Coxeter 群の同型性判定問題について

縫田　光司 (Koji NUIDA)*

Coxeter 群 W とは、次のような群表示

$$W = \langle S \mid (st)^{m(s,t)} = 1 \ (s,t \in S \text{ s.t. } m(s,t) < \infty) \rangle$$

を持つ群のことである。（ここで $m : S \times S \to \{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ は対称性 $m(s,t) = m(t,s)$ と、条件 $m(s,t) = 1 \Leftrightarrow s = t$ を満たす写像である。）このような群 W と生成系 S の組を与えると、Coxeter グラフと呼ばれるグラフ（頂点集合 S、2 点 s, t は $3 \le m(s,t) \le \infty$ のときに重み $m(s,t)$ の辺で結ばれる）が同型を除いて一意に定まり、逆に互いに同型なこのようなグラフは同型な Coxeter 群を定義する、ということはよく知られている。

ここで注意すべきは、Coxeter 群 W に対応する Coxeter グラフは、一般には W 自身だけでなく生成系 S の選び方にも依存するということである。実際に生成系 S の選び方によって異なる Coxeter グラフが得られる例としては、$I_2(6)$ 型と呼ばれる有限 Coxeter 群が比較的よく知られている。（この群は、位数 12 の二面体群であり、G_2 型の Weyl 群でもある。）この場合、$I_2(6)$ 型 Coxeter 群としての大きさ 2 の生成系の他に、ある大きさ 3 の生成系があり、それによってこの群は $A_1 \times A_2$ 型の Coxeter 群（つまり、2 次と 3 次の対称群の直積）にもなる。逆に言うと、$I_2(6)$ 型と $A_1 \times A_2$ 型の Coxeter グラフは互いに同型でないが、それらは同型な Coxeter 群を定めるということでもある。

上記の例は、「同型でない Coxeter グラフがいつ同型な群を定めるか」、さらに言えば「二つの Coxeter 群はいつ同型となるか」という問題に関する一例である。この問題に対する研究は、（特に Coxeter 群が無限群である場合に）この 5 年から 10 年の間に急速な進歩を遂げてきた。今回は、この Coxeter 群の同型性判定問題についての、話者（縫田）による結果を含む最近の諸結果について、具体例を交えながら紹介する。

*E-mail address: nuida@ms.u-tokyo.ac.jp