ヤング盤と量子アフィン代数の q-指標

名古屋大学大学院多元数理科学研究科　中井 和香子

$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の単純リー環 ($\mathrm{rank}\,\mathfrak{g}=n$) とし, $\hat{\mathfrak{g}}:=\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]\oplus\mathbb{C}c\oplus\mathbb{C}d$ を non-twisted なアフィンリー環とする. 量子普遍包絡環 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ で $q\to 1$ としたときに $U(\hat{\mathfrak{g}}')$ となるもの (但し, $\hat{\mathfrak{g}}':=\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]\oplus\mathbb{C}c$. これは $\hat{\mathfrak{g}}$ の部分リー環) を考える. これを量子アフィン代数という.

量子アフィン代数 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の q-指標と呼ばれる環準同型写像

$$\chi_q:\mathrm{Rep}\,U_q(\hat{\mathfrak{g}})\to\mathbb{Z}[z_{i,a}]_{i\in I,a\in\mathbb{C}^\times}$$

がある (I は有限集合). $\mathfrak{g}$ の指標 $\chi:\mathrm{Rep}\,\mathfrak{g}\to\mathbb{Z}[z_i^{\pm1}]_{i\in J}$ と同様, χ_q は $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の有限次元表現のカテゴリーの Grothendieck 環 $\mathrm{Rep}\,U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ や個々の表現 $V\in\mathrm{Rep}\,U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の構造を調べる上で非常に強力である.

$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ を分割とする. $\mathfrak{g}$ が A_n 型のとき, 最高ウェイト λ の有限次元既約表現 $V(\lambda)$ に対する指標 $\chi(V(\lambda))$ は, 以下の Jacobi-Trudi の行列式

$$\chi(V(\lambda))=\det(h_{\lambda_i-i+j})_{1\le i,j\le n}=\det(e_{\lambda'_i-i+j})_{1\le i,j\le n}$$

で与えられる事が知られている. ここで, $h_r=\chi(V((r)))$, $e_r=\chi(V((1^r)))$ である. また, $\lambda'=(\lambda'_1,\lambda'_2,\ldots)$ は λ の conjugate である. 更に, これより Gessel と Viennot の "path" の方法を用いて $\chi(V(\lambda))$ のヤング盤による記述

$$\chi(V(\lambda))=\sum_{T\in\mathrm{Tab}\,(\lambda)}z^T\in\mathbb{Z}[z_i]_{i=1,\ldots n+1}$$

が与えられる事が知られている. ここで, λ はヤング図 $\{(i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\mid 1\le j\le\lambda_i\}$ と同一視し, $\mathrm{Tab}\,(\lambda)$ は 成分 $T(i,j)\in\{1,\ldots,n+1\}$, shape λ の semistandard tableau T 全体の集合で, $z^T:=\prod_{(i,j)\in\lambda}z_{T(i,j)}$ である.

本講演では, 分割 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ と $a\in\mathbb{C}$ で定まるある種の既約有限次元表現 $V(\lambda,a)$ の q-指標が, $\mathfrak{g}$ が A_n,B_n,C_n,D_n 型の場合に Jacobi-Trudi 型の公式

$$\chi_{\lambda,a}:=\det(h_{\lambda_i-i+j,a+2\lambda_i-2i})_{1\le i,j\le n}=\det(e_{\lambda'_i-i+j,a+2j-2})_{1\le i,j\le n}$$

で与えられるという予想の下 (つまり $\chi_{\lambda,a}$ は意味のあるものとして), $\chi_{\lambda,a}$ のヤング盤による記述

$$\chi_{\lambda,a}=\sum_{T\in\mathrm{Tab}\,(\lambda)}z_a^T\in\mathbb{Z}[z_{i,a}]_{i\in I,a\in\mathbb{C}}$$

を考えたい. 但し, $z_a^T:=\prod_{(i,j)\in\lambda}z_{T(i,j),a-2i+2j}$. その方法には, A_n 型リー環 $\mathfrak{g}$ の指標の Gessel と Viennot の方法を使えば良い. 実は, A_n 型の場合の $\chi_{\lambda,a}$ は, 上と全く同様に $\mathrm{Tab}(\lambda)$ は semistandard tableau 全体の集合である. B_n 型の場合も, $\mathrm{Tab}(\lambda)$ は semistandard tableau と同様に, ある種の horizontal rule と vertical rule を満たす tableau 全体の集合として記述される. ところが一方, C_n および D_n 型の場合においては, $\mathrm{Tab}(\lambda)$ は horizontal rule と vertical rule を満たす tableau 全体の集合 $\widetilde{\mathrm{Tab}}(\lambda)$ の真部分集合であり, $\mathrm{Tab}(\lambda)$ の元を $\widetilde{\mathrm{Tab}}(\lambda)$ から選びだすための extra rule がいる. この extra rule は, 一般には複雑であり, 記述に限界があると思われるが, path を用いれば extra rule の記述は可能である.