarrow \exists y \in B_2 \setminus B_1$ s.t. $(B_1 \setminus \{ x \}) \cup \{ y \} \in \mathcal{B}$.

$M = (E, \mathcal{B})$ をマトロイドとする. $\mathcal{B}$ の元を M の基底という.

注意 1.6. 独立集合で定義されたマトロイドの基底集合は (B1), (B2) を満たす.

定義 1.7 (ランク関数による定義)**.** E を有限集合, $r : 2^E \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. 以下の (R1) から (R3) を満たすとき, (E, r) はマトロイドであるという:

(R1) $X \subset E \Longrightarrow 0 \leq r(X) \leq |X|$.

(R2) $X \subset Y \subset E \Longrightarrow r(X) \leq r(Y)$.

(R3) $X, Y \subset E \Longrightarrow r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$.

$M = (E, r)$ をマトロイドとする. r を M のランク関数という.

注意 1.8. 独立集合で定義されたマトロイドのランク関数は (R1) から (R3) を満たす.

1.3 独立集合公理とその他の公理の同値性

定理 1.9 (サーキット公理から独立集合で定義されたマトロイドの構成)**.** E を有限集合, $\mathcal{C} \subset 2^E$ とし (C1) から (C3) を満たすとする. このとき,

$$\mathcal{I} = \{\, I \subset E \mid \forall C \in \mathcal{C}, C \not\subset I \,\}$$

と定義する. このとき, $(E, \mathcal{I})$ はサーキット集合を $\mathcal{C}$ とするマトロイド.

定理 1.10 (基底公理から独立集合で定義されたマトロイドの構成)**.** E を有限集合, $\mathcal{B} \subset 2^E$ とし (B1), (B2) を満たすとする. このとき,

$$\mathcal{I} = \{\, I \subset E \mid \exists B \in \mathcal{B} \,\text{s.t.}\, I \subset B \,\}$$

と定義する. このとき, $(E, \mathcal{I})$ は基底集合を $\mathcal{B}$ とするマトロイド.

定理 1.11 (ランク関数から独立集合で定義されたマトロイドの構成)**.** E を有限集合, $r : 2^E \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし (R1) から (R3) を満たすとする. このとき,

$$\mathcal{I} = \{\, I \subset E \mid r(I) = |I| \,\}$$

と定義する. このとき, $(E, \mathcal{I})$ はランク関数を r とするマトロイド.

2 3 点集合までのマトロイドの例

例 2.1 ($|E| = 0$)**.** $E = \emptyset$ 上のマトロイドはただ一つ存在し, empty matroid と呼ばれる.

- 独立集合: $\mathcal{I} = \{\, \emptyset \,\}$.
- サーキット集合: $\mathcal{C} = \emptyset$.
- 基底集合: $\mathcal{B} = \{\, \emptyset \,\}$.
- ランク関数: $r(\emptyset) = 0$.

例 2.2 ($|E|=1$)**.** $E=\{\,1\,\}$ とする．E 上のマトロイドは 2 つである．

- 独立集合
  1. $\mathcal{I}=\{\,\emptyset\,\}$.
  2. $\mathcal{I}=\{\,\emptyset,\{\,1\,\}\,\}$.
- サーキット集合
  1. $\mathcal{C}=\{\,\{\,1\,\}\,\}$.
  2. $\mathcal{C}=\emptyset$.
- 基底集合
  1. $\mathcal{B}=\{\,\emptyset\,\}$.
  2. $\mathcal{B}=\{\,\{\,1\,\}\,\}$.
- ランク関数
  1. $r(\emptyset)=0$, $r(\{\,1\,\})=0$.
  2. $r(\emptyset)=0$, $r(\{\,1\,\})=1$.

例 2.3 ($|E|=2$)**.** $E=\{\,1,2\,\}$ とする．E 上のマトロイドは 5 つである．

- 独立集合
  1. $\mathcal{I}=\{\,\emptyset\,\}$.
  2. $\mathcal{I}=\{\,\emptyset,\{\,1\,\}\,\}$.
  3. $\mathcal{I}=\{\,\emptyset,\{\,2\,\}\,\}$.
  4. $\mathcal{I}=\{\,\emptyset,\{\,1\,\},\{\,2\,\}\,\}$
  5. $\mathcal{I}=\{\,\emptyset,\{\,1\,\},\{\,2\,\},\{\,1,2\,\}\,\}$.
- サーキット集合
  1. $\mathcal{C}=\{\,\{\,1\,\},\{\,2\,\}\,\}$.
  2. $\mathcal{C}=\{\,\{\,2\,\}\,\}$.
  3. $\mathcal{C}=\{\,\{\,1\,\}\,\}$.
  4. $\mathcal{C}=\{\,\{\,1,2\,\}\,\}$.
  5. $\mathcal{C}=\emptyset$.
- 基底集合
  1. $\mathcal{B}=\{\,\emptyset\,\}$.
  2. $\mathcal{B}=\{\,\{\,1\,\}\,\}$.
  3. $\mathcal{B}=\{\,\{\,2\,\}\,\}$.
  4. $\mathcal{B}=\{\,\{\,1\,\},\{\,2\,\}\,\}$

5. $\mathcal{B} = \{\{1,2\}\}$.

- ランク関数
  1. $r(\emptyset) = 0$, $r(\{1\}) = 0$, $r(\{2\}) = 0$, $r(\{1,2\}) = 0$.
  2. $r(\emptyset) = 0$, $r(\{1\}) = 1$, $r(\{2\}) = 0$, $r(\{1,2\}) = 1$.
  3. $r(\emptyset) = 0$, $r(\{1\}) = 0$, $r(\{2\}) = 1$, $r(\{1,2\}) = 1$.
  4. $r(\emptyset) = 0$, $r(\{1\}) = 1$, $r(\{2\}) = 1$, $r(\{1,2\}) = 1$.
  5. $r(\emptyset) = 0$, $r(\{1\}) = 1$, $r(\{2\}) = 1$, $r(\{1,2\}) = 2$.

例 2.4 ($|E| = 3$)**.** $E = \{1,2,3\}$ とする．E 上のマトロイドは 16 つである．

- 独立集合
  1. $\mathcal{I} = \{\emptyset\}$.
  2. $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}\}$.
  3. $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{2\}\}$.
  4. $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{3\}\}$.
  5. $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$.
  6. $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}\}$.
  7. $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}\}$.
  8. $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.
  9. $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.
  10. $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}\}$.
  11. $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$.
  12. $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}$.
  13. $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}$.
  14. $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$.
  15. $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$.
  16. $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.
- サーキット集合
  1. $\mathcal{C} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.
  2. $\mathcal{C} = \{\{2\}, \{3\}\}$.
  3. $\mathcal{C} = \{\{1\}, \{3\}\}$.
  4. $\mathcal{C} = \{\{1\}, \{2\}\}$.
  5. $\mathcal{C} = \{\{3\}, \{1,2\}\}$.
  6. $\mathcal{C} = \{\{2\}, \{1,3\}\}$.

7. $\mathcal{C} = \{\{1\},\{2,3\}\}$.
8. $\mathcal{C} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$.
9. $\mathcal{C} = \{\{3\}\}$.
10. $\mathcal{C} = \{\{2\}\}$.
11. $\mathcal{C} = \{\{1\}\}$.
12. $\mathcal{C} = \{\{2,3\}\}$.
13. $\mathcal{C} = \{\{1,3\}\}$.
14. $\mathcal{C} = \{\{1,2\}\}$.
15. $\mathcal{C} = \{\{1,2,3\}\}$.
16. $\mathcal{C} = \emptyset$.

- 基底集合
  1. $\mathcal{B} = \{\emptyset\}$.
  2. $\mathcal{B} = \{\{1\}\}$.
  3. $\mathcal{B} = \{\{2\}\}$.
  4. $\mathcal{B} = \{\{3\}\}$.
  5. $\mathcal{B} = \{\{1\},\{2\}\}$.
  6. $\mathcal{B} = \{\{1\},\{3\}\}$.
  7. $\mathcal{B} = \{\{2\},\{3\}\}$.
  8. $\mathcal{B} = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$.
  9. $\mathcal{B} = \{\{1,2\}\}$.
  10. $\mathcal{B} = \{\{1,3\}\}$.
  11. $\mathcal{B} = \{\{2,3\}\}$.
  12. $\mathcal{B} = \{\{1,2\},\{1,3\}\}$.
  13. $\mathcal{B} = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$.
  14. $\mathcal{B} = \{\{1,3\},\{2,3\}\}$.
  15. $\mathcal{B} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$.
  16. $\mathcal{B} = \{\{1,2,3\}\}$.
- ランク関数
  1. $r(\emptyset) = 0$, $r(\{1\}) = 0$, $r(\{2\}) = 0$, $r(\{3\}) = 0$, $r(\{1,2\}) = 0$, $r(\{1,3\}) = 0$, $r(\{2,3\}) = 0$, $r(\{1,2,3\}) = 0$.
  2. $r(\emptyset) = 0$, $r(\{1\}) = 1$, $r(\{2\}) = 0$, $r(\{3\}) = 0$, $r(\{1,2\}) = 1$, $r(\{1,3\}) = 1$, $r(\{2,3\}) = 0$, $r(\{1,2,3\}) = 1$.
  3. $r(\emptyset) = 0$, $r(\{1\}) = 0$, $r(\{2\}) = 1$, $r(\{3\}) = 0$, $r(\{1,2\}) = 1$,

$r(\{1,3\}) = 0$, $r(\{2,3\}) = 1$, $r(\{1,2,3\}) = 1$.

4. $r(\emptyset) = 0$, $r(\{1\}) = 0$, $r(\{2\}) = 0$, $r(\{3\}) = 1$, $r(\{1,2\}) = 0$, $r(\{1,3\}) = 1$, $r(\{2,3\}) = 1$, $r(\{1,2,3\}) = 1$.
5. $r(\emptyset) = 0$, $r(\{1\}) = 1$, $r(\{2\}) = 1$, $r(\{3\}) = 0$, $r(\{1,2\}) = 1$, $r(\{1,3\}) = 1$, $r(\{2,3\}) = 1$, $r(\{1,2,3\}) = 1$.
6. $r(\emptyset) = 0$, $r(\{1\}) = 1$, $r(\{2\}) = 0$, $r(\{3\}) = 1$, $r(\{1,2\}) = 1$, $r(\{1,3\}) = 1$, $r(\{2,3\}) = 1$, $r(\{1,2,3\}) = 1$.
7. $r(\emptyset) = 0$, $r(\{1\}) = 0$, $r(\{2\}) = 1$, $r(\{3\}) = 1$, $r(\{1,2\}) = 1$, $r(\{1,3\}) = 1$, $r(\{2,3\}) = 1$, $r(\{1,2,3\}) = 1$.
8. $r(\emptyset) = 0$, $r(\{1\}) = 1$, $r(\{2\}) = 1$, $r(\{3\}) = 1$, $r(\{1,2\}) = 1$, $r(\{1,3\}) = 1$, $r(\{2,3\}) = 1$, $r(\{1,2,3\}) = 1$.
9. $r(\emptyset) = 0$, $r(\{1\}) = 1$, $r(\{2\}) = 1$, $r(\{3\}) = 0$, $r(\{1,2\}) = 2$, $r(\{1,3\}) = 1$, $r(\{2,3\}) = 1$, $r(\{1,2,3\}) = 2$.
10. $r(\emptyset) = 0$, $r(\{1\}) = 1$, $r(\{2\}) = 0$, $r(\{3\}) = 1$, $r(\{1,2\}) = 1$, $r(\{1,3\}) = 2$, $r(\{2,3\}) = 1$, $r(\{1,2,3\}) = 2$.
11. $r(\emptyset) = 0$, $r(\{1\}) = 0$, $r(\{2\}) = 1$, $r(\{3\}) = 1$, $r(\{1,2\}) = 1$, $r(\{1,3\}) = 2$, $r(\{2,3\}) = 1$, $r(\{1,2,3\}) = 2$.
12. $r(\emptyset) = 0$, $r(\{1\}) = 1$, $r(\{2\}) = 1$, $r(\{3\}) = 1$, $r(\{1,2\}) = 2$, $r(\{1,3\}) = 2$, $r(\{2,3\}) = 1$, $r(\{1,2,3\}) = 2$.
13. $r(\emptyset) = 0$, $r(\{1\}) = 1$, $r(\{2\}) = 1$, $r(\{3\}) = 1$, $r(\{1,2\}) = 2$, $r(\{1,3\}) = 1$, $r(\{2,3\}) = 2$, $r(\{1,2,3\}) = 2$.
14. $r(\emptyset) = 0$, $r(\{1\}) = 1$, $r(\{2\}) = 1$, $r(\{3\}) = 1$, $r(\{1,2\}) = 1$, $r(\{1,3\}) = 2$, $r(\{2,3\}) = 2$, $r(\{1,2,3\}) = 2$.
15. $r(\emptyset) = 0$, $r(\{1\}) = 1$, $r(\{2\}) = 1$, $r(\{3\}) = 1$, $r(\{1,2\}) = 2$, $r(\{1,3\}) = 2$, $r(\{2,3\}) = 2$, $r(\{1,2,3\}) = 2$.
16. $r(\emptyset) = 0$, $r(\{1\}) = 1$, $r(\{2\}) = 1$, $r(\{3\}) = 1$, $r(\{1,2\}) = 2$, $r(\{1,3\}) = 2$, $r(\{2,3\}) = 2$, $r(\{1,2,3\}) = 3$.

考察 (というよりは感想):

- 独立集合について
  - $\mathcal{I} = \{\emptyset\}$, $\mathcal{I} = 2^E$ は両極端なマトロイドを与える.
  - $\{e_1, e_2, \ldots, e_l\} \subset E$ のとき $\{\emptyset, \{e_1\}, \{e_2\}, \ldots, \{e_l\}\}$ は独立集合族である.

- (I3) の条件はわりときつい.
- サーキットについて
  - $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする. $\mathcal{C} = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$, $\mathcal{C} = \emptyset$ は両極端なマトロイドを与える.
  - サーキットの公理からサーキット集合を求めようとしたら手が動かなかった. 上記の例では, 結局, 独立集合を見ながらサーキット集合を求めた.
- 基底について
  - $\mathcal{B} = \{\emptyset\}$, $\mathcal{B} = \{E\}$ は両極端なマトロイドを与える.
  - 独立集合が与えられていれば求めるのは簡単. 上記の例では, 結局, 独立集合を見ながら基底集合を求めた.
- ランク関数について
  - 零関数 ($r = \mathbf{0}$), 集合の濃度関数 ($r(X) = |X|$) は両極端なマトロイドを与える.
  - ランク関数の公理からランク関数を求めることはサーキットや基底のそれよりは手が動く.
  - $X \subsetneq Y \subseteq E$ に対し, $r(X)$ と $r(Y)$ の差が開きすぎると (R3) に反する.
  - $\emptyset$ と任意の $X \subset E$ は, 常に (R3) を満たす. 特に等号で (R3) を満たす.
  - E と任意の $X \subset E$ は, 常に (R3) を満たす. 特に等号で (R3) を満たす.
  - ランク関数が与えられれば, 独立集合族, サーキット集合, 基底集合を求めるのは簡単.
- その他
  -

3 マトロイドの数え上げ

3.1 Labeled matroids of rank r on $E = \{1, 2, \ldots, n\}$

[1] を参考にまとめた. 表 1 は, $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ 上のランク r のマトロイドの個数をまとめたものである.

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $0 \leq r \leq n$ に対し,

$$f_{r,n} = \# \text{ labeled matroids of rank } r \text{ on } E = \{1, 2, \ldots, n\}$$

とおく.

表 1

$r \diagdown n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		1	3	7	15	31	63	127	255
2			1	7	36	171	813	4012	20891
3				1	15	171	2053	33442	1022217
4					1	31	813	33442	8520812
5						1	63	4012	1022217
6							1	127	20891
7								1	255
8									1
	1	2	5	16	68	406	3807	75164	10607540

命題 3.1. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, 以下が成り立つ:

1. $f_{0,n} = 1$.
2. $f_{n,n} = 1$.
3. $f_{1,n} = 2^n - 1$.
4. $0 \leq r \leq n$ に対し, $f_{r,n} = f_{n-r,n}$.

3.2 Unlabeled matroids of rank r on $E = \{ 1, 2, \ldots, n \}$

[3, Chapter 15] を参考にまとめた. 表 2 は, $E = \{ 1, 2, \ldots, n \}$ 上のランク r のマトロイドの同型類の個数をまとめたものである.

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $0 \leq r \leq n$ に対し,

$$f_{r,n} = \# \text{ unlabeled matroids of rank } r \text{ on } E = \{ 1, 2, \ldots, n \}$$

とおく.

命題 3.2. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, 以下が成り立つ:

1. $f_{0,n} = 1$.
2. $f_{n,n} = 1$.

表 2

$r \diagdown n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9
2			1	3	7	13	23	37	58	87
3				1	4	13	38	108	325	1275
4					1	5	23	108	940	190214
5						1	6	37	325	190214
6							1	7	58	1275
7								1	8	87
8									1	9
9										1
	1	2	4	8	17	38	98	306	1724	383172

3. $f_{1,n} = n$.
4. $0 \leq r \leq n$ に対し, $f_{r,n} = f_{n-r,n}$.

注意 3.3. $f_{2,n}$ は W. M. B. Dukes の PhD Thesis (“Counting and Probability in Matroid Theory”) で計算し公式が与えられているらしいが, その PhD Thesis が今回手に入らなかった (論文名で検索したが該当のものにはヒットせず). PhD Thesis を検索している間に文献 [2] を見つけたので, 参考文献として記録しておく.

参考文献

[1] URL `https://homepages.dias.ie/dukes/matroid.html`.

[2] W. M. B. Dukes, *On the number of matroids on a finite set*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire 51 (2004).

[3] J. Oxley, *Matroid theory*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, OUP Oxford, 2011.