テンソル積のJordan標準形

飯間　圭一郎
岡山大学大学院　自然科学研究科　数理物理科学専攻M１
E-mail: iima@math.okayama-u.ac.jp

この講演内容は、吉野雄二先生との共同研究です。

この講演では、山梨大学の佐藤眞久先生と埼玉大学の若松隆義先生が提起された問題を考えます。お二人は既により一般化された解答をお持ちかもしれないということをお断りしておきます。

問題 1 k を代数閉体とし、V, W を k 上有限次元ベクトル空間とする。
このとき $f \in \mathrm{End}_k(V), g \in \mathrm{End}_k(W)$ に対して $f \otimes g$ の Jordan 標準形を求めよ。

この問題を解くためには、まず f, g がそれぞれ既約な Jordan 標準形を持つときを求めて、つぎにそれらの直和を求めればよい。k の標数が 0 の場合には、次の定理を得た。

定理 2 固有値が α で、サイズが n の Jordan 標準形を $J_n(\alpha)$ と書く。$J_n(\alpha), J_m(\beta), n \leq m$ に対して、次のことが成り立つ。

(1) $\alpha = 0 = \beta$ のとき
$$J_n(0) \otimes J_m(0) = J_n(0)^{\oplus m-n+1} \oplus \bigoplus_{i=1}^{2n-2} J_{n-\lceil i/2 \rceil}(0),$$
(2) $\alpha = 0 \neq \beta$ のとき
$$J_n(0) \otimes J_m(\beta) = J_n(0)^{\oplus m},$$
(3) $\alpha \neq 0 = \beta$ のとき
$$J_n(\alpha) \otimes J_m(0) = J_m(0)^{\oplus n},$$
(4) $\alpha \neq 0 \neq \beta$ のとき
$$J_n(\alpha) \otimes J_m(\beta) = \bigoplus_{i=1}^{n} J_{n+m+1-2i}(\alpha\beta).$$

(1)(2)(3) は難しくなく (4) の証明に [HW] の結果を用いた。k の標数が p のときは、いくつかの具体的な計算ができるだけで一般的な結果はまだありません。

参考文献

[HW] T. Harima and J. Watanabe, *The Finite Free Extension of Artinian K-Algebras with the Strong Lefschetz Property*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova Vol **110** (2003) , 119-146.