p-ブロックの $S_R(H)$-ブロックへの分解について

大阪府立高専　稗田吉成

G を有限群，p を G の位数を割り切る素数，(R,K,k) を十分大きな p-モジュラー系とする。G の部分群 H に対して，自明な $\mathfrak{o}H$-加群 $\mathfrak{o}_H$ の準同型環 (Hecke 環)$S_{\mathfrak{o}}(H)$ を考える。ここで $\widehat{H}$ で群環 $\mathfrak{o}G$ における H の元の和を表すとき，$e_H := \widehat{H}/|H|$ は KG のべき等元 (自明な指標 1_H に対応する KH の中心的原始べき等元) であって，$S_K(H) = e_H KGe_H$ である。

また $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対し，e_χ を χ に対応する KG の中心的原始べき等元とし，$\Phi_H^G := \{\chi \in \mathrm{Irr}(G); (\chi_{|H}, 1_H)_H \neq 0\}$ とおくと，$\{e_\chi e_H; \chi \in \Phi_H^G\}$ が $S_K(H)$ の中心的原始べき等元全体の集合となることが知られている。([C-R, (11.26)Corollary] 参照)

ここで $S_K(H) = K \otimes_R S_R(H)$ であるから，$S_R(H)$ の中心的べき等元 ε を取ると Φ_H^G の空でない部分集合 β があって $\varepsilon = \sum_{\chi\in\beta} e_\chi e_H$ となる。このとき左の形の元を ε_β と書き，ε_β が $S_R(H)$ の中心的原始べき等元であるとき，$\varepsilon_\beta S_R(H)$ 又は β を $S_R(H)$-ブロックと呼ぶ。

一方，乗法によって $\phi\colon Z(KG) \longrightarrow Z(S_K(H))$ が誘導されるが，G.R.Robinson は [R] の中でこの準同型を使って $Z(S_R(H)) \simeq \mathrm{End}_{R[G\times G]}(RG\widehat{H}RG) =: A_R(H)$ (R-多元環) を示し，$A_R(H)$ の (中心的) 原始ベキ等元に対応させて，(つまり，$RG\widehat{H}RG$ の $R[G\times G]$-加群としての直既約因子に対応させて) $S_R(H)$-ブロック (Robinson は $A_R(H)$-ブロックと名付けた) を定義した。従って，e_B を RG のブロックべき等元とするとき，この準同型 ϕ を通じて $\phi(e_B) = \sum_\beta \delta_\beta$ と分解され，これによって $\mathrm{Irr}(B) \cap \Phi_H^G$ の $S_R(H)$ -ブロックによる分割が生じる。

ここでは $\mathrm{Irr}(B) \cap \Phi_H^G$ に現れる $S_R(H)$-ブロック β の個数 $r(B)$ を B に関する種々の量，特に連結次数 (degree of connection) なる量を定義して，それを用いた評価式を紹介する。

参考文献

[C-R] C. W. Curtis and I. Reiner : Methods of Representation Theory with Application to Finite Groups and Orders-Volume I, John Wiley and Sons, New York, 1981.

[H] Y. Hieda : *On $S_R(H)$-blocks II*, Proc. of the 36th Symposium On Ring Theory and Representation Theory, 116-122 (2004).

[H-T] Y. Hieda and Y. Tsushima : *On $S_R(H)$-Blocks for Finite Groups*, J. Alg.202, 583-588 (1998).

[R] G. R. Robinson : *Some Remarks on Hecke Algebras*, J. Alg.163, 806-812 (1994).