ALE 空間上のインスタントンの数え上げ

名古屋大学大学院　多元数理科学研究科
藤井　篤之

この講演は, 三鍋聡司氏（名古屋大学大学院多元数理科学研究科）との共同研究に基づくものである. A 型の ALE 空間対しての，4 次元ゲージ理論における Yang-Mills インスタントンの数え上げと, そこに現れる組み合わせ論的現象について述べる.

インスタントンの数え上げとは, 複素 2 次元トーリック多様体 X と, その上の階数 N の Yang-Mills インスタントンのモジュライ空間の特異点解消 $M_N(c_1, ch_2)$ （ここで, c_1 は第 1 チャーン類, ch_2 は $\int_X ch(E)$ である.）を考え, $M_N(c_1, ch_2)$ 上における複素 $N+2$ 次元トーラス $(\mathbb{C}^*)^N \times (\mathbb{C}^*)^2$ 作用の同変体積,

$$\int_{M_N(c_1,ch_2)} 1$$

を計算することを言う. この計算を行うに当たっては, 局所化公式が有効であり, モジュライ空間のトーラス作用の固定点集合での積分に帰着される. さらにゲージ群が $U(N)$ の時, 固定点集合は離散的になることから, 固定点における接空間での作用の指標を見ることのみで計算可能である.

X が $\mathbb{C}^2$ の場合, トーラス作用の固定点は, 総箱数がインスタントン数 k 個となる N 組のヤング図形でパラメトライズされ, 同変体積はそこから定まる組み合せ論的なデータを用いて計算されている. この方法は, モジュライ空間が箙多様体としての構造を持ち, さらに $N=1$ の時に, X 上の k 点のヒルベルト概型と同型になることから得られる. このことを踏まえ, 我々は A 型の ALE 空間に対する同様の計算を, 二つの方法で行い, この二つの方法を組み合せ論的に比較した.

一つは, Kronheimer-中島 の結果から, A_l 型 ALE 空間上のインスタントンのモジュライ空間が箙多様体として構成されることを用いるものである. この箙多様体における安定性条件を $\mathbb{C}^2$ 上のモジュライ空間の場合と同様に取ることによって, $\mathbb{C}^2$ 上におけるインスタントンのモジュライ空間内の $\mathbb{Z}_{l+1}$ 同変な成分として特異点が解消され, $\mathbb{C}^2$ の場合における数え上げを応用することが出来る. この場合, 固定点は N 組の $l+1$ 色で色づけされたヤング図形の組によってパラメトライズされる.

もう一つは, $N=1$ の時に, モジュライ空間が X 上の $n = -ch_2 + \frac{1}{2}\int_X c_1^2$ 点のヒルベルト概型と双有理同値になることから, ALE 空間の座標系を用いて, $\mathbb{C}^2$ の場合の積として計算する方法である. このとき, 固定点は $l+1$ 組の総箱数が n 個となるヤング図形の組によってパラメトライズされる.

$N=1$ の時, この二つの方法で現れる, 色づけされたヤング図形と $l+1$ 組のヤング図形の組は, ヤング図形の $(l+1)$-商 によって組み合せ論的な 1 対 1 対応があり, $(l+1)$-商によって定まる組み合せ論的な情報が, インスタントンの位相的な情報と対応がつくことがわかる.