カペリ恒等式と不変式環

北海道工業大学 和地 輝仁

本講演では, カペリ恒等式という 19 世紀から知られている等式が, 単なる微分作用素環における等式であるだけではなく, リー環の普遍包絡環の中心や不変微分作用素環の間の対応を与えているという事実を, いくつかのカペリ恒等式を例にとって解説する.

リー環の作用と微分作用素　複素リー群 $GL_n = GL(n;\mathbf{C})$ のリー環は $\mathfrak{gl}_n = \{n$ 次正方行列全体$\}$ である. これらは, $\exp : \mathfrak{gl}_n \to GL_n$ と指数写像 exp で対応する. GL_n の $m\times n$ 行列全体のなすベクトル空間 $V = \mathrm{Mat}(m,n;\mathbf{C})$ 上の作用を $g.A := Ag^{-1}$ と定義し, V 上の多項式関数の空間 $\mathbf{C}[V]$ の上へも $(g.f)(A) := f(Ag)$ と作用させる. この作用を微分すると, $\mathfrak{gl}_n \to \mathrm{End}(\mathbf{C}[V])$ というリー環の準同形写像が得られるが, 実はこの像は V 上の多項式係数微分作用素環 (V 上のワイル代数) の中に入り, $\mathfrak{gl}_n$ の行列単位 E_{ij} の像は,

$$R : E_{ij} \mapsto \sum_{k=1}^{m} x_{ki}\frac{\partial}{\partial x_{kj}}, \qquad E_{ij} \text{ は行列単位}, \quad x_{ij} \text{ は } V = \mathrm{Mat}(m,n;\mathbf{C}) \text{ の座標関数},$$

となる. カペリ恒等式にはこのような微分作用素がしばしば登場する.

カペリ恒等式　以下簡単のため, この予稿では $m = n$ とする. 最も基本的なカペリ恒等式は,

$$\det\bigl(x_{ij}\bigr)_{1\le i,j\le n}\det\left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right)_{1\le i,j\le n} = \det\left(\sum_{k=1}^{n} x_{ki}\frac{\partial}{\partial x_{kj}} + (n-j)\delta_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$$

という, V 上のワイル代数 W_V の中の等式である. $\mathfrak{gl}_n$ の普遍包絡環を $U(\mathfrak{gl}_n)$, その中心を $ZU(\mathfrak{gl}_n)$ と表すと, このカペリ恒等式は, 左辺がワイル代数の中の GL_n-不変元であり, 右辺が $ZU(\mathfrak{gl}_n)$ のある元の R による像であるという表現論的な意味を持つ.

デュアルペアのカペリ恒等式　上の等式のほかに,

$$\det\bigl(x_{ij}\bigr)_{1\le i,j\le n}\det\left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right)_{1\le i,j\le n} = \det\left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}\frac{\partial}{\partial x_{jk}} + (n-j)\delta_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$$

という, もうひとつの等式が成立する. 左辺は先程と同じであるが, 実は $(g,h).A := {}^t g^{-1}Ah^{-1}$ という $GL_n\times GL_n$ の作用により, $GL_n\times GL_n$-不変元であり, 他方右辺は, $U(\mathfrak{gl}_n)$ のある中心元の L による像である. ここに $L : U(\mathfrak{gl}_n) \to \mathrm{End}(\mathbf{C}[V])$ は, 左から ${}^t g^{-1}$ を掛ける作用から導かれる $U(\mathfrak{gl}_n)$ の作用である. $m\ne n$ の場合にも上のように 2 種類のカペリ恒等式があり, $U(\mathfrak{gl}_m)$ と $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心の生成系の対応を具体的に与えているという表現論的な意味を持つ. また不変式環の関係は (*): $L(ZU(\mathfrak{gl}_m)) = W_V^{GL_m\times GL_n} = R(ZU(\mathfrak{gl}_n))$ となる.

上の設定は組 (GL_m, GL_n) のなすデュアルペアに対応するが, 複素リー群のデュアルペアにはもうひとつ (Sp_m, O_n) というものがあり, この場合のカペリ恒等式は伊藤稔により与えられた.

対称対のカペリ恒等式 (この項は西山享氏との共同研究である)　カペリ恒等式は, (*) のような不変式環の関係式があったとき, その元の対応を具体的に与える等式といえる. つまり, (*) のような関係式が現れる設定があれば, そこではカペリ恒等式を考えることに意味がある. そこでシーソーペアと呼ばれる次のような設定を見る:

$$\begin{array}{ccc} G = GL_{p+q} & & M = GL_n\times GL_n \\ \cup & \times & \cup \\ K = GL_p\times GL_q & & H \simeq GL_n, \end{array}$$

4 つのリー群は, $Sp(2n(p+q);\mathbf{C})$ の中へある方法で埋め込まれていて, その中で G と H は互いに他の交換団, K と M は互いに他の交換団.

すると, oscillator 表現 (Weil 表現) と呼ばれる斜交リー環の作用 $\omega : U(\mathfrak{sp}_{2n(p+q)}) \to \mathrm{End}(\mathbf{C}[V])$ を用いて, $\omega(U(\mathfrak{g})^K) = W_V^{H,K} = \omega(U(\mathfrak{m})^H)$ という不変式環の関係がある. ここに W_V は $V = \mathrm{Mat}(n, p+q;\mathbf{C})$ 上のワイル代数である. そして, この不変式環の関係に対応するカペリ恒等式 (のひとつ) として次の等式がある:

$$\sum_{\substack{1\le i_1<\cdots<i_d\le p\\ 1\le j_1<\cdots<j_d\le q}} \det({}^t XY)_{IJ}({}^t\partial_X\partial_Y)_{IJ} = \sum_{\substack{1\le s_1<\cdots<s_d\le n\\ 1\le t_1<\cdots<t_d\le n}} \det\bigl((X\,{}^t\partial_X)_{ST}+D\bigr)\det\bigl((Y\,{}^t\partial_Y)_{ST}+D\bigr).$$

ここに行列 D は $D = \mathrm{diag}(d-1,\ldots,0)$, また行列 X は $X = (x_{si})$ などである.