ロビンソン-シェンステッド対応とヤング盤の一般化

沼田 泰英 (北海道大学大学院理学研究科)

有向グラフが与えられた時, その頂点を基底とする K-線形空間を KV とおく (ただし, K は標数 0 の体とする). 頂点 v に対して v を始点 (終点) とする辺達の終点 (始点) の和を対応させる KV 上の K-線形写像を up (down) operator という. 頂点集合 V から非負整数 $\mathbb{N}$ への写像 ρ が与えられていて, 任意の辺 e に対して $\rho(\mathrm{start}(e)) = \rho(\mathrm{end}(e)) - 1$ が成立しているときに, graded であるという. また, 任意の辺 e に対して, $\rho(\mathrm{start}(e)) \leq \rho(\mathrm{end}(e))$ を満たし, $\rho(\mathrm{start}(e)) = \rho(\mathrm{end}(e))$ が成立するのは $\mathrm{start}(e) = \mathrm{end}(e)$ の時に限るときに, semi-graded であるということにする.

共通の頂点集合を持つ graded なグラフ G_1, G_2 を用意する. G_1 の up operator と G_2 の down operator をそれぞれ U, D とおく. $DU - UD = rI$ (ただし, $r \in \mathbb{Z}$, I は恒等写像) という交換関係を満たしているときに G_1 と G_2 は r-dual であるという.

G_1, G_2 を共にヤング束のハッセグラフとすると, r-dual であるための条件を満たしている. ヤング束のハッセグラフにおいて最小元 $\varnothing$ から始まるパスはヤング標準盤と同一視することが出来る. ヤング標準盤には Robinson 対応と呼ばれる対応が知られているが, これに相当する対応が r-dual なグラフにおいても構成できることを, Fomin が与えている.

一方で, 同じ形のヤング標準盤とヤング半標準盤のペア達と, ワード達の間には, Robinson-Schensted 対応と呼ばれる一対一対応が知られている. また, 最小元 $\varnothing$ からのパスをヤング半標準盤と同一視できる様なグラフは semi-graded になるが, その down operator を E とおくと, ヤング束のハッセグラフの up operator U と $EU - UE = E$ という関係を満たしている.

逆にこの関係を満たしているグラフにおいては, その交換関係が示唆する Local な一対一対応である RS 対応 Ψ をひとつ固定し, それを張り合わせることで, Robinson-Schensted 対応に相当する対応が構成できる. すなわち次の定理が得られる.

Theorem 1. *G_1, G_2 を共通の頂点集合をもつ semi-graded なグラフの組とし, 特に G_1 は graded であるとする. G_1 の上り演算子 U と G_2 の下り演算子 E が, 交換関係*

$$EU - UE = rE$$

を満たしているとする. このとき, G_1, G_2 の RS-対応 Ψ と skew shape S に対して, $\{g' : \partial^+ S \to G,\ growth\}$ と $\left\{ (\alpha, g'') \,\middle|\, \begin{smallmatrix} \alpha\text{: } r\text{-colored generalized word on } C(S), \\ g'' : \partial^- S \to G,\ \alpha\text{-compatible growth} \end{smallmatrix} \right\}$ の間の一対一対応を Ψ-compatible 2-growth $g : S \to G$ を通して構成することができる.

定理 1 における $\{g' : \partial^+ S \to G,\ \mathrm{growth}\}$ は通常の Robinson-Schensted 対応ではヤング盤のペアにあたる. また, $\left\{ (\alpha, g'') \,\middle|\, \begin{smallmatrix} \alpha\text{: } r\text{-colored generalized word on } C(S), \\ g'' : \partial^- S \to G,\ \alpha\text{-compatible growth} \end{smallmatrix} \right\}$ は通常の Robinson-Schensted 対応ではワードにあたる. この意味で定理 1 は通常の Robinson-Schensted 対応の一般化になっている.

E-mail address: `nu@math.sci.hokudai.ac.jp`