# 2次元単項式イデアルのRatliff-Rush閉包とRees代数のBuchsbaum性について

松岡 直之　(明治大学理工学研究科)

$A$ を可換環とする。$A$ が Buchsbaum 環であるとは，$\ell_A(A/P) - \mathrm{e}(P)$ が $A$ の巴系イデアル $P$ の取り方によらず一定値を取るときをいう。但し，$\ell_A(M)$ で $A$-加群 $M$ の長さ，$\mathrm{e}(P)$ で環 $A$ の $P$ に関する重複度を表す。$A$ のイデアル $I$ に対して，

$$\widetilde{I} = \bigcup_{n \geq 0} (I^{n+1} : I^n)$$

とおき，イデアル $I$ の Ratliff-Rush 閉包という。$\widetilde{I}$ は $I$ を含む $A$ のイデアルである。環 $A$ が Noether 環で，イデアル $I$ が非零因子を少なくとも一つは含むと仮定すると，包含関係 $\widetilde{I} \subseteq \overline{I}$ が成り立つ。但しここで $\overline{I}$ は $I$ の整閉包を表す。

イデアル $I$ の Rees 代数 $\mathcal{R}(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n$ がいつ Buchsbaum 環になるかを，イデアル $I$ の Ratliff-Rush 閉包と整閉包の間の関係の中から解析し，2 次元正則局所環内で得られた次の一般論から 2 変数多項式環内の単項式イデアルの中で $\mathcal{R}(I)$ が Buchsbaum 環となるようなものの存在を保証し，できる限り決定付けることを目標とする。

**定理 1.** $(A, \mathfrak{m})$ を *2*次元正則局所環とし，$I$ を $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする。このとき次の条件は同値である。

(1) $R$ は *Buchsbaum* 環であって，斉次極大イデアル $M$ とは異なる $R$ の任意の素イデアル $P$ について，$R_P$ は正規環である。

(2) $R$ は *Buchsbaum* 環であって，$\overline{I} = \widetilde{I}$ である。

(3) $\mathfrak{m}\overline{I} \subseteq I$ であって，等式 $I\overline{I} = I^2$ が成り立つ。

$Q = (a, b)$ がイデアル $I$ の *reduction* ならば，次の条件を付け加えることができる。

(4) $\mathfrak{m}\overline{I} \subseteq I$ であって，$Q\overline{I} \subseteq I^2$ である。